国家级示范性高等院校精品规划教材

线性代数

XIAN XING DAI SHU

GUOJIAJI SHIFANXING GAODENGYUANXIAO
JINGPIN GUIHUA JIAOCAI

主编/张甜 叶提芳 阚兴莉

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

国家级示范性高等院校精品规划教材

线性代数

主　编　张　甜　叶提芳　阚兴莉
副主编　马提宝　王　慧　王玉霞

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

本书根据作者多年的教学实践与研究经验编写而成．全书共有6章，包括行列式、矩阵、向量组的线性相关性、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型．为便于自学与复习，每章配有本章小结，每节配有相应习题，每章末配有复习题及历年考研真题，书末附有参考答案和提示．

本书可作为经管类、工科类专业的教材，也可作为其他专业的参考用书．

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/张甜，叶提芳，阚兴莉主编. —天津：天津大学出版社，2011.8

国家级示范性高等院校精品规划教材

ISBN 978-7-5618-4051-1

Ⅰ.①线…　Ⅱ.①张…②叶…③阚…　Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材　Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第149794号

出版发行　天津大学出版社
出 版 人　杨欢
地　　址　天津市卫津路92号天津大学内(邮编:300072)
电　　话　发行部:022—27403647　邮购部:022—27402742
网　　址　www.tjup.com
印　　刷　廊坊市长虹印刷有限公司
经　　销　全国各地新华书店
开　　本　185mm×260mm
印　　张　8
字　　数　200千
版　　次　2011年8月第1版
印　　次　2011年8月第1次
定　　价　18.00元

前　　言

线性代数是经管类本科、理工科本科及专科学生的一门重要的公共必修课．本教材是编者以同济大学《线性代数》教材为基础，结合自己从事线性代数的教学与研究经验编写而成的．

本书在编写上力求内容适当、结构合理、条理清晰，文字叙述力求简明扼要、深入浅出．本书具有以下特点．

(1) 突出基本概念、定理和方法．引用具体例子来阐述重要的概念、定理和方法．每节配有适当的例题，帮助学生掌握和理解本节内容．

(2) 每章均有内容小结．使学生能理清本章的主要内容，抓住要点．

(3) 练习题层次分明．每章中的每一小节均有习题，便于学生复习和巩固该节的主要内容．每章末有复习题和考研真题，可以作为本章的内容测验，考研真题是供学有余力及准备考研的同学选做，让学生知道考研的题型和难度．

本书共分6章，内容包括了行列式、矩阵、向量组的线性相关性、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型．本书适用于40学时左右的线性代数教学．

本书的第1、2、6章由湖北工业大学商贸学院的张甜老师编写，第3、4章由湖北工业大学商贸学院的阙兴莉老师编写，第5章由武汉工业学院工商学院的叶提芳老师编写．马提宝、王慧和王玉霞老师参与了部分习题的编写及校对工作．全书由张甜老师统稿和修订．

限于作者的水平，书中错漏之处在所难免，恳请读者批评指正．

编者

2011年7月

目　　录

第1章 行 列 式

1.1 行列式的定义

一 二阶与三阶行列式

讨论二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

使用加减消元法，当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，方程组(1.1)的唯一解为

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},\ x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.2}$$

为了方便记忆，引入记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{1.3}$$

式(1.3)称为二阶行列式．其中横排叫行，竖排叫列．数 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 称为行列式的元素，其中元素的第一个下标表示该元素所在的行，第二个下标表示该元素所在的列．

二阶行列式的定义可用“对角线法则”来记忆．可看成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

即实线连接的元素构成的对角线（称为主对角线）上两个元素的乘积减去虚线连接的元素构成的对角线（称为副对角线）上两个元素的乘积．

例如，

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \times 2 - 3 \times 4 = -2.$$

若记

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - b_2 a_{12},\ D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1,$$

则方程组(1.1)的解可写成

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\ x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{1.4}$$

仿照二阶行列式的定义，引入三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}. \tag{1.5}$$

上述三阶行列式的定义,也可用对角线法则记忆.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

三条实线看做平行于主对角线的连线,三条虚线看做平行于副对角线的连线,实线上三元素的乘积减去虚线上三元素的乘积得到三阶行列式的值.

例如,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=1\times1\times1+1\times1\times3+2\times2\times(-1)-3\times1\times(-1)-1\times2\times1-1\times2\times1=-1.$$

二　排列、逆序与对换

定义 1.1　由 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个无重复的有序数组 $i_1i_2\cdots i_n$,称为一个 n 级排列.

例如,1234 和 2341 都是 4 级排列,而 32451 是一个 5 级排列.

定义 1.2　在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$ 中,若较大的数 i_t 排在较小的数 i_s 前面($i_t>i_s$),则称 i_t 与 i_s 构成一个逆序. 一个排列中所有逆序的总数,称为该排列的逆序数,记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

例如,排列 24315 中 21,43,41,31 是逆序,共 4 个,故 $\tau(24315)=4$.

定义 1.3　一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中,若其逆序数 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$ 为奇数,则称它为奇排列;若其逆序数 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$ 为偶数,则称它为偶排列.

例如,2431 是偶排列,43251 是奇排列.

定义 1.4　一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$ 中,任选两数互换位置,其余的数的位置不变,称为一次对换. 相邻两数对换称为邻换.

定理 1.1　一次对换改变排列的奇偶性.

三　n 阶行列式

定义 1.5　由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 构成

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式，记做

$$D=\det(a_{ij})=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 为 $1,2,\cdots,n$ 的一个 n 级排列．

注 (1) n 级排列总数有 $n!$ 个，行列式展开共有 $n!$ 项；

(2) 每项必须是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积；

(3) 每项符号由 n 个元素的列指标组成排列的奇偶性决定，奇取负，偶取正．

例 1.1 利用行列式的定义计算

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}.$$

解 三阶行列式展开式为 $3!=6$ 项，由于每一项的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 中只要有一个元素为零乘积即为零，因此从含零元素最多的第 3 行开始分析．$a_{33}\neq 0$，则 $j_3=3$，第 2 行只能取 $j_2=2$. 第 1 行只能取 $j_1=1$. 即行列式中不为零的项只能是 $a_{11}a_{22}a_{33}(-1)^{\tau(1,2,3)}$. 故

$$D=(-1)^{\tau(1,2,3)}a_{11}a_{22}a_{33}=a_{11}a_{22}a_{33}.$$

可用对角线法则验证结果的正确性．

定义 1.6 行列式中主对角线下方元素均为零的行列式称为上三角行列式．

n 阶上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

定义 1.7 行列式中主对角线上方元素均为零的行列式称为下三角行列式．

n 阶下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

定义 1.8 非主对角线元均为零的行列式称为对角行列式．

n 阶对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

习 题 1.1

1. 求下列排列的逆序数:

(1)4 1 3 2 ;　　(2)5 1 6 4 3 2 7 ;

(3)1 3 ⋯ (2n−1) 2 4 ⋯ (2n);　　(4)1 3 ⋯ (2n−1) (2n) (2n−2) ⋯ 2.

2. 计算行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$;　　(4) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$.

3. 在四阶行列式中:

(1)写出所有含 $a_{12}a_{33}a_{41}$ 的项;

(2)写出所有含 $a_{23}a_{31}$ 的项;

(3)写出所有含 a_{43} 且带有负号的项.

4. 用定义计算行列式的值:

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$.

1.2 行列式的性质

用行列式的定义计算行列式往往较为复杂,因而有必要进一步研究行列式的性质,利用其性质将复杂行列式化为简单行列式计算.

性质 1 行列互换,行列式不变.

性质 2 两行(列)互换,行列式变号.

证明 设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ (\text{第 } i \text{ 行}) \\ \\ (\text{第 } k \text{ 行}) \\ \\ \\ \end{array}.$$

互换 D 中第 i 行与第 j 行对应元素,得

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

由行列式的定义及定理1.1得

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_k \cdots j_i \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{kj_k} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_i \cdots j_k \cdots j_n)+1} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{kj_k} \cdots a_{nj_n} \\ &= -\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{kj_k} \cdots a_{nj_n} \\ &= -D. \end{aligned}$$

推论　两行(列)相同,行列式为零.

证明　由性质2知,将这两行互换,有 $D=-D$,则 $D=0$.

性质3　数乘行列式中的某一行(列)等于该数乘以行列式,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

推论1　行列式中某一行(列)所有元素的公因数可提到行列式符号的外面.

推论2　行列式中一行(列)元素均为零,行列式为零.

推论3　行列式中两行(列)成比例,行列式为零.

性质4　行列式中某一行(列)的元素均拆成两个数的和,行列式等于两个行列式的和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

例如,

$$\begin{vmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & y \\ c & w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & b \\ z & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix}.$$

性质5　行列式中某一行(列)的元素同乘以数 k 加到另一行(列),行列式不变,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

例 1.2 计算

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & 7 \\ 3 & -6 & 9 \end{vmatrix}.$$

解 行列式中第一行与第三行对应成比例,由性质 4 知 $D=0$.

例 1.3 计算

$$D=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

解 $$D \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_1]{r_3+r_1} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4+2r_2]{r_3+r_2} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4-\frac{1}{2}r_3} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=-1\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot 1=-2.$$

例 1.4 计算

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 9 & 98 & -4 \\ 2 & -8 & 203 & 6 \\ 3 & 7 & 301 & 2 \\ 4 & 6 & 399 & -2 \end{vmatrix}.$$

解

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 9 & 100-2 & -4 \\ 2 & -8 & 200+3 & 6 \\ 3 & 7 & 300+1 & 2 \\ 4 & 6 & 400-1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 100 & -4 \\ 2 & -8 & 200 & 6 \\ 3 & 7 & 300 & 2 \\ 4 & 6 & 400 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 9 & -2 & -4 \\ 2 & -8 & 3 & 6 \\ 3 & 7 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & -1 & -2 \end{vmatrix},$$

第一个行列式中第 1 列与第 3 列对应成比例,由性质 4 知该行列式为 0. 第二个行列式中第 3 列与第 4 列对应成比例,同理其行列式的值为 0. 故 $D=0$.

例 1.5 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

解 行列式中各行元素之和均为 $a+(n-1)b$,则

$$D=\begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_n - r_1]{\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_1\\ \cdots}}[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

习 题 1.2

1. 计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 34215 & 35215 \\ 28092 & 29092 \end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & 7 \\ -7 & 14 & 5 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n \end{vmatrix}$.

2. 证明:

(1) $\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix}=0$;

(2) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix}=4(b-a)(c-a)(b-c)$.

1.3 行列式的展开定理

一般地,计算高阶行列式可转化为计算低阶行列式,使计算得以简化. 因此,引入余子式和代数余子式的概念.

定义 1.9 在 n 阶行列式中,划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列的元素,余下的 $(n-1)$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式,记为 M_{ij}. 令 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$,称 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式.

例如，

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},$$

元素 a_{11} 的余子式和代数余子式分别为

$$M_{11}=\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\ A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=M_{11},$$

元素 a_{23} 的余子式和代数余子式分别为

$$M_{23}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix},\ A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}=-M_{23}.$$

注 $i+j$ 为奇数时，$A_{ij}=-M_{ij}$；$i+j$ 为偶数时，$A_{ij}=M_{ij}$.

定理 1.2 n 阶行列式 D 中，若第 i 行(列)中除 a_{ij} 外其余元素均为零，则行列式的值等于 a_{ij} 与它的代数余子式的乘积，即 $D=a_{ij}A_{ij}$.

证明 (1)若 a_{ij} 位于第 1 行第 1 列，则

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & 0 & \cdots & 0\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

根据行列式的定义，

$$\begin{aligned}D&=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}\sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}\\&=\sum_{j_1=1}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}+\sum_{j_1\neq 1}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.\end{aligned}$$

当 $j\neq 1$ 时，$a_{1j_1}=0$. 故

$$\sum_{j_1\neq 1}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=0.$$

则有

$$\begin{aligned}D&=\sum_{j_1=1}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}\\&=a_{11}\sum_{j_2j_3\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_2j_3\cdots j_n)}a_{2j_2}a_{3j_3}\cdots a_{nj_n}\\&=a_{11}\cdot(-1)^{1+1}M_{11}\\&=a_{11}A_{11}.\end{aligned}$$

(2)若 a_{ij} 不在第 1 行第 1 列，则

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

将 D 的第 i 行依次与第 $i-1$ 行，第 $i-2$ 行，…，第 1 行交换，交换次数为 $(i-1)$ 次，再将第 j 列依次与第 $j-1$ 列，第 $j-2$ 列，…，第 1 列交换，交换次数为 $(j-1)$ 次，共进行了 $(i+j-2)$ 次

交换，得新的 n 阶行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

利用(1)的结果，$D_1=a_{ij}M_{ij}$. 由行列式的性质2，得

$$D=(-1)^{i+j-2}D_1=(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}=a_{ij}A_{ij}.$$

定理 1.3 行列式的值等于它任一行(列)的所有元素分别与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}(i=1,2,\cdots,n)$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}(j=1,2,\cdots,n).$$

推论 行列式中任一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\ i\neq j.$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0,\ i\neq j.$$

上述定理与推论称为行列式的展开定理.

由行列式的展开式定理可得到代数余子式的性质：

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}D,\ i=j,\\0,\ i\neq j.\end{cases}$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases}D,\ i=j,\\0,\ i\neq j.\end{cases}$$

可以利用定理1.3计算一些简单的行列式.

例 1.6 计算

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

解 将 D 按第1行展开，得

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13},$$

其中

$$a_{11}=1,\ a_{12}=-1,\ a_{13}=2,$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=-2,$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=8.$$

故

$$D=1\times(-2)+(-1)\times(-1)+2\times 8=15.$$

例 1.7 证明范德蒙德(Vandermonde)行列式.

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&\cdots&x_n\\x_1^2&x_2^2&\cdots&x_n^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i-x_j),$$

其中,“$\prod$”表示全体同类因子的乘积.

证明 用数学归纳法证明.

$$D_2=\begin{vmatrix}1&1\\x_1&x_2\end{vmatrix}=x_2-x_1=\prod_{2\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i-x_j),$$

所以当 $n=2$ 时,公式成立.

假设公式对 $(n-1)$ 阶范德蒙德行列式成立,需证公式对 n 阶范德蒙德行列式也成立.

$$D_n\xlongequal[\substack{r_{n-1}-x_1r_{n-2}\\ \cdots\cdots\\ r_2-x_1r_1}]{r_n-x_1r_{n-1}}\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&x_2-x_1&x_3-x_1&\cdots&x_n-x_1\\0&x_2(x_2-x_1)&x_3(x_3-x_1)&\cdots&x_n(x_n-x_1)\\\vdots&&&&\\0&x_2^{n-2}(x_2-x_1)&x_3^{n-2}(x_3-x_1)&\cdots&x_n^{n-2}(x_n-x_1)\end{vmatrix},$$

按第 1 列展开,将每列公因子提出,得

$$D_n=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_2&x_3&\cdots&x_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_2^{n-2}&x_3^{n-2}&\cdots&x_n^{n-2}\end{vmatrix},$$

即

$$\begin{aligned}D_n&=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\cdot D_{n-1}\\&=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\cdot\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 2}(x_i-x_j)\\&=\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i-x_j).\end{aligned}$$

由上例公式可直接计算下列行列式的值:

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&3&4&5\\2^2&3^2&4^2&5^2\\2^3&3^3&4^3&5^3\end{vmatrix}=(3-2)(4-2)(5-2)(4-3)(5-3)(5-4)=12.$$

习 题 1.3

1. 求

$$D=\begin{vmatrix}-3&0&2\\4&0&1\\2&-2&1\end{vmatrix}$$

中元素 a_{32}, a_{23} 的余子式和代数余子式.

2. 已知某四阶行列式中第 3 列元素依次为 $-1,0,1,2$,它们的余子式依次为 $5,4,-2,3$,

求行列式的值.

3. 设四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ c & b & d & a \\ d & b & c & a \\ a & b & d & c \end{vmatrix},$$

求 $A_{14}+A_{24}+A_{34}+A_{44}$,其中 A_{i4} 为元素 a_{i4} 的代数余子式($i=1,2,3,4$).

1.4 行列式的计算

一 降阶法

计算行列式时,可先根据行列式的性质将行列式中某一行(列)化为仅含一个非零元素,再按行列式的展开定理进行展开,可变为低一阶的行列式. 依次进行下去,可化为二阶行列式进行计算.

例 1.8 计算

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

解

$$D\xlongequal[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\ r_3-2r_1}}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & -5 & -7 & -8 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \end{vmatrix}\xlongequal[r_4+2r_2\times(-1)]{r_3+5r_2\times(-1)}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+r_3\times\left(-\frac{1}{7}\right)}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}=1\times(-1)\times(-7)\times3=21.$$

二 加边法

例 1.9 计算

$$D=\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x_2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x_3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x_4 \end{vmatrix},\text{其中 } x_i\neq0, i=1,2,3,4.$$

解

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1+x_1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1+x_2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1+x_3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1+x_4 \end{vmatrix}\xlongequal[\substack{r_4-r_1\\ r_5-r_1}]{\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_1}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x_1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & x_2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & x_3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & x_4 \end{vmatrix}$$