

高等数学

学习指导与习题解答

马少军 主编

中国海洋大学出版社

GAODENGSHUXUE
XUEXI ZHIDAO YU XITI JIEDA

**高等数学
学习指导与习题解答**

主编 马少军

中国海洋大学出版社
• 青岛 •

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导与习题解答/马少军主编. —青
岛:中国海洋大学出版社,2003.9
ISBN 7-81067-505-2

I. 高… II. 马… III. 高等数学—高等学校—教
学参考资料 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 075006 号

中国海洋大学出版社出版发行
(青岛市鱼山路 5 号 邮政编码:266003)

出版人:王曙光

日照报业印刷有限公司印刷

新华书店经销

开本:787mm×960mm 1/16 印张:24.625 字数:425 千字

2003 年 9 月第 1 版 2003 年 9 月第 1 次印刷

印数:1—5 000

定价:32.00 元

《高等数学学习指导与习题解答》

编写组

主 编 马少军

副主编 孙丹娜 刘桂阳 姜德民 孙宝山

袁冬梅 张好治 黄凯美 李仁杰

参 编 王忠锐 徐义田 李冬梅 田贵贤

孙守霞 刘 伟 崔淑玉 李希亮

郭 迎 王 健 张化一

主 审 崔文善

前 言

《高等数学学习指导与习题解答》是与中国农业出版社出版的“十五”规划教材《高等数学》(马少军主编)相配套的辅导教材,是编者多年来教学经验的总结。本书不仅适用于高等农业院校,也可作为林、水、医等专业的学生学习《高等数学》的指导书,还可作为报考农业院校硕士研究生入学考试的复习参考书。

本书的内容有:① 基本内容:列出了各章的基本理论知识和常用的计算公式;② 基本要求:指出各章中每一部分内容应该掌握到什么程度,便于读者在复习时合理分配力量;③ 习题解答:对《高等数学》的每一习题都作了全面详细的解答。总之,本书内容丰富,解答明确,启发性强,只要认真学习,既能巩固所学的基本理论知识,又能有效地提高运算能力和技巧,还可以提高读者分析问题和解决问题的能力。

本书在编写过程中得到很多同行专家的关心和支持,在此表示衷心的感谢。

由于编者水平所限,再加上时间仓促,书中难免存在不妥之处,敬请读者批评指正。

编 者

2003 年 5 月

目 录

第一章 函数与极限	(1)
一、基本内容	(1)
二、基本要求	(5)
三、习题解答	(6)
习题 1-1	(6)
习题 1-2	(10)
习题 1-3	(13)
习题 1-4	(17)
习题 1-5	(19)
习题 1-6	(20)
习题 1-7	(22)
第二章 导数与微分	(27)
一、基本内容	(27)
二、基本要求	(30)
三、习题解答	(30)
习题 2-1	(30)
习题 2-2	(35)
习题 2-3	(37)
习题 2-4	(40)
习题 2-5	(44)
习题 2-6	(47)
习题 2-7	(51)
第三章 中值定理与导数的应用	(57)
一、基本内容	(57)

二、基本要求	(62)
三、习题解答	(62)
习题 3-1	(62)
习题 3-2	(65)
习题 3-3	(68)
习题 3-4	(71)
习题 3-5	(74)
习题 3-6	(76)
习题 3-7	(80)
习题 3-8	(82)
习题 3-9	(89)
第四章 不定积分	(91)
一、基本内容	(91)
二、基本要求	(95)
三、习题解答	(95)
习题 4-1	(95)
习题 4-2	(97)
习题 4-3	(108)
习题 4-4	(115)
习题 4-5	(140)
第五章 定积分	(145)
一、基本内容	(145)
二、基本要求	(150)
三、习题解答	(150)
习题 5-1	(150)
习题 5-2	(151)
习题 5-3	(154)
习题 5-4	(158)

第六章 定积分的应用	(165)
一、基本内容	(165)
二、基本要求	(165)
三、习题解答	(165)
习题 6-1	(165)
习题 6-2	(170)
习题 6-3	(172)
习题 6-4	(174)
习题 6-5	(181)
第七章 空间解析几何与向量代数	(183)
一、基本内容	(183)
二、基本要求	(190)
三、习题解答	(190)
习题 7-1	(190)
习题 7-2	(192)
习题 7-3	(194)
习题 7-4	(196)
习题 7-5	(199)
习题 7-6	(202)
第八章 多元函数微分学	(205)
一、基本内容	(205)
二、基本要求	(210)
三、习题解答	(210)
习题 8-1	(210)
习题 8-2	(213)
习题 8-3	(218)
习题 8-4	(223)
习题 8-5	(226)

习题 8-6	(233)
选做题.....	(236)
第九章 多元函数积分学.....	(245)
一、基本内容	(245)
二、基本要求	(251)
三、习题解答	(251)
习题 9-1	(251)
习题 9-2	(253)
习题 9-3	(264)
习题 9-4	(265)
选做题.....	(268)
习题 9-5	(273)
习题 9-6	(278)
习题 9-7	(288)
第十章 微分方程.....	(293)
一、基本内容	(293)
二、基本要求	(296)
三、习题解答	(296)
习题 10-1	(296)
习题 10-2	(304)
习题 10-3	(307)
第十一章 级数.....	(311)
一、基本内容	(311)
二、基本要求	(316)
三、习题解答	(316)
习题 11-1	(316)
习题 11-2	(318)
习题 11-3	(320)

习题 11-4	(322)
习题 11-5	(324)
习题 11-6	(328)
习题 11-7	(332)
习题 11-8	(336)
附录 综合测试题与解答	(340)
综合测试题一	(340)
综合测试题二	(343)
综合测试题三	(346)
综合测试题四	(349)
综合测试题五	(352)
综合测试题六	(355)
综合测试题一解答	(357)
综合测试题二解答	(362)
综合测试题三解答	(365)
综合测试题四解答	(370)
综合测试题五解答	(374)
综合测试题六解答	(378)

第一章 函数与极限

一、基本内容

1. 函数的定义

如果有一个确定的对应规律 f , 使得对于 D 中的每一个实数 x , 都有一个惟一确定的实数 y 与之对应, 则称 y 是 x 的函数, 记为 $y = f(x)$. 其中 D 为函数的定义域, x 称为自变量, y 的取值范围称为函数的值域, y 称为因变量.

2. 函数的表示法

列表法、公式法与图解法是三种常用的函数表示法.

分段函数: 在公式法中, 当对应法则可以用两个或几个式子表示时, 就称分段函数.

3. 函数的几个特性

(1) 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上有定义, 如果存在一个正数 M , 使得对于 (a, b) 内的一切 x 都有 $|f(x)| \leq M$, 则称函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内是有界的, 否则称为无界.

(2) 函数的单调性

如果函数 $f(x)$ 对于区间 (a, b) 内的任意两点 x_1 及 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) < f(x_2)$ (或 $f(x_1) > f(x_2)$), 则称函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内是单调增加 (或单调减少) 的.

(3) 函数的奇偶性

如果函数 $f(x)$ 对于定义域内 D (D 关于原点对称) 的任意 x , 都满足 $f(-x) = f(x)$, 则 $f(x)$ 叫做偶函数; 如果函数 $f(x)$ 对于定义域 D 内的任意 x , 都满足 $f(-x) = -f(x)$, 则 $f(x)$ 叫奇函数.

(4) 函数的周期性

对于函数 $f(x)$, 如果存在一个不为零的数 l , 使对于定义域内的任何 x , 都有 $f(x+l) = f(x)$ 成立, 则称 $f(x)$ 为周期函数, 使等式成立的最小正数 l 为 $f(x)$ 的周期.

4. 反函数与复合函数

(1) 反函数

设 y 是 x 的函数 $y = f(x)$, 如果把 y 当作自变量, x 当作函数, 则由关系式 $y = f(x)$ 所确定的函数 $x = f^{-1}(y)$, 称为函数 $y = f(x)$ 的反函数, 习惯记为 $y = f^{-1}(x)$.

(2) 复合函数

如果 y 是 u 的函数: $y = f(u)$, 而 u 又是 x 的函数: $u = \varphi(x)$ 且 $\varphi(x)$ 的函数值的全部或部分在 $f(u)$ 的定义域中, 那么, y 通过 u 的联系也成了 x 的函数, 我们称后一个函数是由函数 $y = f(u)$ 及 $u = \varphi(x)$ 复合而成的函数, 简称复合函数, 记为 $y = f[\varphi(x)]$, 其中 u 叫做中间变量.

5. 基本初等函数

基本初等函数是指:

- (1) 常数函数 $y = C$;
- (2) 幂函数 $y = x^\mu$ (μ 为实数);
- (3) 指数函数 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$);
- (4) 对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$);
- (5) 三角函数 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x, y = \sec x, y = \csc x$;
- (6) 反三角函数 $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x$
 $y = \operatorname{arccot} x, y = \operatorname{arcsec} x, y = \operatorname{arccsc} x$.

6. 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合而构成的, 并可用一个式子表示的函数.

7. 数列的极限定义

设 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ 是一个数列(以后简记为 $\{x_n\}$), a 为一常数. 如果对于任意给定的正数 ϵ , 总有自然数 N 存在, 使得当 $n > N$ 时, 不等式 $|x_n - a| < \epsilon$ 总成立, 则称数列 $\{x_n\}$ 以常数 a 为极限, 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 或 $x_n \rightarrow a$ ($n \rightarrow \infty$). 若数列 $\{x_n\}$ 以 a 为极限, 我们便说数列 $\{x_n\}$ 是收敛的, 且收敛于 a ; 否则, 就说它是发散的.

8. 函数的极限

设函数 $f(x)$ 在 x_0 点的某个邻域内有定义(x_0 可除外) 如果对于任意给定的正数 ϵ (不论它多么小), 总存在正数 δ , 使得对于适合不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ 的一切 x , 对应函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x) - A| < \epsilon$, 那么常数 A 就称为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0)$$

设函数 $f(x)$ 对绝对值无论怎样大的 x 都有定义, 如果对于任意给定的正数 ϵ , 总存在正数 X , 使得对于适合不等式 $|x| > X$ 的一切 x , 所对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x) - A| < \epsilon$, 那么常数 A 就称为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (x \rightarrow \infty)$$

类似地可以定义当 $x \rightarrow +\infty$ 和 $x \rightarrow -\infty$ 时函数的极限: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 和 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$.

9. 无穷小与无穷大

(1) 定义

如果对于任意给定的正数 ϵ , 总存在正数 δ (或正数 X), 使得对于适合不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ (或 $|x| > X$) 的一切 x , 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)| < \epsilon$, 那么就称函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的无穷小.

如果对于任意给定的正数 M , 总存在正数 δ (或正数 X), 使得对于适合不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ (或 $|x| > X$) 的一切 x , 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)| > M$, 那么就称函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时为无穷大.

(2) 无穷小与无穷大的关系

若 $f(x)$ 为无穷大, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小; 若 $f(x)$ 为无穷小, $f(x) \neq 0$, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

10. 极限的运算法则及判别准则

(1) 有关无穷小的运算法则

- ① 有限个无穷小的和是无穷小;
- ② 有界函数与无穷小的积是无穷小;
- ③ 有限个无穷小的积是无穷小.

(2) 极限的四则运算法则

若 $\lim f(x) = A$ $\lim g(x) = B$, 则

- ① $\lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$
- ② $\lim [f(x)g(x)] = \lim f(x) \lim g(x) = AB$
- ③ $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B} (B \neq 0)$

(3) 极限存在判别法

- ① 单调有界函数必有极限;
- ② 若 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ 且 $\lim g(x) = \lim h(x) = A$, 则 $\lim f(x) = A$;

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A.$$

(4) 两个重要极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

11. 无穷小的阶

① 定义 设 α 及 β 是同一变化过程中的两个无穷小.

若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 则称 β 是比 α 高阶的无穷小 记 $\beta = o(\alpha)$;

若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$, 则称 β 是比 α 低阶的无穷小;

若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = C \neq 0$, 则称 β 是与 α 同阶的无穷小;

若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$, 则称 β 是与 α 等价的无穷小, 记作 $\alpha \sim \beta$.

② 等价无穷小定理

设 $\alpha \sim \alpha'$, $\beta \sim \beta'$ 且 $\frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在, 则 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$

12. 连续性定义

(1) 连续性定义

设函数 $f(x)$ 在 x_0 点的某一邻域内有定义, 如果对于任意给定正数 ϵ (无论多小), 总存在正数 δ , 使得对于适合不等式 $|x - x_0| < \delta$ 的一切 x , 所对应的函数值 $f(x)$ 都满足 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续.

连续定义的另一种极限形式为:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$$

由连续的定义可知, 它是和下述三条等价的:

① 函数 $f(x)$ 在 x_0 点某邻域内有定义;

② 极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在;

③ 该极限值为 $f(x_0)$.

(2) 间断点的定义及分类

不满足连续定义, 即不满足与连续定义等价的三条中任何一条的点, 就称为函数的间断点.

若在 $f(x)$ 的间断点 x_0 处存在 $f(x_0 - 0)$ 及 $f(x_0 + 0)$, 则称 x_0 为第一类间断点, 特别地, 若 $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, 则称 x_0 为可去间断点. 不属于第一

类的间断点称为第二类间断点.

(3) 连续函数的性质

① 若 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续, 则

$$f(x) \pm g(x), f(x)g(x), \frac{f(x)}{g(x)} (g(x_0) \neq 0),$$

在 $x = x_0$ 处连续.

② 若 $y = f(x)$ 在某区间上单调且连续, 则其反函数 $x = \varphi(y)$ 在相应区间上也单调连续.

③ 若 $y = f(u)$ 在 u_0 处连续, $u = \varphi(x)$ 在 x_0 处连续且 $u_0 = \varphi(x_0)$, 则 $f[\varphi(x)]$ 在 x_0 处连续.

基本初等函数在其定义域上是连续的; 初等函数在其定义区间上是连续的.

④ 闭区间上连续函数的基本性质.

最值定理: 闭区间上连续函数一定有最大值和最小值.

介值定理: 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, C 是 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任何一个数 ($f(a) \neq f(b)$), 则在 (a, b) 内至少有一点 ξ , 使 $f(\xi) = C$ ($a < \xi < b$); 特别地, 若 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 则在 (a, b) 内至少有一点 ξ , 使 $f(\xi) = 0$.

二、基本要求

(1) 理解函数的概念, 掌握函数的定义域和对应法则: 两个要素.

(2) 掌握函数的单调性、有界性、奇偶性及周期性.

(3) 理解反函数、复合函数与分段函数的概念, 能熟练地分析复合函数的分解与复合过程.

(4) 熟练掌握基本初等函数的定义、性质及其图形.

(5) 理解数列极限和函数极限定义, 能准确地用“ $\epsilon - N$ ”, “ $\epsilon - \delta$ ”语言叙述极限定义, 并对一些简单极限存在性问题给予证明.

(6) 理解左、右极限的概念, 举例说明函数极限不存在的情形, 同时给出几何解释.

(7) 理解无穷小量的概念, 证明无穷小量的运算法则及函数极限与无穷小量关系的定理.

(8) 能正确应用极限运算法则.

(9) 了解两个极限准则, 熟练地掌握利用两个重要极限求极限的方法.

(10) 理解函数在一点连续与间断的概念, 会判别函数的连续性及间断点的类型.

(11) 正确理解闭区间上连续函数的性质,能给出直观的几何解释.

三、习题解答

习题 1-1

$$1. f(x) = |1 + x| + \frac{(7-x)(x-1)}{|2x-5|}, \text{求 } f(-2).$$

$$\text{解 } f(-2) = |1 - 2| + \frac{(7+2)(-2-1)}{|2 \times (-2) - 5|} = -2$$

$$2. f(x) = \sqrt{4-x^2}, \text{求下列函数值.}$$

$$f(0), f(1), f(-1), f\left(\frac{1}{a}\right), f(x_0), f(x+h).$$

$$\text{解 } f(0) = \sqrt{4-0} = 2;$$

$$f(1) = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}; f(-1) = \sqrt{4-1} = \sqrt{3};$$

$$f\left(\frac{1}{a}\right) = \sqrt{4 - \left(\frac{1}{a}\right)^2} = \sqrt{4 - \frac{1}{a^2}};$$

$$f(x_0) = \sqrt{4-x_0^2};$$

$$f(x+h) = \sqrt{4-(x+h)^2} = \sqrt{4-(x^2+2xh+h^2)}$$

3. 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \sqrt{3x+2}$$

$$(2) y = \frac{1}{1-x}$$

$$(3) y = \ln(x-2)$$

$$(4) y = \frac{1}{\lg|x-5|}$$

$$(5) y = \sqrt{x^2-4}$$

$$(6) y = \frac{1}{1+x^2-2x} + \sqrt{x+2}$$

$$(7) y = \frac{\sqrt{4-x}}{\ln(x-1)}$$

$$(8) y = \frac{2x}{x^2-3x+2}$$

$$\text{解 } (1) y = \sqrt{3x+2}$$

要使函数有意义须 $3x+2 \geq 0$, 即 $x \geq -\frac{2}{3}$.

$\therefore$ 函数的定义域为 $\left[-\frac{2}{3}, +\infty\right)$

$$(2) y = \frac{1}{1-x}$$

要使函数有意义,须 $1-x \neq 0$, 即 $x \neq 1$

$\therefore$ 函数的定义域为 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

$$(3) y = \ln(x-2)$$

要使函数有意义须 $x-2 > 0$, 即 $x > 2$

$\therefore$ 函数的定义域为 $(2, +\infty)$.

$$(4) y = \frac{1}{\lg |x-5|}$$

要使函数有意义须 $\begin{cases} |x-5| > 0 \\ \lg |x-5| \neq 0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x \neq 5 \\ |x-5| \neq 1 \end{cases}$

$$\therefore \begin{cases} x \neq 5 \\ x-5 \neq \pm 1 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} x \neq 5 \\ x \neq 6 \\ x \neq 4 \end{cases}$$

$\therefore$ 函数的定义域为 $(-\infty, 4) \cup (4, 5) \cup (5, 6) \cup (6, +\infty)$.

$$(5) y = \sqrt{x^2-4}$$

要使函数有意义须 $x^2-4 \geq 0$, $\therefore x \geq 2$ 或 $x \leq -2$

$\therefore$ 函数的定义域为 $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

$$(6) y = \frac{1}{1+x^2-2x} + \sqrt{x+2}$$

要使函数有意义须 $\begin{cases} 1+x^2-2x \neq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x \neq 1 \\ x \geq -2 \end{cases}$

$\therefore$ 函数的定义域为 $[-2, 1) \cup (1, +\infty)$.

$$(7) y = \frac{\sqrt{4-x}}{\ln(x-1)}$$

要使函数有意义须 $\begin{cases} 4-x \geq 0 \\ x-1 > 0 \\ \ln(x-1) \neq 0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} 1 < x \leq 4 \\ x-1 \neq 1 \end{cases}$

$$\therefore \begin{cases} 1 < x \leq 4 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

$\therefore$ 函数的定义域为 $(1, 2) \cup (2, 4]$.

$$(8) y = \frac{2x}{x^2-3x+2}$$

要使函数有意义须 $x^2-3x+2 \neq 0$ $\therefore x \neq 1, 2$

$\therefore$ 函数的定义域为 $(-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$.

4. 下列各题中函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同?为什么?