职工业余中等学校高中课本

数学

·文科用·

SHUXUE

说　　明

本书是上海市教育局根据国家教员参加文科高中学习业余中等学校高中数学教学大纲》编写的．供职工业余中等学校高中数学课程（文科）教学使用．

本书的内容包括代数、三角函数、空间图形、解析几何初步等四章，并附有教学大纲所规定的选学内容（统计初步，电子计算器的使用）以及附表（对数表、反对数表、三角函数表）．教学时数为180课时．

在本书编写过程中，我们按成人学员参加文科高中学习的特点作了一些探索．如安排了一些初中数学基础知识的复习内容．这些内容，对学员基础较好的班级可以略讲或删去不讲．

为了减轻成人学员的学习负担，课本在精选教学内容方面也作了一些尝试．如在三角函数部分，课本删去了有关正割、余割的三角函数公式，加强了正、余弦和正、余切的三角函数公式及其应用，使学员减少公式的记忆而又不影响三角变换能力的培养．又如在精选直线方程的教学内容时，我们突出了直线方程的点斜式、斜截式和一般式，而将已知两点或截距求直线方程的问题，归纳为先求出斜率后，再用点斜式或斜截式求得（或直接代入直线的一般式方程），使理科教材中的五种直线方程减少到三种．

空间图形的教学内容，基本概念多、定理多、推理论证多，这是成人学习中最感困难的内容．为此，我们精简了部分定

理的证明和计算公式的推导过程，还删去了理科教材中的公理2及部分判定定理和推论.

另一方面，为适应近年来标准化试题的要求，课本配备了相当数量的填充、选择题. 在每章的小结中，还安排了复习参考例题及复习题，供教学时选用.

鉴于成人数学教学法研究之不足，课本还存在许多不足，敬请教师、学员和成人教育工作者批评指正(具体的编写说明及教材分析，请参阅本书的教学参考书).

本书由王抒同志编写，赵宪初同志审稿. 在本书的编写过程中，得到了国家教育委员会职工高中数学教学大纲审定组郝宝义、韩恩熙、胡明、方明一、李春阳等同志的大力支持和帮助，这里谨向他们表示衷心的谢意.

本书初稿写出后，江苏、浙江、四川、安徽、山东、江西、福建、上海等省市的有关教师参加了文科教材审稿会议，对教材初稿作了认真的讨论，提出了不少宝贵的意见，在此一并表示衷心感谢.

上海市职工教材编写组

一九八六年一月

目　　录

第一章 代　数

一 方程和方程组

1.1 一元一次方程*

我们来看下面的式子：

(1) $x+2=5$;

(2) $2(x-2)-3(2x-1)=7(1-x)$;

(3) $\frac{y-2}{6}=\frac{y}{3}+1$.

这种表示相等关系的式子，叫做**等式**．由于这些等式中都含有字母(x、y)，而且并不是用任意数值代替其中的字母(x、y)都能成立的．例如对等式(1)，只有用3代替x，等式才能成立．我们把这种字母叫做**未知数**．未知数x的值需要根据它同已知数2和5之间的关系来确定．象这样含有未知数的等式叫做**方程**．能使方程左右两边的值相等的未知数的值，叫做方程的**解**．例如，3就是方程$x+2=5$的解．只含有一个未知数的方程的解，也叫做方程的**根**．

求方程的解的过程叫做**解方程**．

再观察上面给出的式子，它们都是含有一个未知数，并且未知数的次数是一次的方程．这样的方程，叫做**一元一次方程**．

---

* 自本节到1.5节都是初中数学教学内容的复习，教学时可以根据学员的实际需要选用。

解一元一次方程的一般步骤是：

1．去分母；

2．去括号；

3．移项；

4．合并同类项，化成最简方程 $ax=b(a\neq 0)$；

5．方程两边都除以未知数的系数，得出方程的解 $x=\frac{b}{a}$.

由于方程的形式不同，解方程时，不一定都按上述步骤进行，其中有些步骤也可能用不到，有些步骤可以提前或重复使用.

下面举例说明一元一次方程的解法.

例1 解方程：$2x-1=5-x$.

解 移项，得

$$2x+x=5+1,$$

合并同类项，得

$$3x=6,$$

两边都除以 3，得

$$x=2.$$

检验：把 $x=2$ 代入原方程，

$$左边=2\times 2-1=3,\quad 右边=5-2=3,$$

$$左边=右边,$$

$\therefore$ $x=2$ 是原方程的解.

为了简便起见，解方程过程中的移项、合并同类项等文字说明，可以省略不写，检验的过程也可不写.

例2 解方程：

$$\frac{2x-1}{2}-\frac{2x+5}{3}=\frac{6x-7}{4}-1.$$

解

$$6(2x-1)-4(2x+5)=3(6x-7)-1\times12,$$

$$12x-6-8x-20=18x-21-12,$$

$$12x-8x-18x=-21-12+6+20,$$

$$-14x=-7,$$

$$\therefore\quad x=\frac{1}{2}.$$

以上解方程过程中，常常有学员遗漏“1×12”，或把 $-4(2x+5)=-8x-20$ 误写成 $-8x+20$.

1.2 一元二次方程

如果方程的两边都是关于未知数的整式，这样的方程叫做整式方程．上一节所讨论的一元一次方程，是整式方程中最简单的方程．这一节我们要讨论含有一个未知数，并且未知数的次数是二次的整式方程，这样的方程叫做一元二次方程．它的一般形式是

$$ax^2+bx+c=0.\quad(a\neq0)$$

1．一元二次方程的解法

例 1 解方程：$2x^2+3x-5=0$.

解法一 左边分解因式，得

$$(x-1)(2x+5)=0.$$

$$\therefore\quad x-1=0\quad 或\quad 2x+5=0.$$

因此，原方程的两个根是 $x=1$，$x=-\frac{5}{2}$.

解法二 配方

$$x^2+\frac{3}{2}x=\frac{5}{2},$$

$$\left(x+\frac{3}{4}\right)^2=\frac{49}{16},$$

$$\therefore\quad x+\frac{3}{4}=\pm\frac{7}{4}.$$

因此，原方程的两个根是 $x=1$，$x=-\frac{5}{2}$.

解法三 由一元二次方程的求根公式:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

且 $a=2$，$b=3$，$c=-5$，$b^2-4ac=49$，得

$$x=\frac{-3\pm 7}{4}.$$

因此，原方程的两个根是 $x=1$，$x=-\frac{5}{2}$.

从这个例子可以看到，在解一元二次方程时，若一边为零，另一边能较容易分解因式的，可以用解法一(因式分解法)求解；一般情况下可以用求根公式求解.

2．一元二次方程的根的判别式

我们把 b^2-4ac 叫做一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的**根的判别式**，通常用符号"Δ"*表示，即 $\Delta=b^2-4ac$. 根据 Δ 的值的符号可以判定一元二次方程的根的情况.

这就是说，如果一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的根的判别式 $\Delta>0$，方程有两个不相等的实数根；如果 $\Delta=0$，方程有两个相等的实数根；如果 $\Delta<0$，方程没有实数根.

反过来，如果一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 有两个不相等的实数根时，$\Delta>0$；如果有两个相等的实数根时，$\Delta=0$；如果没有实数根时，$\Delta<0$.

例 2 不解方程，判别下列方程的根的情况:

(1) $3x^2+4x-4=0$;

---

* Δ: 希腊字母，读作"代尔塔".

(2) $9x^2+4=12x$;

(3) $5(y^2+2)-7y=0$.

解 (1) $\because$ $\Delta=4^2-4\times3\times(-4)=16+48>0$,

$\therefore$ 这个方程有两个不相等的实数根.

(2) 整理,得

$$9x^2-12x+4=0.$$

$\because$ $\Delta=(-12)^2-4\times9\times4=144-144=0$,

$\therefore$ 这个方程有两个相等的实数根.

(3) 整理,得

$$5y^2-7y+10=0.$$

$\because$ $\Delta=(-7)^2-4\times5\times10=49-200<0$,

$\therefore$ 这个方程没有实数根.

例3 k 取什么值时,方程

$$3x^2-2(3k+1)x+3k^2-1=0$$

(1) 有两个不相等的实数根; (2) 有两个相等的实数根; (3) 没有实数根.

解 $\Delta=[-2(3k+1)]^2-4\times3\times(3k^2-1)$
$=24k+16$.

(1) 当 $24k+16>0$ 时, 即 $k>-\dfrac{2}{3}$ 时, 方程有两个不相等的实数根.

(2) 当 $24k+16=0$ 时, 即 $k=-\dfrac{2}{3}$ 时, 方程有两个相等的实数根.

(3) 当 $24k+16<0$ 时, 即 $k<-\dfrac{2}{3}$ 时, 方程没有实数根.

3. 一元二次方程根与系数的关系

由一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0)$$

的求根公式，可知它的两个根是

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

两根相加，得

$$x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}.$$

两根相乘，得

$$x_1\cdot x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2}$$

$$=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}.$$

于是得到

$$\boldsymbol{x_1+x_2=-\frac{b}{a}},$$

$$\boldsymbol{x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}}.$$

这就是说，一元二次方程的两根的和，等于它的一次项系数除以二次项系数所得商的相反数；两根的积，等于它的常数项除以二次项系数所得的商．

如果一元二次方程中的二次项系数是1，设为

$$x^2+px+q=0,$$

那么这个方程的两个根 x_1 和 x_2 满足下面的关系：

$$\boldsymbol{x_1+x_2=-p, \quad x_1\cdot x_2=q.}$$

这就是说，二次项系数是1的一元二次方程，它的两个根的和等于它的一次项系数的相反数；两根的积等于它的常数项.

一元二次方程的根与系数的关系，在许多方面都有应用. 例如：

(1) 已知一元二次方程的一个根，求它的另一个根.

(2) 求一元二次方程两个根的对称式的值(如两根的平方和，倒数和等).

(3) 已知两数的和与积，求这两个数.

(4) 已知一个一元二次方程，求作另一个一元二次方程，使这两个方程的根之间满足某种关系.

(5) 已知一元二次方程的根所满足的条件，求方程中的参数.

下面举例说明它的应用.

例4 已知方程 $4x^2-mx+6=0$ 有一个根是2，求它的另一个根及 m 的值.

解 设另一个根是 α，则

$$\alpha\cdot 2=\frac{6}{4},$$

$$\therefore\quad \alpha=\frac{3}{4}.$$

又

$$\frac{3}{4}+2=\frac{m}{4},$$

$$\therefore\quad m=11.$$

因此，另一个根是$\frac{3}{4}$，$m=11$.

例5 不解方程，求方程 $2x^2+4x-1=0$ 的两个根的平方和.

解 设方程的两个根是α、β，则

$$\alpha+\beta=-2;\quad \alpha\beta=-\frac{1}{2}.$$

$$\because\quad (\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2,$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \alpha^2+\beta^2&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\\&=(-2)^2-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\\&=5.\end{aligned}$$

因此，方程的两个根的平方和是5.

例6 求作一个一元二次方程，使它的两个根是

$$a+b\sqrt{m}\quad 和\quad a-b\sqrt{m}.$$

解 设所求的一元二次方程是

$$x^2+px+q=0,$$

则
$$p=-[(a+b\sqrt{m})+(a-b\sqrt{m})]=-2a,$$
$$q=(a+b\sqrt{m})(a-b\sqrt{m})=a^2-b^2m.$$

因此，所求的方程是

$$x^2-2ax+a^2-b^2m=0.$$

例7 已知两数的和与积都等于6，求这两个数.

解 由题意，可知这两个数是方程

$$x^2-6x+6=0$$

的两个根.

解这个方程，得

$$x_1=3+\sqrt{3},\quad x_2=3-\sqrt{3}.$$

因此，这两个数是$3+\sqrt{3}$和$3-\sqrt{3}$.

习 题 一

1. 解下列方程：

(1) $2x-5=x$;

(2) $2x-1=5x-7$;

(3) $\frac{1}{2}x+1=\frac{3}{4}x-2$;

(4) $3(y+4)=12$;

(5) $4x-3(20-x)=6x-7(9-x)$;

(6) $\frac{5-3x}{2}=\frac{3-5x}{3}$.

2. 解下列方程:

(1) $x^2-7x+6=0$;

(2) $3x^2-5x-2=0$;

(3) $2x^2=1-2x$;

(4) $x(x+8)=16$;

(5) $3x^2-4x-2=0$;

(6) $2x^2=3-7x$.

3. 不解方程,判别下列方程的根的情况:

(1) $x^2-11x+6=0$;

(2) $2x^2+7x+5=0$;

(3) $4x^2+12x=-9$;

(4) $5x(x+2)+6=0$.

4. k 是什么值时,下列各方程有两个相等的实数根?

(1) $kx^2+4x+1=0$;

(2) $4x^2-(k-2)x+1=0$;

(3) $x^2-9+k(x+3)=0$.

5. 若下列方程有两个不相等的实数根,试求 k 的取值范围:

(1) $x^2+(2k-5)x+k^2=0$;

(2) $2x^2+2k^2=(4k+1)x$.

6. 已知方程 $x^2-kx-12=0$ 的一个根是 -2,求它的另一个

根及 k 的值.

7. 求作一个二次方程，使它的两个根是：

(1) $-\frac{3}{5}$ 和 $\frac{5}{3}$；

(2) $2\sqrt{3}+1$ 和 $2\sqrt{3}-1$.

8. 已知两个数的和等于 8，它们的积等于 11，求这两个数.

9. 已知方程 $2x^2+3x-5=0$，不解方程，求出它的两个根的平方和.

10. 已知方程 $2x^2+4x+m=0$ 的两个根的平方和是 34，求 m 的值.

1.3 分式方程

我们把分母里含有未知数的方程叫做分式方程. 例如：

$$\frac{1}{x-3}+2=\frac{4-x}{x-3},$$

$$\frac{1}{x+2}+\frac{4x}{x^2-4}=1+\frac{2}{x-2}$$

等，都是分式方程.

解分式方程的一般步骤是：

1. 在方程的两边都乘以同一个适当的整式(通常取各分式的最简公分母)，使它变成一个整式方程；

2. 解这个整式方程；

3. 检验所求得的整式方程的根是不是原分式方程的根(通常是将方程的根代入最简公分母，当代入后的值等于零时，这个根是增根；当代入后的值不等于零时，这个根就是原方程的根).

下面举例说明分式方程的解法.

例 1 解方程：

$$\frac{1}{x-3}+2=\frac{4-x}{x-3}.$$

解

$$1+2(x-3)=4-x,$$

$$3x=9,$$

$$\therefore\quad x=3.$$

检验，把 $x=3$ 代入 $x-3$，得

$$x-3=3-3=0,$$

$\therefore\quad x=3$ 是增根.

因此，原方程没有根.

例 2 解方程:

$$\frac{1}{1-x^2}=\frac{3}{1-x}-\frac{5}{1+x}.$$

解 $1=3(1+x)-5(1-x)$,

$$-8x=-3,$$

$$\therefore\quad x=\frac{3}{8}.$$

经检验，$x=\frac{3}{8}$ 是原方程的根.

例 3 解方程:

$$\frac{1}{x+2}+\frac{4x}{x^2-4}=1+\frac{2}{x-2}.$$

解 $(x-2)+4x=(x^2-4)+2(x+2)$,

$$x^2-3x+2=0.$$

$$\therefore\quad x=1,\quad x=2.$$

经检验，$x=2$ 是增根，$x=1$ 是原方程的根.

1.4 无理方程

我们把被开方式里含有未知数的方程叫做无理方程，也

叫根式方程．例如：

$$x=\sqrt{3-2x},$$
$$6+x+\sqrt{x^2+6^2}=24,$$
$$\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+5}=1$$

等，都是无理方程．为了和无理方程相区别，我们把整式方程和分式方程都叫做有理方程．

解无理方程的一般步骤是：

1．把无理方程变形成有理方程(通常采用适当变形后再两边乘方去掉根号)；

2．解这个有理方程；

3．把所求得的有理方程的根，代入原方程进行检验(如果代入原方程后，左边不等于右边，或根式无意义，这个根是增根；如果代入原方程后，左边等于右边，且根式有意义，这个根是原方程的根)．

下面举例说明无理方程的解法．

例1 解方程：

$$x=\sqrt{3-2x}.$$

解 $x^2=3-2x.$

$$x^2+2x-3=0,$$
$$\therefore\quad x=1,\quad x=-3.$$

检验：把 $x=1$ 代入原方程，

$$左边=1,\quad 右边=\sqrt{3-2\times1}=1,$$
$$左边=右边,$$

$\therefore\quad x=1$ 是原方程的根．

把 $x=-3$ 代入原方程，

$$左边=-3,\quad 右边=\sqrt{3-2\times(-3)}=3,$$
$$左边\neq右边,$$