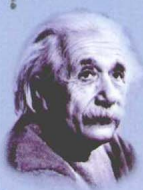
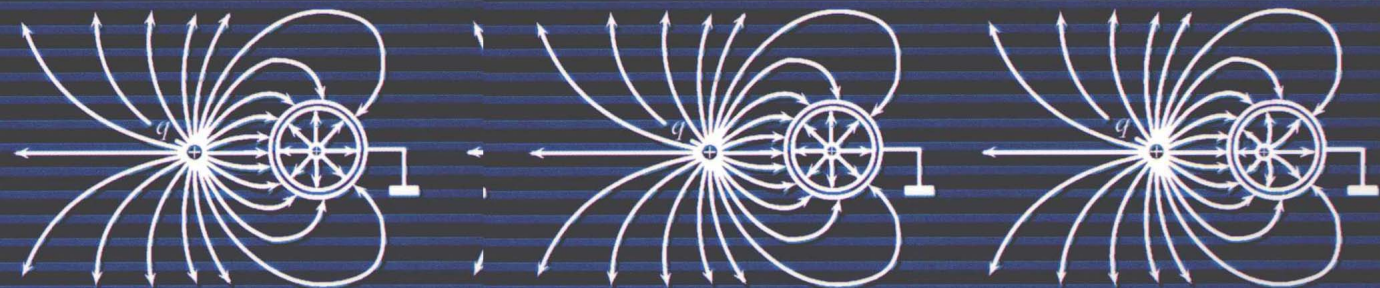


电磁场理论立体化教材

电 动 力 学 基 础



刘金寿 郑泰玉 仲海洋 编著



吉林人民出版社

内 容 简 介

为了实现信息技术与传统课程的整合,将现代教育技术和信息传媒手段引入教学中,为了更好地适应高校专业课程课时少和教学内容多的现实,东北师范大学、大连海事大学、大连大学三校的相关人员合作编著了内容精炼、图文并茂、网站辅助、课件配套的“电磁场理论”立体化教材。

这本《基础电动力学》从麦克斯韦方程出发,阐述了引入电势、求解静电场边值问题的几种方法,以及引入矢势、标势而分别求解静磁场的常规方法;讨论了无界自由空间、导体以及有界空间里电磁波的传播性质,论述了电磁波在介质界面、导体界面上的行为以及光的电磁本性,研究了电磁波的辐射及辐射能流的角分布,论述了电磁场的规范变换和规范不变性,论证了狭义相对论的时空属性、闵可夫斯基四维空间的物理量与电磁规律的四维协变形式,最终勾画了电磁场张量、电磁场变换以及麦克斯韦方程的相对论协变形式。

注重基础训练和物理思想的培育,提倡电学理论与磁学理论的平行对照,善用电场与磁场的对称、类比、归纳与总结,尝试教学内容的知识联想,实践现代教育技术和信息技术与课程的整合等,都是本立体化教材的特色。

本书配套的教学软件和教学网站(www.dltp.gov.cn/dccxy 登录密码购书获取)由大连大学沁苑工作室开发研制。

基础电动力学 JICHUDIANDONGLIXUE

编 著:刘金寿 郑泰玉 仲海洋

责任编辑:谷艳秋

封面设计:张帆 李光彦

图形制作:沁苑工作室

出版发行:吉林人民出版社(长春市人民大街 7548 号)

电 话:0431-5378036 邮政编码:130022

印 刷:吉林省商务彩印有限公司

开 本:787mm×1092mm 1/16

印 张:12 字 数:250 千字

标准书号:ISBN 7-206-03462-4/G·1381

版 次:2005 年 8 月第 1 版 印 次:2005 年 8 月第 1 次印刷

印 数:1-1500 册 定 价:22.60

如发现印装质量问题请与印刷部门联系调换

序 言

电动力学是研究电磁现象和电磁场运动规律以及电磁场与带电物质之间相互作用的基础理论。理科物理专业的“电动力学”课程,工科电讯、机电、无线电等专业的“电磁场理论”、“电磁波”等课程,大体都属于该学科的范围。

在物理学专业中,我们总体上将电动力学的教学分为两个层次。

第一个层次属于本科生的专业基础教育,以电磁场理论体系的主体框架为基础,以提高学生的专业基础素质为宗旨。教材相应内容应能够深入浅出、删繁就简地吸收经典教材的精华,较系统地讲解电磁场的基本知识、概念、规律和解决问题的基本方法,注重科学的思想观点和方法,适当介绍本学科的人文历史背景和前沿动向。这个层次是为专业基础素质教育服务的。

第二个层次则能够较系统深入地学习一些理论和专题内容,强化数学工具的应用能力和水平,提高、拓宽解决问题的技能,深入了解一些反映学科前沿或动向的新理论。这个层次是为本科生的进一步读研深造奠定基础的。

作者依据教学大纲和对学生的培养目标,结合综合大学及物理专业的实际,在多年的教学讲义、经验及资料积累的基础上,编著了这本与教学网站和多媒体课件配套的《基础电动力学》。该书“起点合理,内容规范,深入浅出,注重训练”。内容直接以电磁学总结出的麦克斯韦方程为起点,展开讨论了电磁场的边值关系、电磁势方程、电磁波的传播与辐射、狭义相对论基础以及电磁规律的相对论协变形式等问题。在编写中,注重基础知识和方法的训练,注重物理思想的理解,力求避免“臃肿、昂贵”的症结,注重基本的理论框架,突出知识的纲目结构而防止材料的堆积和面面俱到,杜绝膨胀增厚的趋向而适应实际课时的现实。防止违背教学规律和脱离学生实际的那种“内容偏深、习题偏难,结构偏旧,篇章过多”的倾向,配合有效的教学网站和多媒体课件,切实给学生提供一部“理论基础扎实、脉络结构清晰、训练方法明确、听课阅读方便、讲究实际效果”的立体化教材。

为了便于知识的归纳学习和记忆,作者在书中使用了一些词语,诸如电磁场的“三量三度”(方向导数、通量、环量,梯度、散度、旋度),麦克斯韦电磁理论框架的“四、三、二、一”(四个方程、三个关系、两个假设、一个预言)等言简意赅的提法,这对于教学活动和教学研究无疑是有益的。

在电磁学和电动力学的教学与课程建设中,我们尝试采取的一些教改措施和取得的一些教改成果,得到了广大学生的认可和同行业的嘉许。这些措施和成果分别是:

2001年,研制了涵盖本书内容的,含公式、图表、具有自动化组卷功能的“电动力学试题库软件”(属于“理论物理试题库”的分支);

2002年,研制了与本书配套的系列多媒体教学课件“电磁学”、“电动力学”;

2003年,建成了集电磁学和电动力学教学内容与教学环节为一体的,涵盖本书内容的多媒体教学网站“电磁场学苑”,该网站获得了第七届全国多媒体教育软件大奖赛优秀

奖,网站域名为 www.dlkp.gov.cn/dccxy。

2004年,总结多年的教学实践,归纳产生了SPSA课堂教学模式(即“精练的课堂讲授(speech)+有效的课件辅助(perform)+广泛的师生研讨(seminar)+丰富的知识联想(associate)”)的优秀教学成果;

2005年,为全国电动力学及电磁学教学研究会建设了可供电磁场理论行业人士开展网上研讨、论坛交流、资源下载的“全国电动力学教学研究会网站”(www.dlkp.gov.cn/dc-cyjh);

多年来发表的电磁场理论的教学与教材研究的论文,对电磁学、电动力学的教学和课程建设,无疑发挥了良好的作用,在这些论文中,有不少内容具有独到的见解。

上述教改措施和成果表明,我们自编的电磁场理论的教材“电磁学”、“电动力学”,以及为它们配套的学习指导书、数学工具书等,是富于成效的立体化教材。注重基础知识的训练和物理思想的培育,倡导电学理论与磁学理论的平行对照,善用电场与磁场的对称性进行知识的类比、归纳与总结,推行教学内容的纵、横向的知识联想,积极实践现代教育技术和信息技术与课程的整合,超越“黑板、粉笔、一言堂”的传统教学模式,努力实现“对话、联想式的SPSA课堂教学模式”等,是我们课程改革和教材建设的特点。

为了强化数学基础和提高教学效率,结合电磁场理论的实例,作者还编着了与本书配套的《矢量场论及张量知识》和辅助教材《电动力学学习题指导书》。在全套教材的编写中,我们充分注意到了衔接合理、结构紧凑和文字、语汇的统一。通过对一些数学结论与物理定理的统一诠释,揭示了不同课程的横向内在的联系。例如,数学中的高斯公式、斯托克斯公式与电磁场理论中的高斯定理、环路定理的统一性,数学的线积分、面积分与电、磁场的通量、环量的雷同性,……这样做不仅增强了数学基础,减弱了学习难度,保持了语言符号的统一性,还诱导了学生的知识联想和悖论思维,达到温故知新、举一反三的效果。

这本《基础电动力学》的讲义版在多次试用中曾经受到了学生的欢迎,因为它融入了作者多年从事电动力学、电磁学教学的经验、教训和累计的资料。在这次修订中,特别加强了基础训练,充实了基本的例题和习题,补充了一些专题内容,适当引入了科学事件的人文历史背景资料,舍弃了一些数学庞杂而又与理论框架无补的内容。

为了学习和查阅的方便,书后的“附录一、二、三”特别收录了作者编著的《矢量场论及张量知识》中的重要公式和结论。同时,考虑到双语教学和查阅文献资料的需要,“附录五”则收录了电磁场理论中常用的英汉对照术语500余条。

本立体化教材是东北师范大学、大连海事大学、大连大学三校合作的成果,错误与不当之处在所难免,欢迎广大同行及师生批评指导,也欢迎物理专业及其他理工科的相关课程使用和参考。

作者 2004.12.

目 录

第一章 麦克斯韦电磁理论的基本框架	1
§ 1 介质的电磁性质	1
1. 介质的分类 2. 介质的极化和磁化规律 3. 极化介质的 P 通量和磁化介质的 M 环量	
§ 2 麦克斯韦电磁理论的建立	4
1. 法拉第电磁感应定律与麦克斯韦对电磁理论的发展 2. 麦克斯韦的两个假说	
3. 麦克斯韦电磁理论框架的“4,3,2,1”	
§ 3 电磁场方程	8
1. 麦克斯韦方程的积分形式 2. 麦克斯韦方程的微分形式 3. 电场的散度和旋度	
4. 磁场的散度和旋度 5. 例题	
§ 4 电磁场的边值关系	13
1. 法向分量的边值关系 2. 切向分量的边值关系	
§ 5 电磁场的能量和能流	15
1. 电磁场的能量密度、能流密度(坡印廷矢量) 2. 电磁场的能量守恒定律	
3. 能量密度和能流密度公式的导出 4. 稳恒情况下电磁能的传输	
第一章小结	19
阅读资料 法拉第、麦克斯韦与电磁理论	20
习题	22
第二章 静电场	23
§ 1 静电场的势及其微分方程	23
1. 标势 φ_e 的引出及 φ_e 与 E 的关系 2. 电荷体系的电势	
3. 静电场的泊松方程和拉普拉斯方程 4. 势函数的边值关系 5. 例题	
§ 2 拉普拉斯方程 分离变量法	27
1. 拉普拉斯方程 $\nabla^2 \varphi = 0$ 的通解 2. 例题	
§ 3 唯一性定理	31
1. 静电场的唯一性定理 2. 例题	
§ 4 电像法	34
1. 电像法的实质及合理性 2. 例题	
§ 5 格林函数法	41
1. 用 δ 函数表述点电荷密度 2. 格林函数 3. 格林公式和静电场边值问题的求解公式	
4. 例题	
§ 6 静电场的能量	47
1. 线性介质中电场的能量和能量密度 2. 用 ρ 和 φ 表示的静电场能量	
3. 由 ρ 计算场能 W	
第二章小结	49
习题	51

第三章 静磁场	53
§ 1 磁场的矢势及其微分方程	53
1. 矢势及其微分方程的导出 2. 矢势的边值关系	
3. 比奥 - 萨伐尔定律的导出 4. 例题	
§ 2 磁场的标势及其微分方程	56
1. 磁标势的引入 2. 磁标势的微分方程 3. 磁标势的边值关系	
4. 标势法解静电场与标势法解静磁场的有关公式对照 5. 应用磁标势的例题	
§ 3 稳恒电流磁场的能量	62
1. 用 A 和 J 计算静磁场能量的公式 2. J 的磁场与外场间的相互作用能	
§ 4 电多极矩和磁多极矩	63
1. 电势的多极展开 2. 例题 3. 电荷体系在外电场中的能量 4. 矢势的多极展开	
* § 5 A-B 效应	69
* § 6 超导体的电磁性质	71
1. 超导体的基本电磁现象 2. 超导体的电磁性质方程 3. 超导体的完全抗磁性	
4. 超导环内的磁通量子化 5. 非局域理论 第一类和第二类超导体	
第三章小结	77
阅读资料 探索磁单极子的历程	80
习题	82
第四章 电磁波的传播	84
§ 1 真空与介质中的平面电磁波	84
1. 时变电磁场的波动方程 2. 亥姆霍兹方程的解 3. 平面单色电磁波在介质中的传播性质	
4. 电磁波的能量密度和能流密度 5. 例题	
§ 2 电磁波在介质界面上的反射和折射	93
1. 电磁波的反射定律和折射定律 2. 入射、反射、折射三波的振幅关系——菲涅耳公式	
3. 光的电磁理论的正确性	
§ 3 导体中电磁波的传播特性	97
1. 导体内自由电荷的分布 2. 导体内的电磁波 3. 导体内电磁波的传播性质	
4. 电磁波在导体表面上的反射 5. 例题	
* § 4 谐振腔	105
1. 有界空间中的电磁波 2. 理想导体的边界条件 3. 谐振腔	
* § 5 波导	109
1. 高频电磁能量的传输 2. 矩形波导中的电磁波	
3. 截止频率 4. TE_{10} 波的电磁场和管壁电流	
第四章小结	112
习题	116
第五章 电磁波的辐射	117
§ 1 时变电磁场的矢势和标势	117
1. 标势与矢势的引出 2. 规范变换和规范不变性 3. 真空中的达朗伯方程 4. 例题	
5. 对两种规范条件的讨论	
§ 2 推迟势	123
1. 标势 φ 2. 矢势 A 3. 推迟势 4. 由势计算场	
§ 3 偶极辐射	127

1. 矢势的一般展开式 2. 偶极辐射在远区的场 3. 辐射能流 辐射功率 角分布	
* 4. 天线知识简介 * 5. 偶极辐射矢势的两种表述及因子 e^{ikr} 的讨论 6. 例题	
第五章小结	136
习题	139
第六章 狭义相对论及电磁场的协变性	141
§ 1 狭义相对论的产生	141
1. 电磁学和伽利略的相对性原理 2. “以太”的否定	
§ 2 相对论的基本原理和洛伦兹变换	146
1. 相对论的基本原理 2. 间隔不变性 3. 洛伦兹变换	
§ 3 相对论的时空属性	151
1. 同时的相对性 2. 运动尺度缩短 3. 运动时钟延缓 4. 因果律对速度的限制	
5. 相对论的速度合成 6. 例题	
§ 4 对洛伦兹变换的检验	157
§ 5 闵可夫斯基四维空间与四维物理量	159
1. 相对性时空的四维表述 2. 四维时空的转动 3. 四维物理量按空间变换性质的分类	
§ 6 电动力学的相对论不变性	161
1. 物理规律的协变性 2. 几个电动力学规律的四维协变形式	
3. 电磁场张量与麦克斯韦方程组的四维协变形式 4. 例题	
第六章小结	166
阅读资料 爱因斯坦简介	170
习题	171
附录一 矢量运算	
附录二 并矢和张量	
附录三 梯度、散度和旋度	
附录四 重要物理常量	
附录五 电动力学常用术语	

第一章 麦克斯韦电磁理论的基本框架

电磁学从电场、磁场的基本原理和一些试验得出的定律出发,分别阐述了电场和磁场的高斯定理、环路定理,然后应运介质的电磁性质将它们从真空推广到介质中,应运法拉第电磁感应定律将它们从静态场推广到变化场中,从而总结归纳出麦克斯韦方程组及麦克斯韦的电磁场理论基础.电动力学则从麦克斯韦方程出发,将其微分形式分别应用到静电场和静磁场的势边值问题的求解中,推导出势的波动方程和电磁波在不同介质和不同边界中的传播特性,在规范变换条件的限定下推演出电磁波的辐射图像,结合爱因斯坦狭义相对论的时空观,在闵可夫斯基四维空间的框架下推出高级统一的电磁场张量和一系列电动力学方程的四维协变形式,进一步阐述了运动带电粒子与电磁场的相互作用,……如果要给电磁学和电动力学划出一个界限的话,麦克斯韦方程组就应当是电磁学与电动力学的天然分界.

本章简要地归纳了介质的电磁特性和一些电磁学中的主要结论,阐述了电磁学所总结出的麦克斯韦电磁理论的基本框架;从麦克斯韦方程组出发,给出了电磁场的边值关系和电磁场的能量、能流的计算公式和方法,为电动力学后续章节的展开,铺垫一个比较扎实的基础.

§ 1 介质的电磁性质

从电学的角度分析,宏观物质大体可分为导体、绝缘体、半导体.其中,绝缘体一般又称为“电介质”.半导体则介于导体与绝缘体之间,根据研究的需要,常常将它纳入导体或电介质模型,或者归入“导电介质”一类.

磁学理论则认为,一切物质材料都是“磁介质”.依据磁导率的大小,磁介质则有“铁磁质”和“非铁磁质”的区分.铁磁质的相对导磁率 $\mu_r \gg 1$,它相当于磁场的“导体”;而非铁磁质的相对导磁率 $\mu_r \approx 1$,它大体相当于磁场的“绝缘体”.

通过电磁学课程,已对介质的电磁特性作了详尽的研究和讨论,在那里述及的概念和规律,正是电动力学起步的基础.因此,我们在这里仅对介质的电磁特性做一个总结性的概述.

1. 介质的分类

从不同的角度,可以对介质进行多种分类.在一般情况下,常有如下一些分类.

从材料的物理性质划分:各向异性介质,各向同性介质;线性介质,非线性介质,均匀介质,非均匀介质等;

从材料的电磁性能划分:电介质、导电介质;铁磁质、顺磁质、抗磁质等.

从场对介质的作用划分:磁介质、电介质.

介质就是物质,它具有寻常的物质结构,是一个带电粒子系统,内部存在着规则而迅

速变化的电荷运动和微观的电磁场.在研究电场、磁场时,真空则被看作是一种特殊的介质,即 $\epsilon = \epsilon_0, \mu = \mu_0$ 的介质,现代物理学则认为,真空是“量子场的基态”,它也具有物质性和相变.

2. 介质的极化和磁化规律

在统一的电磁场中,电场、磁场对介质的影响主要有两种,即电介质和磁介质在电场和磁场中分别发生极化和磁化.表 1-1 虽然不能概括介质在场中行为的详尽情况,却反映了它们的主要特点与规律.从表中罗列的内容我们还可以看出,介质的极化与介质的磁化有着高度的对称性.不仅介质的极化行为与“分子电流模型描述的介质磁化行为”对称,而且介质的极化行为也与“磁荷模型描述的磁极化行为”对称.清楚地了解这种对称对于我们的学习记忆是大有裨益的.

表 1-1 介质极化与磁化的对比

	介质的极化	分子电流模型下介质的磁化	磁荷模型下介质的磁化
方 式	无极分子的位移极化 有极分子的取向极化	分子电流的取向极化 磁偶极子的位移极化	磁偶极子的位移极化 磁偶极子的取向极化
量 度	$P_e = \frac{\sum p_{ei}}{\Delta V}$	$M = \frac{\sum m_i}{\Delta V}$	$P_m = \frac{\sum p_{mi}}{\Delta V}$
关系 1	$\int_s P \cdot dS = -q_p$	$\int_l M \cdot dl = I_m$	$\int_s P \cdot dS = -q_m$
关系 2	$P = \chi_e \epsilon_0 E$	$M = \chi_m H$	$P_m = \chi_m \mu_0 H$
关系 3	$D = \epsilon E$	$B = \mu H$	$B = \mu H$
关系 4	$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 \quad \epsilon_r = 1 + \chi_e$	$\mu = \mu_r \mu_0 \quad \mu_r = 1 + \chi_m$	$\mu = \mu_r \mu_0 \quad \mu_r = 1 + \chi_m$

在现代电磁理论中,实验和推理都赞成诠释磁场起源的“分子电流观点”,但这并不意味着古典的“磁荷观点”已经失效.虽然迄今还没有在现实中找到“磁单极子”,或许它根本不存在,但是“磁偶极子”却是真实存在的.一个微小的电流环既可以用“磁矩”表述,同时也可用“磁偶极矩”表述,这就是说,电流环可以等效于磁偶极子.无论用“圆电流模型”还是用“磁偶极子模型”,计算和研究该电流环磁场都是等效的,殊途同归的.这在作者编著的《电磁学》中有详尽的描述和等效计算,这里不赘述.

(1) 电介质在外电场中的极化规律 $P = \chi_e \epsilon_0 E$

实验表明,电介质的极化强度 P 与介质内的合成电场 E 成正比,与电极化率 χ_e 成正比,这就是电介质在电场中的极化规律,用数学语言表述则为

$$P = \chi_e \epsilon_0 E \quad (1.1.1)$$

交变的电场对介质产生作用时,不但能使介质发生周而复始的极化,而且还能使介质中的电荷进行反复的移动而产生“极化电流”.极化电流实际上就是组成极化介质的电偶极子群体在外界交变电场作用下,发生了偶极矩的振荡变化,因此极化电流可以用下式量度

$$J_p = \frac{\partial P}{\partial t} \quad (1.1.2)$$

(2) 磁介质在外磁场中的磁化规律 $M = \chi_m H$ 及磁极化规律 $P_m = \chi_m \mu_0 H$

正因为介质的分子电流可以等效为一对磁偶极子, 所以磁介质在磁场中的磁化现象就可以用两种方法来解释和量度. “分子电流观点”认为磁介质在磁场中发生了磁化, 磁化了的程度可以用磁化强度 M 来量度; 而“磁荷观点”则认为磁介质在磁场中发生了磁极化, 磁极化的程度可以用磁极化强度 P_m 来量度. 磁介质在磁场中的磁化规律和磁极化规律都与描述电介质的极化规律的式(1.1.1) 相对应, 即

$$M = \chi_m H \quad (1.1.3)$$

$$P_m = \chi_m \mu_0 H \quad (1.1.4)$$

在这里, 式(1.1.3) 是分子电流观点下的公式, 式(1.1.4) 则是磁荷观点下的公式. 两式表明, 介质磁化后的效果(M 或 P_m) 与介质中的合成磁场 H 成正比. 从式(1.1.3) 和式(1.1.4) 还可以得到另外一个关系式

$$P_m = \mu_0 M \quad (1.1.5)$$

式(1.1.5) 就是“分子电流”和“磁荷”两种观点、两套相关介质计算公式间的“桥梁”, 借助于这个关系, 我们可以从描述电介质极化的诸多公式对称地给出磁荷观点下的相对应公式, 进而再演变出分子电流观点下的公式来. 例如

由磁荷与电荷的对称性, 从电介质的公式 $D = \epsilon_0 E + P_e$ 可以移植出 $B = \mu_0 H + P_m$, 再利用 $P_m = \mu_0 M$ 做代换, 进而将 $B = \mu_0 H + P_m$ 演变为

$$B = \mu_0 H + \mu_0 M \quad (1.1.6)$$

将其变形即可得到分子电流观点下的磁介质公式

$$H = \frac{B}{\mu_0} - M \quad (1.1.7)$$

上述推演表明, 我们可以充分利用这种电场 - 磁场的对称性, 通过移植和演变, 记住更多的描述介质的公式. 这对于学习后续章节是十分必要的.

3. 极化介质的 P 通量和磁化介质的 M 环量

描述介质极化强弱程度的 P , 其实质就是单位体积中依外场排列的电偶极子的多少. 可见, P 实际就是众多有规律排列的偶极子的叠加与衔接. 如果在电介质中做一个高斯面, 就有可能出现偶极子穿越高斯面边界的可能, 即产生了 P 的通量. 凡是有 P 通量的高斯面, 其内必然包围有极化电荷, 这不仅能够从图 1-1 看出, 而且还可以得到下面的精确推证.

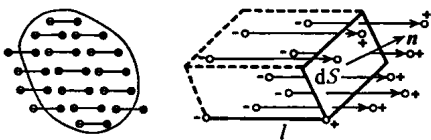


图 1-1 P 通量使体内出现极化电荷

(1) $\oint_S P \cdot dS = -q_p$ 及其微分式 $\nabla \cdot P = -\rho_p$ 的导出

从介质极化的模型可以推出 P 的通量. 在均匀极化的介质中取一个立方体, 边长恰为偶极子长度 l (图 1-2). 设 n 为介质的分子数密度, 则穿出该立方体的电荷数

$$qn l \cdot dS = np \cdot dS = P \cdot dS = -dq_p$$

对此式取积分可得:

$$\oint_S P \cdot dS = -q_p \quad (1.1.8)$$

运用数学中的高斯公式将上式可以变为

$$\oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{P} dV = -q_P = -\int_V \rho_P dV$$

比较可得

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho_P \quad (1.1.9)$$

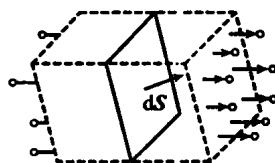


图 1-2 长度等于偶极子的体积元

(2) $\int_L \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = I_m$ 及其微分式 $\nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{J}_m$ 的导出

从介质磁化的模型可以推出 $\mathbf{M}$ 的环量. 从均匀磁化的介质中取一个环路 L , 在环路上作一个小柱体, 令其底面积为 a , 长为 dl (图 1-3). 设 n 为介质的分子数密度, i 为分子电流, 则小柱的体积为

$$\Delta V = a \cdot dl$$

那么, 中心落在小柱内的分子电流数就是环绕 dl 的电流

$$dI_m = ina \cdot dl = nm \cdot dl = \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}$$

于是, 与环路 L 链环的总电流就应该是

$$I_m = \oint_L \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.1.10)$$

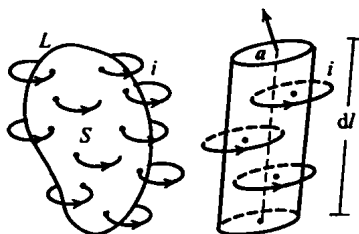


图 1-3 积分环路包围的磁化电流

运用数学中的斯托克斯公式将上式可以变为

$$I_m = \oint_L \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{J}_m \cdot d\mathbf{S}$$

比较后两项可得

$$\nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{J}_m \quad (1.1.11)$$

§ 2 麦克斯韦电磁理论的建立

1. 法拉第电磁感应定律与麦克斯韦对电磁理论的发展

1820 年前后是电磁学发展史上大丰收的年代. 奥斯特 (H.C. Oersted, 1771 ~ 1851) 发现了电流的磁效应, 毕奥 (J.B. Biot, 1774 ~ 1862) 和萨伐尔 (F. Savart) 由实验归纳出了电流元磁场的毕奥 - 萨伐尔定律, 安培 (A.M. Ampere, 1775 ~ 1836) 则通过实验发现了电流间的相互作用力, 并于 1822 年提出了安培定律, 欧姆则在 1826 年发现了著名的欧姆定律, …… 随后, 电磁热席卷了整个欧洲, 研究结果大量发表, 众说纷纭、真伪难辨.

1821 年, 作为化学家戴维助手的法拉第 (M. Faraday) 受聘成为皇家研究所实验室的主任. 同年, 英国哲学学报约法拉第写一篇关于电磁问题的述评, 这件事导致了法拉第开始了电磁学的研究. 他在整理电磁学文献时, 亲自做了许多实验, 其中包括奥斯特和安培的实验. 法拉第笃信自然力的统一, 他想, 既然电荷可以感应周围的导体使之带电, 磁铁可以感应附近的铁质物体使之磁化, 为什么电流就不可以在周围导体中感应出电流呢? 从 1821 年起他就开始了“寻找磁生电”的实验, 在他的实验日记中多次记录了不成功的尝试, 顽强的意志跃然纸上 …… 1831 年 8 月 29 日, 法拉第终于取得了突破性进展, 发现了电磁感应现象, 并用文字表述了这一重要发现, 提出了“力线”这一蕴含场思想的概念. 1845 年诺

依曼(F. E. Neumann) 加工整理, 以定量的形式给出了电磁感应定律

$$E = - \int \frac{\partial A}{\partial t} dl$$

式中的 A 就是诺依曼最先提出的磁场矢势函数

$$A = \int \frac{i}{r} dl$$

上面第一个公式就是我们现在使用的法拉第电磁感应定律公式(1.2.1) 的前身, 而第二个公式后来则演变为本书第三章将要述及的磁场矢势公式(3.1.4)。

1842 年汤姆生(W. Thomson, 1824 ~ 1907) 利用类比的方法, 借鉴较为成熟的弹性理论和热传导理论, 将电的等势面对应于热的等温面, 电荷则对应于热源, 利用傅立叶的热分析方法, 把法拉第的力线思想和拉普拉斯、泊松等人已经建立的完整的静电理论结合在一起, 初步形成了电磁作用的统一理论。

麦克斯韦(1831 ~ 1879 年) 站在法拉第、汤姆生两位巨人的肩上, 在总结以往静电、静磁理论和电磁感应定律的基础上, 建立起了电磁场理论的宏伟大厦, 柱石就是优美的麦克斯韦方程。这一创造过程中大约经历了这样几个阶段:

1855 ~ 1856 年, 麦克斯韦利用不同学科间的“物理相似性”和数学公式类比的方法, 着手用数学分析的方法表达法拉第的力线和场的思想, 并于 1856 年发表了第一篇关于电磁理论的论文《论法拉第力线》, 初步给出了六个电磁场方程

$$\oint A \cdot dl = \Phi \quad \oint H \cdot dl = \sum I \quad W = \oint j \cdot A dl, \\ B = \mu H \quad j = \sigma E \quad \mathcal{E} = \frac{dA}{dt}$$

1861 ~ 1865 年, 麦克斯韦发现用电磁现象与流体力学类比的方法不能解决全部问题, 转向用模型来建立假说。他借用兰金(W. J. M. Rankine) 的“分子涡流”假说, 建立了“静电的分子涡旋”模型, 进一步引入了位移电流、涡旋电场的概念, 提出了由 20 个方程、20 个变量构成的电磁场的普遍方程组(麦克斯韦方程组的前身), 推断了电磁波的存在, 预测了光是一种电磁波, 奠定了光的电磁理论, 并从理论上给出了真空中的光速 c 。

直到 1887 年, 赫兹(H. Hertz, 1857 ~ 1894) 才用实验证实了电磁波的存在。1890 年, 赫兹将麦克斯韦方程组的 20 个方程改写为今天普遍使用的矢量形式。

麦克斯韦建立的电磁场理论, 全面揭示了电场和磁场的内在的定量联系, 令电、磁、光的理论走向统一。法拉第的发现和麦克斯韦的贡献都是人类科学进步的里程碑, 具有划时代的意义。法拉第的学说使人类走进了电气化时代, 麦克斯韦的理论则给人类带来了通讯和信息技术的革命。他们不仅在科学研究上承前启后, 而且还有过划时代的会见与合作。本章小结后提供的一段阅读资料对此做了生动的描述。

2. 麦克斯韦的两个假说

麦克斯韦从法拉第的电磁感应定律出发, 提出了“涡旋电场”的假说, 发现了变化的磁场可以产生涡旋电场的定量关系; 又从电容器充电的“非稳恒情况”着手, 用假设的“位移电流”接续了电容器内中断的传导电流, 将稳恒磁场下的安培环路定理推广到普遍的情况下。

(1) 涡旋电场假说

电磁感应定律可用下面的数学形式表示

$$\mathcal{E}_{\text{感}} = - \frac{d\varphi}{dt} = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.2.1)$$

从电源的角度看,感应电动势也是一种电源电动势,它也应该有自己相应的非静电场 $\mathbf{E}_K$, 于是就有

$$\mathcal{E}_{\text{感}} = \mathcal{E}_{\text{电源}} = \oint_l \mathbf{E}_K \cdot d\mathbf{l} \quad (1.2.2)$$

比较式(1.2.1)和式(1.2.2),自然就会得到

$$\oint_l \mathbf{E}_K \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.2.3)$$

既然感应电动势可以使闭合导线中的电荷形成闭合电流,那么一定有一种“转圈的场”在推动电荷移动.麦克斯韦沿着这条思路,大胆地假设这个“转圈的场”为“涡旋电场”,它是一种既不同于静电场,也不同于稳恒电场的“另类电场”.正是这个涡旋电场扮演了产生电源电动势的非静电场的角色,即

$$\mathbf{E}_K = \mathbf{E}_r \quad (1.2.4)$$

$$\therefore \oint_l \mathbf{E}_r \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.2.5)$$

如果将静电场、稳恒电场等由真实电荷所激发的电场称为库仑场,那么任意电场就可以看作由库仑场与涡旋场所组成,即

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_q + \mathbf{E}_r \quad (1.2.6)$$

与静电场一样,库仑场也是保守力场、有势场,同样满足“积分与路径无关”即

$$\oint_l \mathbf{E}_q \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (1.2.7)$$

将式(1.2.5)与式(1.2.7)相加,于是我们就得到了

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.2.8)$$

式(1.2.8)就是著名的麦克斯韦方程之一,它表明了“变化的磁场能够激发涡旋电场”.

(2) 位移电流假说

考虑电容器充电的电路(图1-4).由于电容器的充电过程是非稳恒情况,所以它不满足稳恒电流的条件.当高斯面全部取在电容器以外的导线上时,有

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = I_f = 0$$

若将高斯面取在电容器以内包含一个极板时情况就不同了,此时则有

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = - \frac{dq_f}{dt} \neq 0$$

在上式中代入 $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q_f$ 可得

$$\oint_S \mathbf{J}_f \cdot d\mathbf{S} = - \frac{dq_f}{dt} = - \frac{d}{dt} \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = - \oint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.2.9)$$

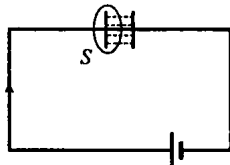


图 1-4 电容器充电的非稳恒过程

式(1.2.9)表明,在电容器极板处中断了的 J 线穿入高斯面的通量俨然与从极板发出的 D 线穿出高斯面的通量相等.这显然对于引入“位移电流”的假说具有重要的启迪.

很明显,由于电流的中断,安培环路定理 $\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_f$ 已经不能在这样的电路中处处成立.能否有办法将它推广到类似的非稳恒电路中呢?

麦克斯韦假设,在非稳恒情况下,电容器内中断的传导电流被“位移电流”接续,它就是式(1.2.9)最后一项中的 D 的偏微分

$$\mathbf{J}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.2.10)$$

传导电流和“位移电流”联手共同构成了闭合的“流”,于是在上面的电容器充电的全过程中就有了一个“全电流”,即

$$\mathbf{J}_{\text{全}} = \mathbf{J}_f + \mathbf{J}_d \quad (1.2.11)$$

根据式(1.2.9)和式(1.2.11),明显地可以得到

$$\begin{aligned} \oint_s \mathbf{J}_f \cdot d\mathbf{S} &= - \oint_s \mathbf{J}_d \cdot d\mathbf{S} \\ \therefore \oint_s (\mathbf{J}_f + \mathbf{J}_d) \cdot d\mathbf{S} &= 0 \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

式(1.2.12)表明,在非稳恒情况下的全电流 $\mathbf{J}_{\text{全}}$ 具有稳恒情况下的传导电流 $\mathbf{J}_f$ 一样的性质,于是,只要把稳恒情况下表述环路定理的方程 $\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_f = \int_s \mathbf{J}_f \cdot d\mathbf{S}$ 中的 $\mathbf{J}_f$,换做全电流的两项 $\mathbf{J}_{\text{全}} = \mathbf{J}_f + \mathbf{J}_d$,就可以将稳恒磁场的安培环路定理 $\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_f$ 推广到非稳恒情况中,即

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_f + \int_s \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.2.13)$$

由稳恒磁场的安培环路定理 $\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_f$ 拓展出来的式(1.2.13),就是著名的麦克斯韦电磁场方程之一.该式表明“变化的电场与传导电流一样,都能激发涡旋磁场”.

式(1.2.8)、(1.2.13)连同“介质中电场的高斯定理”以及“磁场的高斯定理”一起,构成了麦克斯韦电磁理论的柱石——著名的麦克斯韦方程组,即

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.2.8) \quad \oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_f + \int_s \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.2.13)$$

$$\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q_f \quad (1.2.14) \quad \oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (1.2.15)$$

3. 麦克斯韦电磁理论框架的“4,3,2,1”

用“4,3,2,1”的描述可以简洁地概括麦克斯韦的电磁场理论框架,其中

“4”即描述电磁场运动变化的“四个方程”:电动力学基本方程——麦克斯韦方程;

“3”即表征介质性质与场量的“三个关系”: $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$;

“2”表示从稳恒推广到非稳恒必须的两个假说:涡旋电场和位移电流;

“1”代表通晓了整个电磁场后所做出的一个预言:电磁场以波的形式按光速传播.

§ 3 电磁场方程

1. 麦克斯韦方程的积分形式

一般将麦克斯韦方程又称为电磁场的基本方程. 在研究了静电场、稳恒磁场、时变场之后, 在高斯定理、环路定理、法拉第电磁感应定律的基础上, 麦克斯韦统一了电磁场, 总结出了著名的“麦克斯韦方程”. 虽然这组方程在不同情况下具有不同的表述, 但从表 1-2 的对比中却不难看出, “一般的场方程” 覆盖了“真空” 和“稳定” 等特殊情况.

表 1-2 不同情况下的电磁场方程

一般场方程	真空中的变化场方程	介质中的稳定场方程
$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.3.1)$	$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$	$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$
$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_f + \int_s \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.3.2)$	$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \int_s \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$	$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_f$
$\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q_f \quad (1.3.3)$	$\oint_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} q$	$\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q_f$
$\oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (1.3.4)$	$\oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$	$\oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$

式(1.2.14) ~ 式(1.3.4) 所示的积分方程往往用来定量地描述、讨论一定区域范围内的电、磁场量, 利用它们计算场中一点及其邻域的变化情况还有一定的困难. 为了能够描述场中任一点及其邻近场的变化规律, 必须要使用场量的微分方程即麦克斯韦方程的微分形式.

2. 麦克斯韦方程的微分形式

运用数学变换及数学场论的知识, 不难从麦克斯韦方程的积分形式推演出其相应的微分形式来. 我们从表 1-2 中的“一般场方程” 出发, 用两种方法来完成这个推导.

例 1 推导 $\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q_f$ 所对应的微分方程 $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$

(1) 用高斯公式推导 对命题的积分式套用高斯公式 $\oint_s \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \nabla \cdot \mathbf{A} dV$, 得

$$\begin{aligned} \oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} &= \int_v \nabla \cdot \mathbf{D} dV = q_f = \int_v \rho_f dV \\ \therefore \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_f \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

(2) 由散度的定义推导 根据数学场论中散度的定义, 即

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q_f}{\Delta V} = \frac{dq_f}{dV} = \rho_f$$

例 2 推导 $\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$ 所对应的微分方程 $\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

(1) 用斯托克斯公式推导 对命题套用斯托克斯公式 $\oint_l A \cdot dl = \int_s \nabla \times A \cdot dS$, (本例给出的斯托克斯公式和例 1 给出的高斯公式中的 A 表示任意矢量场) 可得

$$\begin{aligned}\oint_l E \cdot dl &= \int_s \nabla \times E \cdot dS = - \int_s \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS \\ \therefore \nabla \times E &= - \frac{\partial B}{\partial t}\end{aligned}\quad (1.3.6)$$

(2) 用旋度与环量面密度的关系推导 根据数学场论中环量面密度的定义, 可得

$$\begin{aligned}(\nabla \times E)_n &= \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \oint_l E \cdot dl}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{- \Delta \int_s \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS}{\Delta S} = \frac{- \int_s \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS}{dS} = - \frac{\partial B}{\partial t} \cdot n \\ \therefore \nabla \times E &= - \frac{\partial B}{\partial t}\end{aligned}$$

将式(1.3.5)与式(1.3.6)排列在一起便可发现, 微分形式与积分形式之间存在着明显的对应. 例如, 凡是积分式为通量的, 其所对应的微分式就是散度; 凡是积分式为环量的, 其所对应的微分式就是旋度. 类似上面例 1、例 2 的推导, 同样也能推导出下面其他一些积分方程所对应的微分形式来.

$$\oint_s D \cdot dS = q_f \quad \rightarrow \quad \nabla \cdot D = \rho_f \quad (1.3.5)$$

$$\oint_l E \cdot dl = - \int_s \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS \quad \rightarrow \quad \nabla \times E = - \frac{\partial B}{\partial t} \quad (1.3.6)$$

$$\oint_l H \cdot dl = I_f + \int_s \frac{\partial D}{\partial t} \cdot dS \quad \rightarrow \quad \nabla \times H = J_f + \frac{\partial D}{\partial t} \quad (1.3.7)$$

$$\oint_s B \cdot dS = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla \cdot B = 0 \quad (1.3.8)$$

$$\oint_l M \cdot dl = I_m \quad \rightarrow \quad \nabla \times M = J_m \quad (1.3.9)$$

$$\oint_s P \cdot dS = - q_p \quad \rightarrow \quad \nabla \cdot P = - \rho_p \quad (1.3.10)$$

上面开列的所有微分形式的推演方法与例 1、例 2 完全一样, 只是物理量各不相同.

同样, 继续推导出下面的微分方程也不难. 请读者先根据数学场论获得的知识或者参照上面六组公式的排列, 写出下面各微分式所对应的积分方程, 再参照例 1、例 2 的方法和步骤推导下面各微分式, 要求至少要熟练掌握一种方法.

静电场方程: $\nabla \times E = 0$; 静磁场方程: $\nabla \times B = \mu_0 J$

真空高斯定理: $\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$; 真空安培环路定理: $\nabla \times B = \mu_0 J + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$

电荷守恒定律: $\nabla \cdot J = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$; 能量守恒定律(后续内容): $-\nabla \cdot S = f \cdot v + \frac{\partial w}{\partial t}$

3. 电场的散度和旋度

电场的散度:

微分方程 $\nabla \cdot D = \rho_f$ 又称为电位移矢量 D 的散度方程, 它表明 D 线是有源头的, 即

“一切自由电荷都是电位移矢量 D 的源头”, D 矢量场是“有源、无旋场”, 亦称有势场。

电场的旋度:

同样, 称微分方程 $\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$ 为电场 E 的旋度方程, 它表明, “变化的磁场可以产生涡旋的电场”, 或者表明“存在着一种涡旋电场, 它是由变化的磁场所产生的”。考虑到笼统的电场可以包含两种情况: 静电场 $E_{\text{静}}$ 和涡旋电场 E_r , 那么 $\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$ 正好可以看作是二个方程即 $\nabla \times E_r = -\frac{\partial B}{\partial t}$ 和 $\nabla \times E_{\text{静}} = 0$ 的叠加, 所以说方程 $\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$ 覆盖了众所周知的静电场(库仑场)的旋度方程和涡旋电场的旋度方程。

4. 磁场的散度和旋度

磁场的散度:

微分方程 $\nabla \cdot B = 0$ 又称为磁感应强度 B 的散度方程, 它表明 B 矢量线是闭合、无源头的, 磁场 B 是“无源、涡旋的管形场”。

磁场的旋度:

同样, 称微分方程 $\nabla \times H = J_f + \frac{\partial D}{\partial t}$ 为磁场强度 H 的旋度方程, 它表明, “变化的电场(D 或 E) 和传导电流 J , 都可以产生涡旋的磁场(H)”; 也可以理解为, “涡旋的磁场是由其旋涡中心及其周围区域存在着的变化电场和传导电流所引发的”。在静态磁场中, 由于 $\frac{\partial D}{\partial t} = 0$, 则方程 $\nabla \times H = J_f + \frac{\partial D}{\partial t}$ 退化成了 $\nabla \times H = J_f$, 所以 $\nabla \times H = J_f + \frac{\partial D}{\partial t}$ 覆盖了静磁场的旋度方程 $\nabla \times H = J_f$ 。

5. 例题

例 1 在计算一个系统的功率时, 若已知力学的参量就可使用式 $P = \int_V f \cdot v dV$ 计算, 而已知电学的参量则可以用式 $P = \int_V J \cdot E dV$ 计算。可以证明一个在今后的推导中经常使用的一个代换关系, 即对于同一个电学系统总有 $\int_V J \cdot E dV = \int_V f \cdot v dV$ 。

证: 用电荷速度 v 点乘洛伦兹力密度公式 $f = \rho E + \rho v \times B$, 并注意到由矢量的混合积运算公式 $v \times B \cdot v = v \times v \cdot B = 0$

$$\therefore f \cdot v = \rho E \cdot v + \rho v \times B \cdot v = \rho E \cdot v = \rho v \cdot E = J \cdot E$$

$$\therefore \int_V J \cdot E dV = \int_V f \cdot v dV \quad (1.3.11)$$

例 2 由电流连续性方程(电荷守恒定律)推出位移电流密度 $J_d = \frac{\partial D}{\partial t}$ 。

推导: 对式 $\nabla \cdot D = \rho_f$ 取时间导数, 即

$$\nabla \cdot \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\partial \rho_f}{\partial t}$$

将上式代入电流连续性方程的微分式 $\nabla \cdot J + \frac{\partial \rho_f}{\partial t} = 0$ 中, 可得