SHIJI GAOZHI GAOZHUAN SHIYONG JIAOCAI XILIE

世纪高职高专实用教材 系列

张圣勤 于德明 主编

高等数学

GAODENG SHUXUE

上册

上海教育出版社

高等数学(上册)

Gaodeng Shuxue (Shangce)

主　编　张圣勤　于德明
副主编　马　萍　万阿英　刘春佳
参　编　张圣勤　赵宁军　戚民驹　杨晓春
巴玉强　杜　军　杨汉芳　聂　华
马　萍　万阿英　刘春佳　黄勇林
于德明　王珍娥　戎　笑　钱黎明
周　伟　刘必立

上海教育出版社

世纪高职高专实用教材系列
高等数学(上册)
张圣勤　于德明　主编
上海世纪出版股份有限公司
上　海　教　育　出　版　社　出版发行
易文网:www. ewen. cc
(上海永福路 123 号　　邮政编码:200031)
各地新华书店经销　　常熟新骅印刷厂印刷
开本 787 × 1092　1/16　印张 13　字数 229,000
2006 年 8 月第 1 版　　2007 年 1 月第 2 次印刷
ISBN 978-7-5444-0808-0/G · 0651　定价:22.50 元
(如发生质量问题,读者可向工厂调换)

“世纪高职高专实用教材系列”
编写指导委员会

出版说明

高等职业教育的迅速发展是世纪之交我国高等教育大众化进程中的一个亮点.目前人们已就高职教育发展达成了一个基本共识,即由规模扩张转向内涵发展.后者的任务其实更为艰巨.而高职内涵发展的核心是课程建设,只有有了一套能体现高职教育规律,符合高职学生学习特点,与用人单位岗位能力要求相匹配的课程体系,才能有效地整合和利用各种资源,实现高职作为一种特殊类型高等教育的经济与社会价值,以及人的发展价值.

然而,目前高职课程仍然存在许多问题.现有的高职课程无论是结构还是内容,基本上是大学课程的压缩,理论性、学术性比较强,高职特色体现得不够.但是,高职并不是低层次的高等教育,尽管目前的高职主要局限于大专层次,但高职更多的是有别于科学教育、工程教育的另一种类型的高等教育,是一种培养以工艺设计、设备维护、现场管理为主要工作内容的技术型人才的教育.技术型人才在能力结构上与工程型人才、理论型人才有着本质区别,这就决定了高职课程不能仅仅在内容上浅于大学课程,而是必须形成自己特有的课程模式与内容体系.

这将是一条漫长而又非常艰难的道路.我们出版这套教材的目的,便是期望能为高职现代课程体系的建设做出一点贡献,进而推动高职人才培养模式的改革.为了使得这套教材尽量科学、符合高职实际,在教材开发过程中,我们采取了职教课程专家、高职院校骨干教师、出版社密切合作的工作模式.首先,教材是课程的物化.教材不仅仅是知识的表达,更重要的是课程理论的体现.只有有了科学的高职课程理论,才能开发出科学的高职教材.为此,我们华东师大职成教所组织课程专家,深入地介入了这次教材开发的全过程.这一工作虽然非常辛苦,但看到我们的理论能真正地转化为实际成果,我们仍然感到非常欣慰.其次,必须有高职教师的参与.以往的许多高职教材是由大学教师开发的.大学教师虽然对专业的理论体系非常熟悉,但对高职学生的学习特点以及高职教育的特色往往认识不深,使得开发出来的教材普遍偏深、偏难,也不够实用,影响了高职教育质量的提高.事实上,真正了解高职学生的还是高职院校的教师.并且,许多高职教师已自发地在课程改革方面进行了不少探索,积累了许多有价值的经验,汇聚他们的这些经验,能够大大加快新教材的开发工作.为此,我们这次教材的具体编写工作基本上由高职教师

完成.再次,为了使得新教材在形式上更为活泼,更加符合教材开发的技术要求,我们也充分吸收了上海教育出版社的研究力量.

考虑到教材开发的复杂性,我们这次的工作暂从通用性较强的高职普通文化课程入手,以后再逐步过渡到专业课程的教材开发.也正因为此,这次的教材开发没有邀请行业专家参与.这套教材命名为"世纪高职高专实用教材系列",首批出版的教材包括:《马克思主义与当代中国》、《职业道德与法律》、《职业生涯规划》、《体育与健康》、《汉语读写教程》等.这些课程是在专家们共同研讨的基础上,遵照教育部的有关要求确定的.在课程内容的选择上力图体现出生活性、浅显性、实用性原则,要求课程内容与高职学生的现实生活密切结合,并服务于高职学生的专业学习,浅显易懂,充分利用案例和图解的方式来表达一些比较复杂的理论.

总之,我们已为这套教材的出版做了大量的前期理论研究.但限于能力等多种因素,定有许多不能如意之处,恳请读者批评指正,以使之更加完善.同时,我们也期望能有更多富有特色的高职教材出版,共同推动高职教育事业的发展.

石伟平

2005年7月于上海

前　言

欢迎使用这本高职数学教材.本教材是根据教育部现行普通高级中学数学教学大纲和高等职业教育数学教学大纲、教学基本要求,组织部分高等职业技术院校的资深数学教师编写的.本教材是教育部高教司《二年制高职普通文化课开发研究暨二年制高职高专教育教学改革》项目内容之一.主要适用于招收高中毕业生或中等职业教育毕业生的高职高专工科学校,也可作为一般工程技术人员的参考书.

在本教材的编写过程中,作者本着为我国的高职高专教育构建一套适合于21世纪工科高职教育的公共课程体系的指导思想,以“符合大纲要求,紧跟科技发展,加强实际应用,增加知识容量,优化结构体系”为原则,以新世纪社会主义市场经济对人才素质的要求为前提,以高职数学在高职教育中的功能定位和作用为基础,在内容上删去了一些繁琐的推理和证明,比传统数学教材增加了一些实际应用的内容,力求把数学内容讲得简单易懂,重点让学生接受高等数学的思想方法和思维习惯;在习题的编排上加入了大量的例题和习题,力求做到习题难易搭配适当,知识与应用结合紧密,掌握理论与培养能力相得益彰;在结构的处理上注意与现行高中及中职教学内容的衔接,同时注意吸收国内外高职教材的优点,照顾到高职各专业的特点和需要,适当精简结构,使之更趋合理.为跟上当今计算机应用的发展步伐,本书特意增加了Matlab软件的应用和数学建模的内容.书中带有*号的内容为选学的内容.

本教材共分上、下两册.本册是上册,共分七章,分别介绍了初等函数,一元函数的极限与连续,导数与微分,导数的应用,一元函数积分学,多元函数微积分初步,数学实验Matlab软件的应用(上)等内容.

本教材由上海电机技术高等专科学院张圣勤、浙江机电职业技术学院于德明二位副教授担任主编,并由张圣勤负责最后统稿,由浙江湖州职业技术学院马萍、内蒙古呼伦贝尔学院万阿英、福建工业学校刘春佳三位副教授担任副主编.参加本教材各章编写的有上海电机技术高等专科学院张圣勤、赵宁军、戚民驹,常州纺织服装职业技术学院杨晓春,郑州职业技术学院巴玉强,兰州职业技术学院杜军、杨汉芳,新疆机电职业技术学院聂华,浙江湖州职业技术学院马萍,内蒙古呼伦贝尔学院万阿英,福建工业学校刘春佳,云南工业职业技术学院黄勇林,浙江机电职业技术学院于德明、王珍娥、戎笑,南通纺织职业技术学院钱黎明,常州机电职业技术学院周伟,江苏财经职业技术学院刘必立等.

在本书的编写过程中,得到了各参编院校的各级领导的关心和支持,创造条件,帮助我们参阅了有关的文献和教材,在此一并表示衷心的感谢.由于时间仓促,加之水平有限,教材中疏漏错误之处在所难免,恳切期望使用本教材的师生多提意见和建议,以便于再版时更正.

编　者

2006年2月

目　　录

前言 …… 1

第一章　函数的极限与连续 …… 1
　第一节　初等函数 …… 1
　第二节　极限的概念 …… 8
　第三节　极限的运算 …… 13
　第四节　两个重要极限 …… 16
　第五节　函数的连续性 …… 19
　本章小结 …… 23
　数学史典故一 …… 23

第二章　导数与微分 …… 26
　第一节　导数的概念 …… 26
　第二节　函数的和、差、积、商的求导法则 …… 33
　第三节　复合函数的求导法则 …… 37
　第四节　隐函数及参数方程所确定的函数的导数、高阶导数 …… 41
　第五节　经济类函数的边际分析与弹性 …… 45
　第六节　函数的微分 …… 50
　本章小结 …… 54
　数学史典故二 …… 56

第三章　导数的应用 …… 59
　第一节　拉格朗日中值定理与罗必塔法则 …… 59
　第二节　函数的单调性与极值 …… 62
　第三节　函数的最大值和最小值 …… 67
　第四节　曲线的凹凸与函数作图 …… 69
　本章小结 …… 73
　数学史典故三 …… 73

第四章　不定积分 …… 76
　第一节　不定积分的概念 …… 76

第二节　第一类换元积分法 …… 81
第三节　第二类换元积分法 …… 86
第四节　分部积分法 …… 88
本章小结 …… 92
数学史典故四 …… 93

第五章　定积分及其应用 …… 95
第一节　定积分的概念 …… 95
第二节　定积分的基本公式 …… 101
第三节　定积分的换元法和分部积分法 …… 105
第四节　广义积分 …… 108
第五节　定积分在几何上的应用 …… 112
第六节　定积分在其他方面的应用 …… 117
本章小结 …… 122
数学史典故五 …… 124

第六章　多元函数微积分初步 …… 126
第一节　多元函数的概念 …… 126
第二节　偏导数与全微分 …… 129
第三节　复合函数、隐函数的偏导数 …… 134
第四节　多元函数的极值 …… 138
第五节　二重积分 …… 142
本章小结 …… 153
数学史典故六 …… 156

第七章　数学实验 …… 159
实验 1　MATLAB 简介、安装与简单运算 …… 159
实验 2　MATLAB 中符号函数及其微积分 …… 163
实验 3　MATLAB 中的多元函数及其微积分 …… 174
数学史典故七 …… 182

附录一　练习题参考答案 …… 185

附录二　常用不定积分公式 …… 189

第一章　函数的极限与连续

极限是研究变量的基本方法和工具，它是学习微积分的基础. 本章将在复习和加深理解函数有关知识的基础上，研究函数的极限和连续等问题.

第一节　初 等 函 数

一、函数概念

在自然科学、工程技术甚至在社会科学中，函数是被广泛应用的数学概念之一.

定义　设 A 是非空数集，若存在对应关系 f，对 A 中任意 x，按照对应关系 f，对应唯一一个 $y \in \mathbf{R}$，则称 f 是定义在 A 上的函数，表示为

$$f: A \to \mathbf{R}.$$

数 x 对应的数 y 称为 x 的**函数值**，表示为 $y = f(x)$，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，数集 A 称为函数 f 的**定义域**，函数值的集合

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

称为函数 f 的**值域**.

坐标平面上的点集

$$G(f) = \{(x,\ y) \mid x \in A,\ y = f(x)\},$$

称为一元函数 $y = f(x)$ 在数集 A 上的**图像**.

例 1　求函数 $\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{\ln(x+2)}$ 的定义域.

解　要使原函数有意义，必须使

$$\begin{cases} 9 - x^2 \geqslant 0, \text{即} -3 \leqslant x \leqslant 3, \\ x + 2 > 0, \text{即}\ x > -2, \\ x + 2 \neq 1, \text{即}\ x \neq -1. \end{cases}$$

所以，函数的定义域是 $(-2,\ -1) \cup (-1,\ 3]$.

例 2　设 $f(x) = x^2 - 3x + 2$，求 $f(1)$，$f(0)$，$f(-1)$，$f(f(x))$.

解　$f(1) = 1^2 - 3 \cdot 1 + 2 = 0$，

$f(0) = 0^2 - 3 \cdot 0 + 2 = 2$，

$f(-1) = (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 2 = 6$，

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= [f(x)]^2 - 3f(x) + 2 = (x^2 - 3x + 2)^2 - 3(x^2 - 3x + 2) + 2 \\ &= x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 3x. \end{aligned}$$

二、函数的简单性质

1. 有界性

定义 设函数 $f(x)$在数集 A 上有定义,若函数值的集合

$$f(x)=\{f(x)\mid x\in A\}$$

有上界(有下界,有界),则称函数 $f(x)$在 A 上**有上界(有下界,有界)**,否则称函数 $f(x)$在 A 上**无上界(无下界,无界)**.

例 3 正弦函数 $f(x)=\sin x$, 因为存在[①] $M=1>0$, 对任意[②] $x\in\mathbf{R}$, 都有 $|\sin x|\leqslant 1$, 所以, $f(x)=\sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 内是有界的.

例 4 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在$(0, 1)$内是无界的.

2. 单调性

定义 设函数 $f(x)$在数集 A 上有定义,若对于任意 $x_1, x_2\in A$,且 $x_1<x_2$, 有

$$f(x_1)<f(x_2)\quad (f(x_1)>f(x_2)),$$

则称函数 $f(x)$在 A **严格增加(严格减少)**.

上述不等式改为

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\quad (f(x_1)\geqslant f(x_2)),$$

称函数 $f(x)$在 A **单调增加(单调减少)**.

函数 $f(x)$在 A 上严格增加、严格减少与单调增加、单调减少,统称为函数 $f(x)$在 A 上**单调**. 严格增加与严格减少统称为**严格单调**. 若 A 是区间,此区间称为函数 $f(x)$的**单调区间**.

从几何直观来看,函数单调增加就是当自变量 x 自左向右变化时,函数图形上升(如图 1-1);函数单调减少,就是自变量 x 自左向右变化时,函数图形下降(如图 1-2).

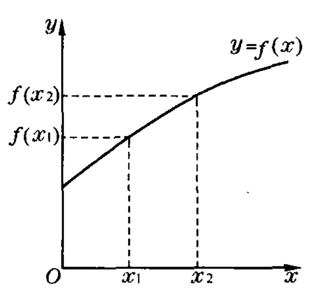


图 1-1

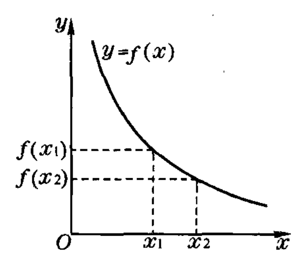


图 1-2

例 5 函数 $f(x)=x^2$ 在区间$[0, +\infty]$内是严格单调增加的,在区间$(-\infty, 0]$内是严格单调减少的,在区间$(-\infty, +\infty)$内函数 $f(x)=x^2$ 不是单调的.

例 6 函数 $f(x)=x^3$ 在区间$(-\infty, +\infty)$内是严格单调增加的.

---

① 本书中,存在也可用符号“∃”表示.

② 本书中,任意取也可用符号“∀”表示.

例 7 函数 $f(x)=C$ (C是常数)在区间$(-\infty,+\infty)$内既是单调增加函数又是单调减少函数.

3. **奇偶性**

定义 函数 $f(x)$定义在数集 A 上,若任意 $x\in A$,有 $-x\in A$, 且

$$f(-x)=-f(x)\quad (f(-x)=f(x)),$$

则称函数 $f(x)$**是奇函数(偶函数)**.

定理 奇函数的图像关于原点对称,偶函数的图像关于 y 轴对称.

4. **周期性**

定义 设函数 $f(x)$定义在数集 A 上,若 $\exists\, l>0$, $\forall\, x\in A$,有 $x\pm l\in A$, 且

$$f(x\pm l)=f(x),$$

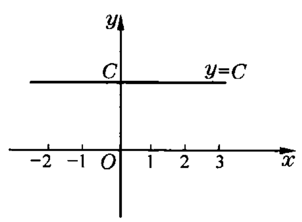
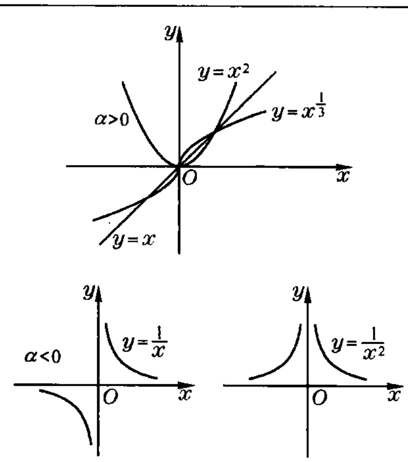
则称函数 $f(x)$是**周期函数**,l 称为函数 $f(x)$的一个**周期**,通常将最小正周期称为函数 $f(x)$的基本周期,简称为周期.

例如,函数 $\sin x$, $\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数.

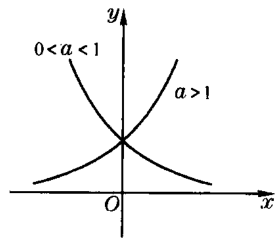
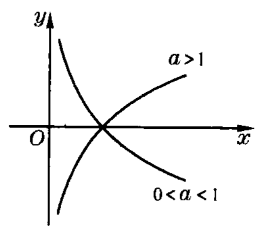
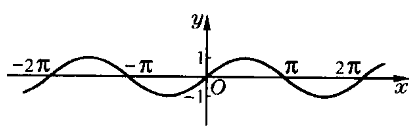
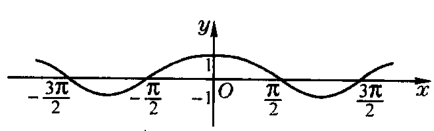
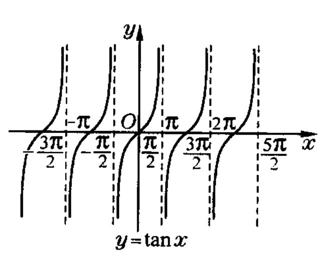
三、基本初等函数

中学里学过的常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为**基本初等函数**. 现列表回顾它们的图形与主要性质:

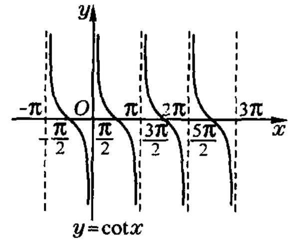
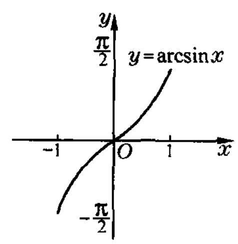
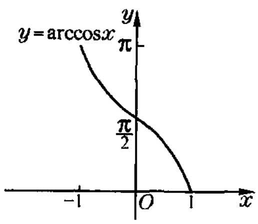
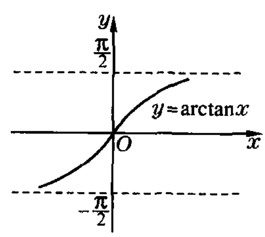
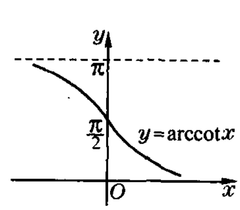
基本初等函数的图形与主要性质

函数名称	表达式	定义域	图形	主要性质
常数函数	$y=C$ (C 为常数)	$(-\infty,+\infty)$		偶函数,有界周期函数,任何正数均为它的周期.图形平行于 x 轴.
幂函数	$y=x^{\alpha}$	α 的值不同,函数的定义域也不同.		图形都经过$(1,1)$点,α为偶数时,图形关于 y 轴对称;α 为奇数时,图形关于原点对称. $\alpha>0$, 函数在第一象限是单调增加的; $\alpha<0$,函数在第一象限是单调减少的.

(续表)

函数名称	表达式	定义域	图形	主要性质
指数函数	$y=a^x$ $\begin{pmatrix} a>0 \\ a\neq 1\end{pmatrix}$	$(-\infty,\ +\infty)$		图形都经过点$(0,\ 1)$，当 $a>1$ 时，函数为增函数；当 $a<1$ 时，函数为减函数.
对数函数	$y=\log_a x$ $\begin{pmatrix} a>0 \\ a\neq 1\end{pmatrix}$	$(0,\ +\infty)$		图形都经过点$(1,\ 0)$，当 $a>1$ 时，函数为增函数；当 $a<1$ 时，函数为减函数.
三角函数	$y=\sin x$	$(-\infty,\ +\infty)$		奇函数，有界周期函数，周期为 2π，在 $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$ 内是单调增加的，在 $\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$ 内是单调减少的.
	$y=\cos x$	$(-\infty,\ +\infty)$		偶函数，有界周期函数，周期为 2π，在 $[(2k-1)\pi,\ 2k\pi]$ $(k\in\mathbf{Z})$ 内是单调增加的，在$[2k\pi,\ (2k+1)\pi]$ $(k\in\mathbf{Z})$ 内是单调减少的.
	$y=\tan x$	$\left\{x \mid x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$		奇函数，周期函数，周期为 π，在 $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ $(k\in\mathbf{Z})$ 内是单调增加的.

（续表）

函数名称	表达式	定义域	图　　形	主要性质
三角函数	$y = \cot x$	$\{x \mid x \neq k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$		奇函数，周期函数，周期为 π，在 $(k\pi,\ (k+1)\pi)$ $(k \in \mathbf{Z})$ 内是单调减少的.
反三角函数	$y = \arcsin x$	$[-1,\ 1]$		奇函数，单调增加. $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$
	$y = \arccos x$	$[-1,\ 1]$		非奇非偶函数，单调减少. $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$
	$y = \arctan x$	$(-\infty,\ +\infty)$		奇函数，单调增加. $-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}$
	$y = \operatorname{arccot} x$	$(-\infty,\ +\infty)$		非奇非偶函数，单调减少. $0 < \operatorname{arccot} x < \pi$

四、复合函数

定义　设函数 $z = f(y)$ 定义在数集 B 上，函数 $y = \varphi(x)$ 定义在数集 A 上，G 是 A 中使 $y = \varphi(x) \in B$ 的 x 的非空子集，即 $G = \{x \mid x \in A,\ \varphi(x) \in B\} \neq \varnothing$，任意 $x \in G$，对应唯

一一个 $y \in B$,再按照对应关系 f 对应唯一一个 z,即任意 $x \in G$ 都对应唯一一个 z,于是在 G 上定义了一个函数,称为 $y=\varphi(x)$ 与 $z=f(y)$ 的**复合函数**,表示为 $z=f[\varphi(x)]$, $x \in G$.

例 8 试求函数 $y=u^2$ 与 $u=\cos x$ 复合而成的函数.

解 将 $u=\cos x$ 代入 $y=u^2$ 中,即得所求的复合函数 $y=\cos^2 x$.

例 9 设 $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=1-x^2$,求 $f[g(x)]$, $g[f(x)]$,并指出定义域.

解 $f[g(x)]=\sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1, 1]$; $g[f(x)]=1-x$, $x \in [0, +\infty]$.

例 10 指出 $y=\sqrt{\ln(e^x+\cos x)}$ 是由哪些函数复合而成的.

解 原函数由 $y=\sqrt{u}$, $u=\ln v$, $v=e^x+\cos x$ 复合而成.

注意 $v=e^x+\cos x$ 是两个函数的加法运算,不是复合运算.

有时一个复合函数可能由三个或更多的函数复合而成.将函数进行复合运算,可以发现新的函数关系,同时在进行函数研究时,可以"分解"复合函数为几个较简单的函数.

五、初等函数

定义 由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合运算构成的,并且可用一个数学式子表示的函数,称为**初等函数**.

例如, $y=x^3-2x^2+3x-5$, $y=\sqrt{\ln x-1}$, $y=x^2\sin x+\cos x$, $y=3^x$ 等.

在工程技术中经常要用到一类双曲函数,他们是由指数函数 $y=e^x$ 与 $y=e^{-x}$ 生成的初等函数.

双曲正弦: $\mathrm{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$; 双曲余弦: $\mathrm{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$;

双曲正切: $\mathrm{th}x=\dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$; 双曲余切: $\mathrm{cth}x=\dfrac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x}=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$.

双曲正弦、双曲余弦和双曲正切的定义域都是实数集 $\mathbf{R}$,双曲余切的定义域是 $\mathbf{R}-\{0\}$.

由双曲函数的定义可以推得双曲函数的公式:

$$\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x=1,\ \mathrm{ch}x+\mathrm{sh}x=e^x,$$

$$\mathrm{ch}x-\mathrm{sh}x=e^{-x},\ \mathrm{sh}(x\pm y)=\mathrm{sh}x\mathrm{ch}y\pm\mathrm{ch}x\mathrm{sh}y,$$

$$\mathrm{th}(x\pm y)=\frac{\mathrm{th}x\pm\mathrm{th}y}{1\pm\mathrm{th}x\mathrm{th}y},\ \mathrm{cth}(x\pm y)=\frac{1\pm\mathrm{cth}x\mathrm{cth}y}{\mathrm{cth}x\pm\mathrm{cth}y}.$$

六、分段函数

定义 在自变量的不同变化范围中,对应法则用不同式子来表示的函数,称为**分段函数**.

例 11 符号函数(如图 1-3) $y=\mathrm{sgn}\,x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$

求 $f(2)$, $f(0)$和 $f(-2)$.

解 $\because 2 \in (0, +\infty)$, $0 \in \{0\}$, $-2 \in (-\infty, 0)$,

$\therefore f(2)=1$, $f(0)=0$, $f(-2)=-1$.

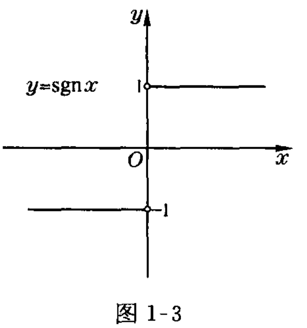


图 1-3

例 12 狄利克雷函数(如图 1-4)

$$y=D(x)=\begin{cases}1,\ x\text{ 是有理数},\\0,\ x\text{ 是无理数}\end{cases}$$

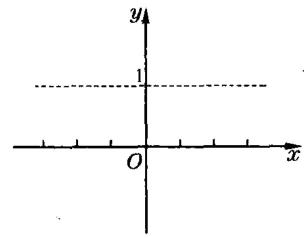


图 1-4

对任意的有理数 r,有 $D(x+r)=D(x)$,

所以 $y=D(x)$ 是周期函数,但没有最小正周期.

例 13 火车站收取行李托运费的规定如下:当行李不超过 50 kg 时,按基本运费计算,如从上海到某地每千克收 0.20 元;当超过 50 kg 时,超重部分按每千克 0.30 元收费. 试求上海到该地的行李托运费 y(元)与重量 x(kg)之间的函数关系式,并画出这函数的图形.

解 当 $x\in[0,50]$ 时,$y=0.2x$,

当 $x\in(50,+\infty)$ 时,$y=0.2\times50+0.3(x-50)=0.3x-5$.

所求函数为:$y=\begin{cases}0.2x, & x\in[0,50],\\0.3x-5, & x\in(50,+\infty),\end{cases}$

图像如图 1-5.

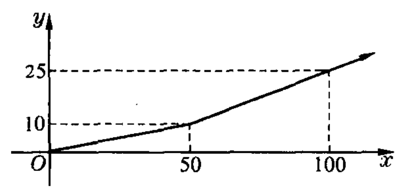


图 1-5

七、经济学中的常用函数

1. **需求函数**

在假定其他因素不变的条件下,商品的需求量 Q 是其价格 P 的函数,称为**需求函数**,记为

$$Q=f(P)\text{ 或 }P=g(Q).$$

一般来说,商品的需求量随价格上升而减少,常见的需求函数有

$$Q=a-bP\ (a>0,\ b>0),$$

$$Q=\frac{a}{Ptc}-b\ (a>0),$$

$$Q=\frac{a-P^2}{b}\ (b>0),$$

$$Q=ae^{-bP}\ (a>0,\ b>0).$$

2. **供给函数**

在假定其他因素不变的条件下,供应商品的价格与相应的供给量的关系,仍用 Q 表示供给量,P 表示价格,其一般形式为

$$Q=h(P).$$

常见的供给函数有

$$Q=-d+cP\ (c>0,\ d>0),$$

$$Q=\frac{aP-d}{cP+d}\ (a>0,\ c>0,\ d>0).$$

3. **收益函数**

若某产品的市场需求量为 Q,价格为 P,则它们的乘积 PQ 称为**总收益**,即总收益

$$R=PQ=Pf(P),$$

其中 $Q = f(P)$ 是需求函数.

某产品的总成本由固定成本与可变成本构成,可以表示为

$$C = C(Q) = C_1 + C_2(Q),$$

其中 C_1 是固定成本,不随产量 Q 变化,而可变成本 $C_2(Q)$是产量 Q 的函数,产量为 Q 的平均成本函数为

$$\overline{C} = \frac{C(Q)}{Q}.$$

$L = R - C$ 称为**利润**,利润为 0 的产量(需求量)Q_0 称为**损益分歧点**.

方程 $L = L(Q) = 0$ 的解即为 Q_0.

4. **生产函数**

生产函数是生产过程投入与产出之间的对应关系.一般某企业的最大生产能力 Q 常可视为劳动力 L 和固定资产 K 的函数

$$Q = f(K, L).$$

例如著名的 Cobb—Douglus 生产函数 $Q = AK^{\alpha}L^{\beta}$.

练习题 1-1

1. 求下列函数的定义域:

(1) $y = \sqrt{x+3} + \dfrac{1}{1-x^2}$;　　(2) $y = \sqrt{x^2-9} + \lg(x-3)$.

2. 判断下列函数的奇偶性:

(1) $y = x^2 + 1$;　　(2) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

3. 指出下列复合函数的结构:

(1) $y = \ln(\sin e^{x+1})$;　　(2) $y = \cos\sqrt{2x+1}$.

4. 国际航空信件的邮资标准是 10 克内邮资 4 元,超过 10 克超过部分每克收取 0.3 元,且信件重量不能超过 200 克,试求邮资 y 与信件重量 x 的函数关系式.

5. 某厂生产一种产品,设计该厂的生产能力为日产 100 件,每日的固定成本为 150 元,每件的平均可变成本为 10 元.

(1) 试求该厂此产品的日总成本函数及日平均成本函数;

(2) 若每件售价为 14 元,求收益函数;

(3) 求利润函数及损益分歧点.

第二节　极限的概念

一、数列极限

1. **数列极限的定义**

观察无穷数列

(1) $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$,即数列 $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \cdots, \dfrac{1}{n}, \cdots$;