高等学校教材

线性代数与解析几何

陈发来　陈效群　李思敏　王新茂

3

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

线性代数与解析几何

Xianxing Daishu yu Jiexi Jihe

陈发来　陈效群　李思敏　王新茂

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容简介

本书是国家精品课程“线性代数与解析几何”的主讲教材。内容包括：向量与复数，空间解析几何，线性方程组，矩阵与行列式，线性空间，线性变换，欧几里得空间，实二次型等，同时附有多个应用教学案例。本书特点是强调几何与代数的贯通与融合，强调从具体到抽象的思维方式，以及从问题出发引入概念与内容的教学模式。

本书适合大学本科非数学类理工科专业学生学习，也可作为各类大专院校师生的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数与解析几何/陈发来等编．—北京：高等教育出版社，2011.7

ISBN 978-7-04-032280-4

Ⅰ.①线… Ⅱ.①陈… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材②解析几何-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2②O182

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 120602 号

策划编辑 李 蕊　责任编辑 贾翠萍　封面设计 张 志　版式设计 王艳红
插图绘制 尹文军　责任校对 张小镝　责任印制 田 甜

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	廊坊市科通印业有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787×960　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	18	版　　次	2011年7月第1版
字　　数	330 000	印　　次	2011年7月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	24.70元

物 料 号　32280-00

前　　言

线性代数与解析几何是大学数学中最基本、最重要的课程之一，其内容是讲授矩阵运算的原理、线性空间与线性变换的理论以及空间解析几何的基本知识。该课程不仅是学习其他课程及学科知识的基础，而且其理论和方法在自然科学与工程技术领域等也有着广泛的应用。此外，该课程对于培养学生的抽象思维能力与空间想象能力也具有重要的作用。

本书是为了适应高校非数学类专业数学课程教学改革，根据作者讲授此课使用的讲义编写而成。长期以来，在我国理工科大学数学教学中，线性代数都是作为一门独立的课程开设，而解析几何则作为微积分的一部分置于微积分课程体系中。20 世纪 80 年代末，陈省身先生倡导将线性代数与解析几何课程整合，并在南开大学试点。尽管出现了担心几何被代数吃掉的状况，但这一新的体系逐步获得了国内同行的认可。从 2004 年开始，我们借鉴上述做法，在中国科学技术大学针对非数学类专业开设了“线性代数与解析几何”课程。经过七年多的教学实践，我们逐步对这门课程的指导思想、课程体系以及教学方法等有了较为清晰的理解。

我们认为，线性代数与解析几何课程首先要解决的问题是将线性代数与解析几何的内容有机整合，而不是简单地拼凑。在讲授线性代数内容的同时，要以解析几何为背景及应用的对象。而讲授解析几何时，则要以线性代数为工具，使得两者相辅相成。线性代数与解析几何课程要解决的另一个问题，是解决线性代数部分内容过于抽象的问题。线性代数被普遍认为是一门比较难学、难教的课程。主要困难在于，同微积分相比，线性代数的公理化体系与概念太抽象。但是，学生必须通过这一难关，必须经过从“具体的数学”到“抽象的数学”的过渡。如何让学生学起来容易而又不降低教学质量甚至提高教学质量，也是这一课程努力的目标。

本书在写作上具有以下特点。第一，一些抽象的概念与内容都以较为具体的对象引入。例如，通过线性映射引入矩阵乘法的定义，通过初等变换化简矩阵所得非零行数引入矩阵的秩的概念，通过图形变换引入线性变换的概念，由数组空间引入一般线性空间的概念与内容，等等。第二，从问题出发，引入要研究的内容。例如，从解线性方程组出发，为解决解的存在性、唯一性、公式解、解的几何结构等问题，引入行列式、矩阵运算、线性空间等概念与内容。第三，本书强调

代数与几何的融合，代数为几何提供研究方法，几何为代数提供直观背景。例如，介绍行列式的概念时强调它的几何意义，介绍线性相关、线性无关以及向量组的秩的概念时用生成子空间的维数解释，并给出正交矩阵与旋转变换的关系、特征值与特征向量的几何含义，以及用二次型研究二次曲线与曲面的分类，等等。第四，注重知识的应用，培养学生利用所学知识解决实际问题的能力，为此在本书附录增加了线性代数的若干应用教学案例。

全书共分八章及一个附录。内容包括向量与复数、空间解析几何、线性方程组、矩阵与行列式、线性空间、线性变换、欧几里得空间、实二次型、线性代数应用教学案例等。其中加“*”号的章节为选学内容，教师与学生可根据自己的安排与兴趣选讲 (学)。

本书曾作为讲义在中国科学技术大学少年班、物理、力学、化学、生物、信息、计算机等专业试讲多年，在此期间中国科学技术大学数学系多位任课教师提出了宝贵的修改意见；作者与北京航空航天大学李尚志教授经常性的讨论也为本书的写作提供了指导性意见；特别感谢南开大学孟道骥教授对本书提出的有益建议，在此一并致谢。

由于时间仓促、写作水平有限，书中错误在所难免，热诚欢迎广大读者批评指正。

作　者

2011 年 4 月于中国科学技术大学

目　　录

第一章　向量与复数

解析几何中最基本的方法是坐标法. 通过在平面或空间中引入坐标系, 将平面或空间中的点用它的坐标来表示, 几何图形就可以通过点的坐标所满足的方程来表示, 也就将几何问题转化为代数问题. 通过代数运算来解决几何问题是解析几何的基本思想.

解析几何中另一种重要方法是向量法, 它也是将代数运算引入几何学的方法. 向量法不需要引入坐标系, 具有很强的几何直观, 同时也可以进行代数运算. 利用向量法可以很简洁地解决许多问题, 在力学、物理学和工程技术领域等有着广泛的应用. 此外, 向量也是我们学习抽象线性空间理论的基础.

中学教材中介绍了平面向量和空间向量的加法、数乘、数量积等运算, 以及向量法在求解平面几何和空间几何问题中的应用. 为保证本教材的自完备性, 我们还是从向量的定义出发, 完整地介绍向量的各种运算规则, 并着重强调它与后续章节的关系.

本章中我们讨论的向量均为三维空间中的向量.

§1.1　向量的线性运算

§1.1.1　向量及其表示

向量的概念来源于物理学. 很多物理量不仅有大小, 而且有方向, 例如速度、位移、力等等. 抛开它们的物理意义, 只保留大小与方向两个要素, 就抽象为数学中的向量概念: 既有大小, 又有方向的量称为**向量**.

一般用有向线段表示一个向量, 线段的长度表示它的大小, 线段的方向表示它的方向. 以空间中 A 为起点, B 为终点的有向线段所表示的向量记为 $\overrightarrow{AB}$, 有时常用黑斜体小写字母 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 等表示向量. 如果两个向量大小相等、方向相同, 就称这两个向量是**相等**的.

如果两个向量的大小相等而方向相反, 则称这两个向量互为**反向量**. 向量 $\boldsymbol{a}$ 的反向量记为 $-\boldsymbol{a}$, 有时也称为 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**.

向量的长度也称为向量的**模**, 向量 $\boldsymbol{a}$ 的模用 $|\boldsymbol{a}|$ 表示. 模为 1 的向量称为**单位向量**, 模为零的向量称为**零向量**, 记作 $\mathbf{0}$. 零向量的起点和终点是重合的, 因此

它没有确定的方向.

如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同或相反, 就称它们**平行**, 记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的方向互相垂直, 就称它们**垂直**或**正交**, 记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. 规定零向量与任何向量都平行且正交.

向量 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 所夹的角 $\angle AOB$ 称为它们之间的**夹角**. 向量夹角介于 0 与 π 之间. 向量 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 平行当且仅当它们之间的夹角为 0 或 π, 而向量 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 垂直当且仅当它们之间的夹角为 $\dfrac{\pi}{2}$.

§1.1.2 向量的线性运算

将物理中速度、力的合成法加以抽象, 就得到向量加法的定义. 给定具有相同起点 O 的两个向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$, 则以 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ 为邻边的平行四边形的对角线向量 $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$ (图 1.1) 就称为这两个向量的**和**, 记作

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\quad 或者\quad \boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

这种求和的方法称为**平行四边形法则**.

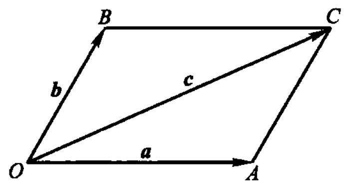

图 1.1 向量的加法

从图 1.1 可知, $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}$, 所以 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}$, 这称为两个向量的和的**三角形法则**. 由定义不难看出向量的加法满足以下的性质:

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a};\tag{1.1}$$

$$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c};\tag{1.2}$$

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a};\tag{1.3}$$

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}.\tag{1.4}$$

向量的**减法**为向量加法的逆运算. 对于向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$, 定义向量减法 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$.

定义向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积为一个向量, 记为 $\lambda\boldsymbol{a}$, 它的模为 $|\lambda||\boldsymbol{a}|$, 它的方向规定为: 当 $\lambda>0$ 时, 与 $\boldsymbol{a}$ 同向; 当 $\lambda<0$ 时, 与 $\boldsymbol{a}$ 反向. 这种运算称为向量的

数乘. 由数乘的定义可知 $0\,\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, 并且对任意实数 λ,μ, 都有

$$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}; \tag{1.5}$$

$$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}; \tag{1.6}$$

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}; \tag{1.7}$$

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}. \tag{1.8}$$

对于非零向量 $\boldsymbol{a}$, 用 $\boldsymbol{a}^0$ 表示与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量, 则由向量数乘的定义知

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

向量的加法与数乘运算统称为向量的**线性运算**. 线性运算并非向量所特有. 事实上, 在很多非空集合中都可以定义所谓的加法与数乘运算, 并且满足相应于 (1.1)—(1.8) 的 8 条性质. 我们将这样的集合 (附带加法与数乘运算) 称为**线性空间**或**向量空间**, 线性空间中的元素称为 (抽象的) 向量. 具体内容详见本书第五章.

§1.1.3 向量的共线与共面

一组向量称为是**共线的**, 如果它们都平行于某条直线. 一组向量称为是**共面的**, 如果它们都平行于某个平面.

命题 1.1.1 向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线的充分必要条件是存在不全为零的实数 λ,μ, 使得

$$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}.$$

证明 必要性: 设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线, 不妨设 $\boldsymbol{a}$ 不是零向量. 若向量 $\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 同向, 则 $\boldsymbol{b}=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$, 因此 $\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}+(-1)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$. 若向量 $\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 反向, 则 $\boldsymbol{b}=-\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$, 因此 $\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}+1\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

充分性: 设 λ,μ 为不全为零的实数且 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$. 不妨设 $\mu\neq 0$, 则 $\boldsymbol{b}=-\frac{\lambda}{\mu}\boldsymbol{a}$, 因此 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线. □

命题 1.1.2 向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面的充分必要条件是存在不全为零的实数 λ,μ,ν, 使得

$$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}.$$

证明 必要性: 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 中有两个向量共线, 例如 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线, 则存在不全为零的实数 λ,μ, 使得 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$. 从而 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+0\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, 其中 $\lambda,\mu,0$ 不全为零.

设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 中任意两个向量都不共线. 取定一点 O, 作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$. 过 C 点作 OB 的平行线交直线 OA 于点 D (图 1.2), 则存在实数 λ,μ, 使得 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$. 移项后得 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+(-1)\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, 其中 $\lambda,\mu,-1$ 不全为零.

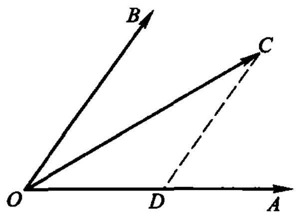

图 1.2 三向量共面条件

充分性: 设存在不全为零的实数 λ,μ,ν, 使得 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$. 不妨设 $\nu\neq 0$, 于是 $\boldsymbol{c}=-\dfrac{\lambda}{\nu}\boldsymbol{a}-\dfrac{\mu}{\nu}\boldsymbol{b}$. 因此 $\boldsymbol{c}$ 是以 $-\dfrac{\lambda}{\nu}\boldsymbol{a},-\dfrac{\mu}{\nu}\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的对角线, 从而 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面. □

定义 1.1.1 设 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 为一组向量, $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为一组实数. 称向量

$$\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{a}_n$$

为向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 的**线性组合**.

利用这个定义, 命题 1.1.1 和命题 1.1.2 也有如下的表述方式: 两个向量共线当且仅当某一个向量为另一个向量的线性组合 (倍数); 三个向量共面当且仅当某一个向量为另外两个向量的线性组合.

定义 1.1.2 一组向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 称为**线性相关**, 如果存在不全为零的实数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, 使得

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{0}.$$

反之, 不是线性相关的一组向量称为**线性无关**. 也就是说, 如果上式成立, 则 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$.

利用命题 1.1.1, 命题 1.1.2 可以得到

- 一个向量 $\boldsymbol{a}$ 线性相关当且仅当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$;
- 两个向量线性相关当且仅当它们共线;
- 三个向量线性相关当且仅当它们共面.

类似可以得到向量线性无关的等价条件. 线性相关与线性无关是线性代数中最基本的概念之一, 在本书第五章中我们会作进一步的讨论.

例 1.1.1 对任意向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$, 证明: 向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$ 线性相关.

证明 我们只要证明, 存在不全为零的实数 λ,μ,ν 使得

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})+\mu(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})+\nu(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c})=\boldsymbol{0}.$$

化简上式得

$$(\lambda+\mu+\nu)\boldsymbol{a}+(\lambda-\mu+2\nu)\boldsymbol{b}+(\lambda-\mu+2\nu)\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}.$$

所以只要证明方程组

$$\begin{cases}\lambda+\mu+\nu=0,\\ \lambda-\mu+2\nu=0\end{cases}$$

有不全为零的解. 易见 $\lambda=-3,\mu=1,\nu=2$ 为一组非零解, 因此三个向量线性相关. □

例 1.1.2 证明: 空间中任意三点 A,B,C 共线的充分必要条件是, 存在不全为零的实数 k_1,k_2,k_3 使得对任意点 O 都有

$$k_1\overrightarrow{OA}+k_2\overrightarrow{OB}+k_3\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{0}\quad 且\quad k_1+k_2+k_3=0.$$

证明 必要性: 设 A,B,C 三点共线, 则向量 $\overrightarrow{AB}$ 与向量 $\overrightarrow{AC}$ 共线. 因此存在不全为零的实数 λ,μ, 使得 $\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{0}$, 即

$$\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+\mu(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})=\boldsymbol{0}.$$

化简得 $(-\lambda-\mu)\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}+\mu\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{0}$. 取 $k_1=-\lambda-\mu$, $k_2=\lambda$, $k_3=\mu$, 则

$$k_1\overrightarrow{OA}+k_2\overrightarrow{OB}+k_3\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{0}\quad 且\quad k_1+k_2+k_3=0.$$

充分性: 设存在不全为零的 k_1,k_2,k_3 满足条件, 不妨设 $k_1\neq 0$. 则 $k_3=-k_1-k_2$, 且 $k_1\overrightarrow{OA}+k_2\overrightarrow{OB}+(-k_1-k_2)\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{0}$. 所以

$$k_1(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})+k_2(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})=\boldsymbol{0},$$

即 $k_1\overrightarrow{CA}+k_2\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{0}$. 由于 k_1,k_2 不全为零, 向量 $\overrightarrow{CA}$ 与 $\overrightarrow{CB}$ 共线, 即 A,B,C 三点共线. □

利用向量运算可以解决许多几何问题, 其思想是将几何性质转化为向量的代数运算.

例 1.1.3 $\triangle ABC$ 中, D, E 分别是边 BC, AC 的中点, AD, BE 相交于点 G (图 1.3) . 证明: $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.

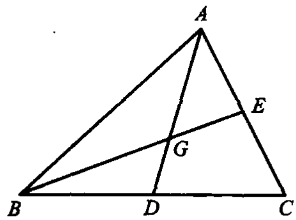

图 1.3

证明 设 $\overrightarrow{AG}=x\overrightarrow{AD}$, 由于 D 为 BC 的中点, $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$. 所以

$$\overrightarrow{AG}=\frac{x}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}).$$

由于 B, G, E 共线, 根据例 1.1.2, 可设 $\overrightarrow{AG}=y\overrightarrow{AB}+(1-y)\overrightarrow{AE}$. 由于 E 为 AC 的中点, 所以

$$\overrightarrow{AG}=y\overrightarrow{AB}+\frac{(1-y)}{2}\overrightarrow{AC}.$$

因此

$$\left(\frac{x}{2}-y\right)\overrightarrow{AB}+\left(\frac{x}{2}-\frac{1-y}{2}\right)\overrightarrow{AC}=\mathbf{0}.$$

由于 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 不共线, 由命题 1.1.1 得

$$\begin{cases}\dfrac{x}{2}-y=0,\\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{1-y}{2}=0.\end{cases}$$

解得 $x=\frac{2}{3}$, 因此 $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$. □

§1.2 坐 标 系

§1.2.1 仿射坐标系

在中学我们学习了直角坐标系. 在直角坐标系中, 三个坐标轴两两垂直. 本节我们将坐标系推广到坐标轴不相互垂直的情形. 我们先陈述向量的基本定理.