五一 模块教材

高中新课标

数学

总主编：毛文凤 / 本册编著：葛福生

数值算法初步

中国大百科全书出版社

新课标高中数学模块教材

数值算法初步

本册编著：葛福生（南京师范大学数科院教授）

中国大百科全书出版社

总编辑:徐惟诚　　　社　长:田胜立

图书在版编目(CIP)数据
数值算法初步/毛文凤主编.-北京:中国大百科全书出版社,2005
新课标高中数学模块教材
ISBN 7-5000-7225-2
Ⅰ.数… Ⅱ.毛… Ⅲ.高等数学课—高中—教学参考资料
Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 142238 号

策划设计:可一图书　(http://www.keyibook.com)
责任编辑:简莉玲

新课标高中数学模块教材
数值算法初步
* * *
中国大百科全书出版社出版
全国新华书店经销
http://www.ecph.com.cn
北京阜成门北大街 17 号　邮编:100037　电话:010-88390797
山东省沂源县教育印刷厂
* * *
2005 年 7 月第 1 版　2005 年 7 月第 1 次印刷
890×1240 毫米　32 开本　8.75 印张　168 千字
ISBN 7-5000-7225-2/G·823
定　价:13.00 元

序

普通中学数学课程标准的颁布引发了一场教学内容的大改革。与时俱进地审视数学课程教学的内涵，已成为人们关注的问题。人们开始正视传统的教材构成、传统的教学模式、传统的评价标准所产生的负面影响——学生缺乏学习数学的兴趣。

本模块教材系列的编写其旨意就是要在纷繁杂乱的数学读物中，编出一套能体现数学独特的知识和能力、历史和人文、情感和价值观的数学用书，从而最大限度地调动学生对数学的兴趣。数学作为一门科学，应注重概念清晰、计算正确、论证有据；数学作为一种文化，应让人在数学读物中体会到它的文化价值。因此适当地介绍数学文化的演绎过程及它对推动社会发展的作用与展望它的发展趋势是十分必要的，是符合新课标理念的。当然，归根结底，针对中学生的任一数学读物都是有着教育功能的，在这套模块教材中我们特别着重做到三个结合：适度的形式化与启发兴趣形式相结合，发展学生的思维能力与增强数学的应用能力相结合，掌握扎实的基础知识与拓展数学视野、培养创新精神相结合。

纵观每一分册的写作均分三个层次：第一层次为引论，背景资料、数学史话、名人轶事或自撰小品等简洁地勾画出通往所述数学模块专题内容的千年路径或近代畅想，使读者产生“登高望远”的感觉或“源远流长”的体会。第二层次为主体构架，与新课程相伴，通过解惑的方式，深入浅出地讲解数学，着重思维训练、方法积累与能力提高。第三层次为提高延伸部分，与新课标的选修内容（指高中）相配合，这是特地为对数学有浓厚兴趣的青少年朋友安排的，希望同学们能喜欢它。

这三个层次，在本系列丛书不同的模块分册中，有的是以章节为标志，层次分明、一目了然，有的则是溶于章节之中相互渗透、各显特色。

这次参与丛书编写的作者，集中了目前数学普通教育的一些著名专家教授和教学一线的顶尖教师，尽管他们的认真负责精神和专业能力是毋庸置疑的，但由于编写时间仓促及作者对数学新课标的认识和实践水平有限，丛书在编写过程中难免有不足和疏漏之处，恳请广大读者批评指正。

（作者系南京师范大学数科院教授）

前　言

为配合普通高中课程标准实验教科书中“算法初步”这一内容的教学，我们编写了这本“数值算法初步”辅导读物，旨在使学生在确保掌握教材的基本数值算法和流程图的基础上，拓宽利用计算机解数学问题的思想和方法。与此同时，也为教师在进行“算法初步”的教学时给予奠基性帮助。它具有针对性强，算法推导论证严格、简明，而且算例具体，步骤清楚易于掌握等特点。总之，这是一本源于教材又高于教材的辅导读物。

本书在内容上首先介绍了误差概念和基本误差分析，这是数值算法首先要注意的问题。因为一些在理论上看来成立的算法，在计算机进行数值计算时，由于误差积累与传播，导致结果不能满足预期精度，甚至失真，所以这样的算法是无效的。经典的例子是

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}+\cdots\cdots$$

这在理论上是正确的算式，但在计算机计算时，由于舍入误差，其结果达不到理想精度。其次，在解方程的数值方法中，将教材中所介绍的二分法拓展到一般迭代法、steffensen迭代法、弦截法和牛顿法，以提高解方程的能力

和效率。此外，在其他章节中，我们介绍了科学实验中较常用的插值法和最小二乘法，并以地球温室效应这一热门课题作为典型例题，鼓励读者通过学习和研究，积极投入到其他方向的一些力所能及的科学研究的探讨中去。书中还有一些内容，如几何问题的数值算法、最优化方法初步等，供有兴趣的师生进一步开展课外数学学习活动之用。

本书为了使读者容易掌握，在文字上力求通俗易懂，深入浅出。每一个算法都伴有一个典型例题，并给予详解，且每一个算法又都附有少而精的针对性的练习题，每一道练习题都给出了必要解答步骤和结果。相信这些措施定能帮助读者达到数值算法入门之目的，为进一步学习和提高打下坚实的基础。

马克思说过“一种科学只有成功地应用数学时，才算达到完善的地步”。今天电脑的飞速发展已经深入到人类生活的每一个领域，因此也可以说，数学也只有成功地运用电子计算机去获得所求问题的数值解时，数学才算达到更完美的境界。

由于算法这一内容首次进入中学教材，编写这一辅导读物也是初次尝试，带有“投石问路”之意，因此书中不当之处在所难免，敬请广大读者批评指正，笔者不胜感谢。

编者

目　录

引 论

人类的社会和生产活动，推动着科学技术发展，数学的算法在这历史长河中从粗浅的低级阶段逐渐发展到今天电子计算机时代高速发展阶段，而且以更精确、更快速的方式发展，完成了人们过去难以置信的科学计算成果.

以圆周率 π 为例，人类的探求为之奋斗了几千年，从中观察到人类文明标志的各个里程碑.

我国古代为了度量路程长短，发明了"记里鼓"，那时人们通过直接绳索度量便得出"周三径一"的结论，也就是说给出圆周率的值为 3.

到了公元前 3 世纪，古希腊数学力学家阿基米德在它的《圆的度量》一书中，介绍了用圆的内接正多边形和外切正多边形的周长来逼近圆的周长，他得到圆周率的值介于 $\frac{223}{71}$ 与 $\frac{22}{7}$ 之间，大约为 3.14，人类对圆周率的认识向前推进了一大步.

大约在公元 150 年，著名天文学家托勒密在他所著的《数学汇编》中，圆周率数值给出为 $\frac{377}{120}$，约为 3.141 67，这个结果比阿基米德的结论又前进了一大步.

我国对圆周率研究有悠久历史，颇有建树的魏晋时期的数学家刘徽在他的《九章算术注》中提出著名的割圆术，给出求圆周率的具有当

代极限思想方法，他对圆作内接正多边形，即割圆，他说“割之弥细，所失弥少，割之又割以至不可割，则与圆合体无所失矣”. 在公元 263 年他以3 072边的正内接多边形的面积逼近圆面积，求得圆周率为 $\frac{3\,927}{1\,250}=3.141\,6$，这一结果比托勒密更精密了一步，人们为了纪念他，将此结果称之为徽率.

在公元五世纪，我国南北朝时期，著名数学家祖冲之，应用刘徽的割圆术，以内接正 12 288 边形和正 24 576 边形的面积的计算，得到圆周率在 3.141 592 6 与 3.141 592 7 之间，并以简捷的分数 $\frac{22}{7}$（粗率或约率）和 $\frac{355}{113}$（密率）给出. 祖冲之的密率使人类探求圆周率达到相当高的精度阶段. 整个世界后 900 年无人再突破这一成果，为了纪念祖冲之这一卓越成果，人们将圆周率称之为祖率，甚至将月球上一山脉命名为“祖冲之”.

到公元 1424 年，阿拉伯数学家阿尔·卡西，以圆内接和外切正 805 306 368 边的周长计算得到圆周率更新的成果，具有 17 位有效数字的圆周率为 3.141 592 653 589 793 25，首次打破祖冲之的记录.

以后，德国——荷兰数学家鲁多尔夫在 1610 年将圆周率计算到小数点后 35 位，这是他一生心血的结晶，人们为了纪念他，在他的墓碑上刻下了他的圆周率 35 位小数的结果，德国人至今将此圆周率称为鲁多尔夫数.

然而用割圆术的几何方法计算圆周率走到难以再前进之际，法国

数学家韦达在 1593 年首次给出圆周率计算解析式. 从此圆周率计算开辟了新思想、新途径. 圆周率的新记录一个接一个的出现，打破新纪录时间越来越短. 1706 年英国数学家梅钦将圆周率结果突破百位，以后到 1842 年达到 200 位，1854 年突破 400 位，1872 年，英国数学家威廉·尚克斯将圆周率 π 值计算到小数点后 707 位. 到了 20 世纪计算机出现并发展，圆周率 π 计算到千位、万位、亿位的结果都不新奇，而且在算法上也越来越更新，收敛速度也更快速. 如 1976 年 Salamin 和 Brent 分别发表文章给出 π 的新算式，利用椭圆积分的高斯方法和勒让德的椭圆积分关系，给出如下算式：

置 $a=0,\ b=1,\ c=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ d=\dfrac{1}{4},\ e=1$，然后按公式计算：

$a:=b,\ b:=\dfrac{b+c}{2},\ c:=\sqrt{ca},\ d:=d-e(b-a)^2,\ e:=2e$ 重复依给定的次序计算，每次更新计算输出

$f:=b^2/d,\ g:=(b+c)^2/(4d)$

的结果. 计算结果表明 f、g 很快收敛于 π 的结果，以上计算 π 的具有 36 位精确值是 3.141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 502 88.

由上讨论可知，数学问题的计算总离不开算法. 当代大量计算又离不开计算机，利用计算机处理任何问题，首先必须建立算法. 一般算法的定义比较抽象，这里我们只研究数学问题运用计算机所实现的数值型的确定性算法. 本书介绍的内容是中学生可以接受的数学问题的数值方法，一方面配合现行中学教材算法部分同步提高，此外还为中学生进一步深入学习算法和其他有关内容打下一个良好基础. 为初步

建立数学问题的数值算法的概念，首先观察一例.

例 1 已知平面上三点 $P_1(2, 3)$，$P_2(-3, 1)$，$P_3(4, -3)$. 求 $\triangle P_1P_2P_3$ 的面积.

解 方法一：

利用三角形的面积 $= \frac{1}{2}\times$ 底 $\times$ 高

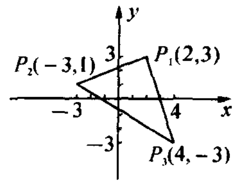

图 1

有 $|P_2P_3| = \sqrt{(4+3)^2+(-3-1)^2} = \sqrt{65}$.

P_2P_3 所在直线方程为 $y-1 = \frac{-3-1}{4+3}(x+3)$，

即 $4x+7y+5=0$.

点 P_1 到 P_2P_3 所在直线的距离为：

$$h = \frac{|4\times 2+7\times 3+5|}{\sqrt{4^2+7^2}} = \frac{34}{\sqrt{65}}$$

所以，

$$S_{\triangle P_1P_2P_3} = \frac{1}{2}\times|P_1P_2|\times h = \frac{1}{2}\times\sqrt{65}\times\frac{34}{\sqrt{65}} = 17.$$

方法二：应用海伦公式 $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$，其中，$a$，$b$，$c$ 是已知三角形的三边长，$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$，即该三角形周长的一半.

$$a = |P_2P_3| = \sqrt{65} = 8.062\,257\,748.$$

$$b = |P_3P_1| = \sqrt{(4-2)^2+(-3-3)^2}$$

$$= 2\sqrt{10} = 6.324\,555\,32.$$

$$c = |P_1P_2| = \sqrt{(2+3)^2+(3-1)^2} = \sqrt{29} = 5.385\,164\,807.$$

$$p=\frac{1}{2}(a+b+c)=9.885\,988\,938.$$

$$S_{\triangle P_1P_2P_3}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$=\sqrt{9.885\,988\,938\times 1.823\,731\,19\times 3.561\,433\,618\times 4.500\,824\,131}$$

$$=\sqrt{289.000\,000\,1}=17.$$

方法三：应用 $S_{\triangle P_1P_2P_3}=\frac{1}{2}|P_1P_2|\times|P_1P_3|\times\sin\angle P_2P_1P_3$

由方法二知：$|P_1P_2|=\sqrt{29}$，$|P_1P_3|=\sqrt{40}$，**由余弦定理**

$$\cos\angle P_2P_1P_3=\frac{|P_1P_2|^2+|P_1P_3|^2-|P_2P_3|^2}{2|P_1P_2|\cdot|P_1P_3|}$$

$$=\frac{29+40-65}{2\sqrt{29}\cdot 2\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{290}}.$$

$$\therefore\ \sin\angle P_2P_1P_3=\sqrt{1-\cos^2\angle P_2P_1P_3}$$

$$=\sqrt{1-\frac{1}{290}}=\frac{17}{\sqrt{290}},$$

因此，

$$S_{\triangle P_1P_2P_3}=\frac{1}{2}\times\sqrt{29}\times 2\sqrt{10}\times\frac{17}{\sqrt{290}}=17.$$

方法四：利用平面解析几何三角形面积坐标法计算公式：

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}\text{的绝对值}$$

$$=\frac{1}{2}|x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-y_1x_2-y_2x_3-y_3x_1|$$

其中，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，如果$\triangle ABC$三顶点A，B，C是按逆时针顺序排列，则上述结论绝对值可以去掉，因为结果必为非负数. 于是本题有

$$S_{\triangle P_1P_2P_3}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}2 & 3 & 1\\ -3 & 1 & 1\\ 4 & -3 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}(2+9+12-4+6+9)=17$$

自然，还有其他一些计算三角形面积的算法，这里不再一一罗列. 以上四种算法如何在计算机上程序化实现. 现分别介绍各算法的程序步骤.

各种算法在程序设计时，表达形式有多种. 传统的方式是用流程框图形式表示，它有步骤明确、表达清晰直观等优点，对中、小型算法较为方便. 程序设计表达另一常用形式是用伪代码表示算法. 所谓伪代码是指用介于自然语言和计算机语言之间的一种代码来描述算法，它表达形式比较灵活自由，与计算机语言比较接近，因此很容易利用计算机的各种语言转化成所需的程序. 现对例1的四种算法用流程框图和伪代码如何描述分别给予介绍.

(1)算法一流程图

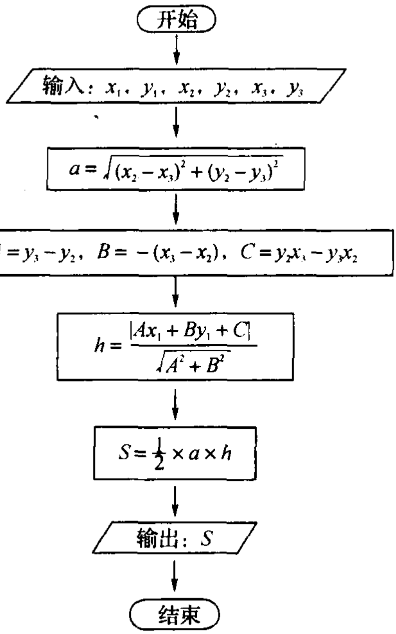
开始
输入：x_1，y_1，x_2，y_2，x_3，y_3
$a=\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2}$
$A=y_3-y_2$，$B=-(x_3-x_2)$，$C=y_2x_3-y_3x_2$
$h=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$
$S=\frac{1}{2}\times a\times h$
输出：S
结束

图 2

(2)算法二流程图

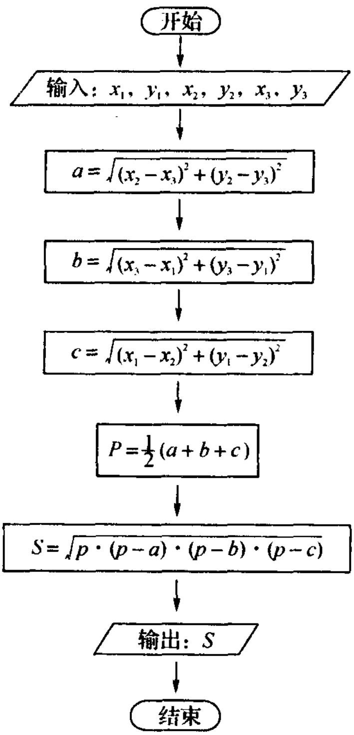
开始
输入：x_1，y_1，x_2，y_2，x_3，y_3
$a=\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2}$
$b=\sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2}$
$c=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$
$P=\frac{1}{2}(a+b+c)$
$S=\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$
输出：S
结束

图 3