自学参考用书

高中三角

GAO ZHONG SAN JIAO

浙江人民出版社

自学参考用书

高中三角

黄祥楙编著

浙江人民出版社

自学参考用书

高 中 三 角

黄祥楙编著

*

浙江人民出版社出版

淳安印刷厂印刷

浙江省新华书店发行

开本 787×1092 1/32 印张 7 1/2

1958年4月第一版

1979年5月第8次印刷

印数：180,001—280,000

统一书号：7103·1006

定　　价：0.53 元

出 版 说 明

应广大读者要求，将我社文化大革命前出版的《高中代数》、《高中三角》和杭州大学数学系一九七四年编写的《初等几何》等书，略作修订后重印和编印出版，统称《自学参考用书》，供具有高中文化程度的工、农、知识青年、在职干部和中学教师自学参考。

这几本书以帮助读者学习和掌握基础知识为主，按照适合自学的要求进行编写，除注意科学性和系统性外，文字也比较浅近。但与迅速发展的科学技术要求相比，还是感到不足。存在的缺点和错误，希望读者批评指正。

浙江人民出版社

1978年6月

目　　录

第七章　三角形的解法

习题答案

附录一　三角函数表

附录二　希腊字母

第一章　学习三角学的基础知识

开　始　的　话

如果读者对于三角学已有一定基础，为了复习和巩固而阅读本书的话，阅读本书内容以后，可以把书里所举例题和习题一起作为练习，来培养自己的独立思考和独立工作的能力。如果读者对于三角学知识还不够完备，或者是从头学起的，那应该深入体会本书内容，然后研读例题中所讲的解题和证题的方法、步骤，再来做习题，不要把例题和本书内容同等看待。若习题做完，还感不足的话，那末可以采取其他书籍上的题目来做，因为你已具备解决这类问题的能力了。

关于三角公式及其他有关各种结果，请读者于阅读时或于全书读完后自行摘录，既可复习，又便检阅。

§1.　三角学的对象及其简单历史

三角学是研究三角形边与角之间量的关系的一种学科。最初研究的问题是：由三角形里的某些已知元素（角或边），去求其他的未知元素。现在我们把这叫做解三角形，它是三角学里的重要部分。

为了要解三角形，必须先研究三角形边、角的性质，讨论三角形边、角间的关系。从三角学成为独立的一种科学以来，为了使内容更加完备，叙述更有系统，一般是先讨论三角形的边、角

关系和性质，然后再叙述三角形的解法和三角学的应用。

三角学是以平面几何相似三角形的知识为基础，以代数知识为运算工具的；由直角三角形边角间的关系所给出的定义开始，进而研究边角的性质。

三角学的应用很广，除了直接应用在物理学、工程学等科学上外，三角学又是研究高等数学所不能缺少的一门基础科目。

三角学的研究，在公元一世纪前后就已经开始，它的起源同当时的航海和农业的发展有密切的关系。例如，为了海上航行的安全，就需要按照星辰的位置，正确地决定船只航行的方向；为了农业播种，需要编著正确的历书，这就促进了天文学的发展，同时也产生了与天文学的计算有密切关系的三角学。至于测量地形、面积等，那关系就更密切了。我国在测量上早就开始研究角与弧的量法。如在我国最早的算书《周髀算经》中关于勾股测量术的记载，就是对三角学的研究。但是，三角学课程的叙述，采取近代的形式，那是在十八世纪后半期才开始的。至于把三角形中几种随着角的改变而变化的量，看做是线段的比的观点，是到了十九世纪中叶才完全确定的。

从三角学的起源和发展中，说明了数学是从客观现实中产生的，是从人类实践中逐渐发展起来的

§ 2. 角和弧的度量

用所设角顶为中心任作一圆，把整个圆分成 360 等分，这样每一等分的弧叫做1度的弧，而1度的弧所对的圆心角叫做1度的角。把1度的弧分成 60 等分，每一等分叫做1分；把1分的弧再分成 60 等分，每一等分叫做1秒。所以用度做单位来量弧和角的制度叫做六十分制。

由几何学知道，如果在已知圆中，两个圆心角相等，那末它们所对的弧也相等。反之，如果在已知圆中，两个弧相等，那末它们所对的圆心角也相等。假如我们扩大圆的半径，如图 1，把 OA 扩大到 OA_1，很明显的，圆的本身也随着扩大，因而它的 1 度的弧也随着扩大。所以 1 度的弧的大小决定于圆的半径（图上所画的弧不是 1 度的弧）。同时，当半径扩大的时候，就某一个圆心角来看，它的大小并没有改变。也就是说，1 度的角不决定于圆的半径的长短。所以圆心角的大小，是可以用它所对的弧来度量的。结论是这样：

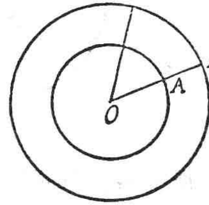

图 1

用所设角顶为中心任作一圆，那末这个角所对圆弧与圆半径长度的比，完全由这角所决定（与半径大小无关）。例如周角所对的弧与圆半径长度之比总是 2π，平角所对的弧与半径长度之比总是 π 等。

由此，我们知道，对于角与弧的度量的方法，除了用度作为量角单位之外，也可以用所对圆弧来度量，这在高等数学里是一种很重要的量法。

定义　用所设角作为中心角时，其所对圆弧与半径长度的比，叫做该角的弧度测量或弪度。

当对应弧长等于半径时，弧与半径长度的比值为 1，这样的弧所对的圆心角叫做 1 弧度的角，或称为 1 弪。这就是弧度法的单位。

在习惯上，弧与角的弧度法不记单位名称。例如，$\theta=2$，表示角 θ 是 2 弧度。又如，$\varphi=0.5$，表示角 φ 是 0.5 弧度。（图 2）

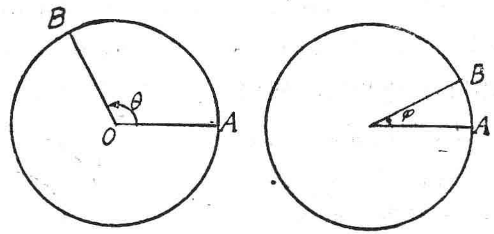

图 2

既然我们知道了度量一个角有两种方法：一种是六十分制，也就是度分秒法；一种是弧度法；因之很自然地使我们想到，度与弧度两种量法之间的相互换算问题。由定义知道，全圆周的弧度为 2π，即 1 个周角等于 2π。半圆周的弧度为 π，即平角等于 π，现在把几个常用的角采用两种量法所得的不同结果，列表如下：

度	$360°$	$270°$	$180°$	$90°$	$60°$	$45°$	$30°$
弧　度	2π	$\frac{3\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

注意：如果我们不加上单位名称，说“$\pi=180$”或“$\frac{\pi}{2}=90$”，那是完全错误的。正确的说法是：π 弧度是等于 180 度。这个道理很简单，比如，我们说 3 市尺等于 1 米，如果说成是 $3=1$，那就错了。

现在，我们从上面所讲的基础上，进一步来讲一般角度的换算问题。已知

$$\pi \text{ 弧度}=180°,$$

$$\therefore \qquad 1 \text{ 弧度}=\frac{180°}{\pi}\approx 57°17'44.8'';$$

$$1^\circ=\frac{\pi}{180}\text{ 弧度}\approx 0.01745\text{ 弧度}。$$

附注：符号"≈"表示近似值。

可见公式 π 弧度 $=180^\circ$，是把任意一个角用六十分制来量和用弧度制来量两者联系起来的一个有用的公式，其中的 π 表示一个数，即 3.14159……。这在当 π 不牵涉到角而独立应用时，大家是很明确的；但是当 π 用来表示一个角的时候，就有些不清楚了。其实这时 π 仍然代表一个数，它就是两直角的弧度的数。

例 1　　化 $22^\circ 30'$ 为弧度。

解　　$22^\circ 30'=22\frac{1}{2}$ 度，所以

$$22^\circ 30'=\frac{\pi}{180}\text{弧度}\times 22\frac{1}{2}$$

$$=\frac{45\pi}{360}\text{弧度}=\frac{\pi}{8}\text{弧度}。$$

正如前表一样，有时用弧度表示一个角度，就用含有 π 的形式表示；如果要求出这个弧度数的近似值，可以按照要求的精确程度来计算，例如精确到 0.0001，那末可以演化如下：

$$22^\circ 30'=0.01745\text{ 弧度}\times 22.5=0.3926\text{ 弧度}。$$

例 2　　化 1.309 弧度为度。

解

$$1.309\text{ 弧度}=\frac{180^\circ}{\pi}\times 1.309$$

$$=\frac{180^\circ\times 1309\times 10}{31416}$$

$$=\frac{180^\circ\times 10}{24}=75^\circ。$$

上面所讲的，是角的量法中度与弧度之间的相互换算的理论依据和具体例子，我们只要理解就行了，在实际问题里需要换算时，还应该利用数学用表，直接查得。近年来中学里都采用《四位数学用表》，建议读者能够置备一本，因为在后面我们还将讲到其他各种表的应用，同时我们也必须学会查表的技巧。

习　题

1．化下列各角为弧度（写成 π 的几分之几的形式）：

(1) $105°$；　　(2) $78°45'$。

2．化下列各角为弧度(用近似值表示，要求精确到0.0001)：

(1) $37°30'$；　　(2) $68°45'$。

3．化下列弧度制表示的各角为六十分制：

(1) $\dfrac{5\pi}{27}$；　　(2) 2.8798。

4．把地球看成为一个圆球体，在同一经度上相距 278.1 公里的两地，如果我们取 $\pi=\dfrac{22}{7}$ 和地球的半径为 6,370 公里，求这两地的纬度的差。

§ 3.　任意值的角和弧（有向的角和弧）

以前我们把角理解为由一点引出的两条射线所构成的几何图形。现在为了更多地结合实际以及便于应用起见，必须把角的概念加以推广，给出一个新的定义如下：

定义　从某一点 O 出发的射线，绕点 O 作任何旋转时，所经过的路径叫做角。

把射线开始的位置叫做始边，终止的位置叫做终边。这样终边与始边的两条射线就是以前所理解的角。但是角的新的意

义的主要关键在于绕点 O 作任何旋转，始边与终边是有一定次序的。我们规定，由始边旋转到终边的方向和时针方向相反的为正方向，和时针方向相同的为负方向。

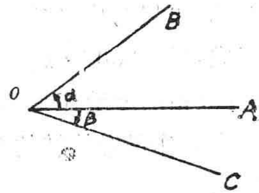

图 3

如右图，O 为顶点，OA 为始边，OB 和 OC 都为终边，那末构成的角 α 为正角，角 β 为负角。

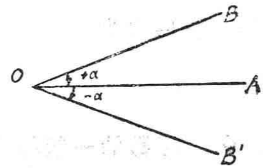

图 4

如果 $\angle AOB$ 与 $\angle AOB'$ 是用绝对值相同而符号相反的两数来量的，那末两角终边 OB、OB' 对于公共始边 OA 是对称的。（图 4）

从机器的轮子、飞机的螺旋桨等等实际运动来看，一个角可以按任何一种方向，旋转任意多个周；但当它停下来时，我们还是可以用一个数来表示它的度量的。所以角的值可以和任意一个实数相对应。

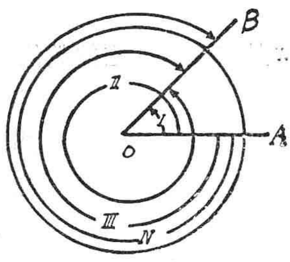

图 5

另一方面象图 5 就可以看作它是画了四个角：

Ⅰ是 $45°$，

Ⅱ是 $405°$，

Ⅲ是 $-315°$，

Ⅳ是 $-675°$。

它们有共同的顶点 O、始边 OA 和终边 OB。

角（弧）的相加，规定与直线上有向线段的加法相似。

角 α 与角 $\alpha+360°\cdot k$（k 为任何整数，任何整数即 $0, \pm1, \pm2, \pm3, \cdots\cdots$。以下均同。）是有共同的始边与终边的，如图 5

的 Ⅱ 可以写成 $45°+360°$，Ⅲ 可以写成 $45°-360°$，Ⅳ 可以写成$45°-360°\cdot 2$。因之，当一角的始边与终边有一定位置以后，该角的度数还是不能确定的（除了整周的不计算在内，或者是在未作任意旋转的时候，那才是确定的）。我们称 $\alpha+360°\cdot k$ 为角 α 在 $0°$ 与 $360°$ 之间而具有同样始边、终边的角的一般形式。

如果用弧度制，那末很明显，角 α 在 $0\leqq\alpha\leqq 2\pi$ 范围内的一般形式为

$$\alpha+2k\pi \qquad (k\text{ 为任何整数})$$

§ 4. 函数的一般概念

在高中代数里关于函数的概念是这样说明的：数值可以任意选择的（有时要在某一个范围内）变量叫做自变量，如果对于自变量的每一个确定的值，另一个变量有确定的值和它对应，那末这个变量叫做自变量的函数。例如

$$y=5x^2+3x-1,$$

x 是自变量，它的数值是可以任意选择的：

$$当\ x=2\ 时，\ y=25;$$

$$当\ x=1\ 时，\ y=7;$$

$$当\ x=0\ 时，\ y=-1;$$

$$当\ x=-\frac{1}{2}\ 时，\ y=-\frac{5}{4};$$

$$当\ x=-3\ 时，\ y=35\ 等等。$$

可见变量 y 的值是由 x 的值而确定的，因之我们说："y 是 x 的函数"。它们的表达形式可以有很多种，例如：

$$y=\frac{1}{x-1}, \qquad y=\sqrt[3]{x^2},$$

$$y=2^x, \qquad y=\lg x \text{ 等等。}$$

概括起来我们用符号表示为：

$$y=f(x)。$$

我们所讨论的函数是自变量的值和函数的值都是在实数范围之内的。因之变量可以取的数值，有时没有什么限制，但有时却受了表达形式的限制或是人为的限制。自变量的一切为我们所讨论的值的全体，叫做函数的定义域。

如果自变量 x 的所有值限制在 a、b 两实数之间（假如 $b>a$），并且包括 a、b 两数在内，那末变量 x 叫做在闭区间 $[a, b]$ 上变化，也可以用不等式：

$$a \leqq x \leqq b$$

来表示。如果自变量 x 所取的值不包括 a、b 两数在内，那末变量 x 叫做在开区间 (a, b) 上变化，也可以用不等式：

$$a<x<b$$

来表示。如果自变量所取的值毫无限制，那就是说它可以在实数范围内从负的无穷大直到正的无穷大。无穷大我们用符号∞来记，那末变量 x 叫做在区间 $(-\infty, \infty)$ 上变化。（这个区间当然是开区间，因为无穷大是无法到达的。）

这样一来，象前面所举的函数

$y=5x^2+3x-1$ 的定义域就是 $(-\infty, \infty)$。

$y=\dfrac{1}{x-1}$ 的定义域是两个开区间 $(-\infty, 1)$ 和 $(1, \infty)$，因为分母不能为 0，所以 x 不能等于 1。

$y=2^x$ 的定义域为 $(-\infty, \infty)$。

$y=\lg x$ 的定义域为 $(0, \infty)$。

函数关系主要是自变量与函数间的对应规律，象前面所举的一些例子，都是对应规律确定了的。取某一个函数来讨论，当

自变量 x 确定了一个值，那末函数也随之而确定了一个值。至于 $y=f(x)$ 的函数形式，则只能说明 x 与 y 之间存在一种函数关系，究竟它的对应规律如何，在没有说明的时候，是不明确的。（今后在说明函数的性质时，这种符号是有极大用处的。）因此前面所举例子，可以写成：

$$f(x)=\frac{1}{x-1}, \qquad F(x)=\sqrt[3]{x^2},$$

$$\varphi(x)=2^x, \qquad \Phi(x)=\lg x \text{ 等。}$$

既然函数关系主要是变量间的对应规律，所以不能把函数的概念束缚于简单的代数表达式，只要看两个变量之间存在不存在一种对应规律，如果存在一种对应规律，那末这两个变量之间就有函数关系。$y=\lg x$ 是一个很明显的例子。

我们应该注意，虽然在函数概念的说明里，只提到如果对于自变量的每一个确定的值，另一个变量有确定的值和它对应，这是比较广义的说法。事实上我们所讨论到的函数，都是对于变量 x 的每一个实数值 x_0，有变量 y 的一个且仅有一个值 y_0 和它相对应的。这种函数我们叫做单值函数。

最后还应注意，习惯上大家都用 x 表示自变量，y 表示函数。但在实际问题上，例如物理学里的 $s=v_0t$，几何学里的 $c=2\pi r$ 等，其中距离 s 是时间 t 的函数，圆周长 c 是圆半径 r 的函数；在数学里可以概括起来为 $y=kx$，x 可以代表 t 或 r，y 可以代表 s 或 c，而 k 则表示常量 v_0 或 2π。

§5. 坐标系和函数的图象

在代数学中讲过，由相交于原点 O，有一定的长度单位和方向的两条互相垂直的轴 OX 和 OY，构成平面直角坐标系。$X'X$