

量子计算机研究(下)

——纠错和容错计算

李承祖 陈平形 梁林梅 戴宏毅 编著



科学出版社

国防科技大学研究生教材专项经费资助出版

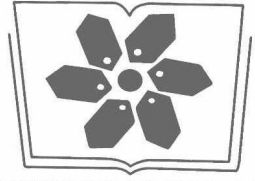
量子计算机研究(下)

——纠错和容错计算

李承祖 陈平彤 梁林梅 戴宏毅 编著

科学出版社

北京



中国科学院科学出版基金资助出版

前 言

数字电子计算机是 20 世纪最重要的科技发明,目前它已深入到现代人类生产、生活以及科学研究活动的各个方面,对人类社会文明的形式和内容都产生了深远、重大影响。20 世纪前半叶,Gödel、Turing 和 Church 创造了计算机科学的理论,而计算机的物理实现、计算机硬件技术进步则和量子物理学研究有密切的关系。创建于 20 世纪初的量子力学,不仅深刻揭示了原子、分子以及固体微观结构,而且促成了现代微电子技术、激光技术和新材料技术的出现和进步。量子物理学发展为现代电子计算机硬件技术发展奠定了物质基础。

如果仅说到量子物理为计算机硬件技术进步提供了物质基础,这还只是说到了一半。最近 30 年来,人们越来越清楚地认识到“信息是物理的”。信息源于物理态在时空中的变化,信息传输是编码有信息的物理态的传输,信息存储是把编码有信息的物理态固化在被称为存储器的物理系统中,信息处理则是在被称为计算机的物理系统中,编码有信息的物理态按算法要求控制的变换或演化,计算结果的提取就是对演化末态的物理测量。今天,对信息本质的这一深刻洞悉,已经产生了巍峨壮观的量子信息科学,它融合了数学、信息、计算机科学和量子物理学,正雄心勃勃地向工程技术转化,希望在新的基础上推进或变革现在的信息科学和技术。

计算机科学和物理学的联系,不仅表现在其硬件实现需要借助于物理学,还表现在计算机科学概念、原理都要受到物理规律的制约。传统的计算机科学是计算机先驱们凭直觉建立在对计算机系统做经典描写的基础上。当物理学理论从经典发展到量子,把我们对物质世界的描写从经典物理学上升到量子物理学时,用量子力学系统实现计算机,对计算机系统作量子力学描写就是非常自然的事情。量子力学系统的态(在量子计算机中用来编码数据)具有不同于经典物理态(在经典计算机中编码数据)的性质,这一方面表明不能把经典计算机理论和技术照搬到量子计算机上,另一方面也表明对以经典物理为基础的计算机科学加以重新审视是不可避免的。

以量子态编码信息、量子力学原理为基础,研究信息存储、信息传输和信息处理的信息理论就是量子信息学。量子计算机就是以量子力学系统为计算机用量子态编码信息,并根据具体问题算法要求、按照量子力学规律执行计算任务(变换、演化编码量子态),根据量子测量理论提取计算结果的计算机。由于量子态具有相干叠加性质,特别是具有经典物理中没有的量子纠缠特性,这就使量子计算机具有天然的“大规模并行计算”的能力。量子计算机的并行计算不是像经典计算机通过多

机并行实现,而是在同一个量子运算器硬件芯片上以一种十分自然的方式进行。由于并行规模随芯片上集成量子位数指数增加,因此量子计算的并行规模实际上是不受限制的。目前已经知道,量子计算机至少在解决某些类问题上,如分解大数质因子、随机数据库搜索等,相对经典计算机具有加速作用。特别是对量子物理系统的计算机模拟,在经典计算机上是个难题,而这种模拟对发现微尺度物质新现象、纳米材料研究以及微机电制造技术是非常基本的。用量子计算机去模拟量子物理系统就是十分自然的事情。

虽然早在 20 世纪 70~80 年代, Bennett、Benioff 等就讨论过利用量子态演化进行 Turing 似的计算,但一般认为量子计算的概念起源于著名美国物理学家 Feynman。1982 年, Feynman 注意到,用经典计算机模拟量子力学系统,将出现指数的变慢,需要的计算资源(空间、时间)随被模拟系统包含的粒子数目、自由度指数增大。Feynman 敏锐地认识到,或许用实际的量子力学系统来模拟量子现象更为实际、自然,从而提出建造用量子力学器件组装起来的、服从量子力学规律的计算机的设想。1985 年,英国牛津大学教授 Deutsch 研究了量子 Turing 机,引进了量子计算线路模型和量子通用逻辑门组,突破了经典计算 Boole 逻辑的限制,实现了到量子么正演化跃进。1985~1993 年的这段时间里,量子计算和量子计算机研究仍局限在少数对量子力学原理、信息物理以及算法复杂性理论感兴趣的小圈子里,研究动力基本上来自于学术上的兴趣和好奇心。情况的突然变化发生在 1994 年,这一年美国 Bell 实验室 Shor 提出了分解大数质因子的量子算法。这个算法在拟议的量子计算机上,可以以输入位数的多项式时间分解大数质因子。分解大数质因子对于经典计算机是个难解问题,广泛使用的 RSA(以三个发明者名字首字母命名)密钥,就是以这个问题的难解为基础的。Shor 算法的提出,使量子计算机研究获得了实际的应用背景和新的研究动力,激发了一批物理学家、信息专家的研究热情。量子计算机的实现意味着目前广泛使用的 RSA 密钥的破译和失效,这就使量子计算机研究从最初仅是学术上感兴趣的对象,变成对密码技术、国家安全和商业应用都有潜在重大影响的研究领域,引起了世界范围内的研究热潮。

量子计算机虽然具有经典计算机不可比拟的信息处理能力,但在物理实现上却比经典计算机更困难。首先,由于量子计算机用量子态编码信息,信息处理(计算)过程就是这些编码有信息的量子态,按具体问题算法要求么正变换(演化),因此需要研究能够开发和应用量子并行性的具体问题的量子算法。在量子算法研究方面,继 1994 年 Shor 提出分解大数质因子量子算法之后,1996 年 Grover 提出了平方根加速的随机数据库量子搜索算法,近十几年来虽然人们对这些量子算法的本质和数学结构有了更深入的理解,但至今也没有本质上新类型的量子算法出现,这表明在量子算法研究上存在极大的难度。其次,量子态本身固有的脆弱性,给量子信息的物理实现造成巨大的困难。根据量子力学理论,量子力学系统和“环境”

(泛指可以和编码态相互作用的一切)存在不可避免的相互作用,这种相互作用会迅速导致编码量子态“消相干”,使利用量子态编码信息可能带来的好处损失殆尽。这种编码量子态的消相干,一度曾被认为是量子信息物理实现不可逾越的障碍。

十多年来,量子计算机在战胜消相干研究方面不断取得新进展。1995~1996年,Shor、Steane 和 Calderbank 等提出了量子纠错码理论和方法,建立了量子计算的精确阈限定理。该定理指出,只要环境噪声造成的门出错率低于某个有限值——精确阈限(目前估计值在 10^{-5} ~ 10^{-3} 量级),任意长的量子计算都能可靠地执行。理论上量子计算机物理实现已没有原则性的困难,但要达到这个精度对今天的技术仍是一个严峻的挑战。关于量子计算机模型,除了 Deutsch 提出的标准线路模型外,2001年,Raussendorf 还提出了在多量子位簇态上以单量子位测量为基础的量子计算模型。目前,文献中广泛讨论的还有绝热量子计算模型以及拓扑量子计算模型等。

在实验上,近年来人们已经在磁共振、离子阱、光格中的中性原子、腔量子电动力学、线性光学、固态量子点以及超导线路等几个物理系统中实现了基本量子逻辑门操作,使用核磁共振、离子阱和线性光学等系统还演示了少数量子位的简单量子计算,提出了利用强磁场作用下的 2 维电子液实现拓扑量子计算方案。但要实现规模化的、真正意义上的量子计算,因为对物理系统性质的要求常常互相矛盾,所以建造真正的、有实际应用价值的量子计算机还存在巨大的技术困难。不管如何,量子计算机理论研究和实验研究正在探索克服这些困难的途径,一步一步逼近这一最终目标。回想一下经典电子计算机发展的历程,20 世纪 40 年代时人们所面临的困难,并不亚于今天发展量子计算机所遇到的困难。经典计算机的发展和进步给我们以启示,人类有着无穷无尽的创造力,凡是自然界允许的、物理规律允许的,或许终有一天能变为现实。十几年来,量子计算机研究激发了数学、物理学以及计算机科学等各个学科专家的创造热情,从物理学基本原理出发,应用严格的数学工具,集思广益,探讨着实现量子计算机的各种可能方案和途径,克服了一个又一个困难。近年来在包括量子计算在内的量子信息学研究中实际取得的进展,不仅给予我们发展量子信息技术的信心,而且正在深化人们对量子力学基本原理的理解,丰富着人类关于物质世界的知识。这本身就具有重要的科学价值和学术意义。

本书是作者在国防科技大学为研究生讲授量子信息专题选讲讲稿的基础上,经整理、补充、改写而成的。本书的目标就是追踪这一快速发展的领域,对众多的文献资料进行初步归纳、整理,构建一个初步的系统、体系,总结出一些规律性的、有普遍意义的结果,希望对从事该领域研究的研究生、教师以及对该领域感兴趣的其他方面的专家学者起到参考和导引作用,希望借本书的出版为推动我国量子计算机研究尽一点微薄之力。

本书内容共 15 章,分上、下两册出版。上册是关于量子计算机原理和物理实现的研究。第 1 章,计算机从经典到量子,首先说明实现计算机的物理系统必须具备的基本条件,然后通过实现这些条件的物理原理和技术进步,说明计算机从经典到量子的发展过程,最后根据量子物理学的基本原理,说明量子计算机可能具有的一些特点。第 2 章,量子位和量子逻辑门,介绍量子计算机的基本单元部件和量子计算机的通用逻辑门组。第 3 章,量子算法,介绍算法的概念和经典算法复杂性理论、目前已知的几种量子算法,说明量子计算机相对经典计算机的特殊信息处理能力,最后介绍量子系统量子计算机模拟算法。第 4 章,量子计算机动力学模型,从操控量子系统就是控制系统 Hamilton 量和系统与外界作用的 Hamilton 量出发,说明实现量子计算对充当量子计算机的物理系统 Hamilton 量形式的要求,以及系统 Hamilton 量不同形式,在实现量子计算中的作用;本章还从量子物理学原理出发阐明了量子计算机消相干的物理机制。第 5~7 章,分别介绍目前研究比较多的三个有希望实现量子计算的物理系统:离子阱量子计算机、基于半导体量子点的量子计算机和固体超导体量子计算,其中主要介绍了相关的物理原理、实现方法和研究进展情况。第 8 章,绝热量子计算,介绍量子绝热定理以及它在量子计算中的应用。第 9 章,簇态和簇态上的量子计算,介绍簇态的概念、簇态上以单量子位测量为基础的量子计算的原理以及它和量子计算的线路模型的差别和联系。

下册是关于量子纠错和容错量子计算,着重介绍解决量子消相干问题的理论和方法。内容包括:第 10 章,经典线性纠错码,介绍经典纠错码的基本概念和基本理论,为后面介绍量子纠错码打下基础。第 11 章,量子纠错和 CSS 量子纠错码,介绍量子纠错的特殊性和从经典纠错码发展起来的 CSS 量子纠错码。第 12 章,稳定子量子纠错码,介绍更系统的量子纠错码——稳定子量子纠错码理论和方法。第 13 章,无消相干子空间和无消相干子系统,详细介绍处理计算机和“环境”耦合消相干的理论和方法。如果说量子纠错码是针对独立出错、一种被动的纠错方法,那么无消相干子空间、无消相干子系统则是针对集体出错的,一种防止出错主动方法;最后介绍了统一这些概念的算子量子纠错的方法。第 14 章,容错量子计算,介绍容错纠错和容错量子计算的概念。针对稳定子码讨论容错量子计算的通用逻辑门组以及量子计算的精确阈限定理和重要的 S-K 定理和算法。第 15 章,拓扑量子计算。拓扑量子计算利用 2 维多体量子系统可能存在的一类特殊物质态——拓扑态——的准粒子激发“任意子”服从辫子群非 Abel 统计,用这些任意子非局域的拓扑自由度编码量子信息,从而使信息对局域扰动引起的消相干具有天然的免疫性。拓扑量子计算提供了迄今为止理想的量子计算物理实现方案。如果说量子纠错码、无消相干子空间、无消相干子系统等是从“软件”水平上克服消相干,拓扑量子计算则试图从“硬件”水平上对付出错。这一章介绍拓扑量子计算的数学原理、物理基础以及容错性质和可能的物理实现。

书后列出的附录内容包括:本书涉及的量子力学概要、量子信息理论涉及的群论基础、群表示理论、李群和李代数等。这些材料是作者从大量教学内容和参考文献中精选出来的,和本书内容有密切的关系。这些材料作为附录列出,对有着不同知识背景的读者使用本书会带来很大的方便。

参加本书撰写的有陈平形教授(第 8 章,绝热量子计算),梁林梅教授(第 5 章,离子阱量子计算机),戴宏毅副教授(第 7 章,超导体量子计算机部分),张婷博士(14.7 节,S-K 定理和迭代算法),吴伟博士(3.7 节,量子系统动力学模拟算法),李承祖撰写了全书其余部分,并对全书进行了统稿和审定。另外,张婷、刘伟涛、欧保全、孙琳等帮助搜集了许多文献资料,美国普渡大学(Purdue University)计算机系李宁辉教授审阅了本书第 3 章部分内容,并帮助整理了全书的参考文献。

国防科技大学研究生院、理学院对本书的撰写给予了大力支持,研究生院还资助了本书的出版,在此深表感谢。

量子计算机是涉及计算机科学、经典信息论和量子物理学的典型交叉学科,它的物理实现研究几乎涉及现代物理学的所有分支,近年来发展又十分迅速,要对如此庞大的领域作一个比较完整的、系统的总结和评述,确实是超出作者的学识和能力范围,本书只能看做是作者向这一方向的一种努力和尝试,书中难免存在不足,诚恳地欢迎读者批评指正。

李承祖

2011 年 4 月

目 录

上 册

第 1 章	计算机从经典到量子	1
第 2 章	量子位和量子逻辑门	29
第 3 章	量子算法	59
第 4 章	量子计算机动力学模型	107
第 5 章	离子阱量子计算机	156
第 6 章	基于半导体量子点的量子计算机	192
第 7 章	固体超导量子计算机	225
第 8 章	绝热量子计算	269
第 9 章	簇态和簇态上的量子计算	285

下 册

前言

第 10 章	经典线性纠错码	337
10.1	二元数域上的线性矢量空间	337
10.1.1	矢量空间	337
10.1.2	n 长二元串集合作为矢量空间	339
10.2	经典线性纠错码概念	340
10.2.1	经典线性纠错码	340
10.2.2	有关线性纠错码的几个基本概念	341
10.2.3	码的检错能力	342
10.2.4	码的纠错能力	343
10.3	经典线性纠错码理论(I)	344
10.3.1	群码	344
10.3.2	生成矩阵和编码	346
10.3.3	系统码	347
10.3.4	校验矩阵	347
10.3.5	关于码距离的定理	349
10.4	经典线性纠错码理论(II)	350

10.4.1	线性纠错码标准译码表	350
10.4.2	Hamming 码	351
10.4.3	指错子	354
10.5	经典线性纠错码的例子——7-位码	355
10.5.1	7-位线性纠错码的生成矩阵和校验矩阵	355
10.5.2	$C[7,3], C[7,4]$ 码	356
10.5.3	取核法编码方法	357
10.5.4	$C[7,3,4]$ 码和 $C[7,4,3]$ 码的译码表	359
10.5.5	经典线性码码率的 Hamming 限	360
	参考文献	361
第 11 章	量子纠错和 CSS 量子纠错码	362
11.1	量子纠错概念	362
11.1.1	量子纠错的特殊性	362
11.1.2	错误离散化	364
11.1.3	Kraus 算子展开和独立出错模型	365
11.1.4	量子纠错的基本思想	366
11.1.5	量子纠错码条件	368
11.2	量子纠错码例子——3-位重复码和 Shor-9 位码	368
11.2.1	纠正 1-位反转错的 3-位重复码	369
11.2.2	小错的纠正	370
11.2.3	相位错的纠正	371
11.2.4	Shor-9 位码	372
11.3	CSS 量子纠错码	374
11.3.1	关于经典线性纠错码的定理 1	375
11.3.2	关于经典线性纠错码的定理 2	378
11.3.3	CSS 量子纠错码的原理和构造	379
11.4	纠正 1-位错的 7-位量子 CSS 码	380
11.4.1	纠正 1-位错的 7-位量子 CSS 码构造	380
11.4.2	7-位 CSS 码的编码线路	382
11.4.3	错误诊断和纠错	383
	参考文献	384
第 12 章	稳定子量子纠错码	385
12.1	Pauli 算子群	385
12.1.1	Pauli 算子群概念	385
12.1.2	Pauli 算子群元素的性质	386

12.2	稳定子量子纠错码概念	387
12.2.1	Shor-9 位码的再分析	387
12.2.2	稳定子码概念	388
12.2.3	稳定子的生成元和稳定子群阶	389
12.2.4	稳定子 S 在 G_n 中的中心子和正规子	390
12.2.5	稳定子码空间上的逻辑操作	390
12.2.6	稳定子码的指错子	391
12.3	稳定子码空间作为二元域上的线性矢量空间	392
12.3.1	G_n 群算子的双矢量表示	392
12.3.2	双矢量表示中的二元乘积	393
12.3.3	双矢量表示中群算子的对易关系	393
12.3.4	双矢量表示中的稳定子和指错子	394
12.4	稳定子码生成矩阵的标准形式和编码操作、逻辑操作	394
12.4.1	稳定子码生成矩阵的标准形式	395
12.4.2	稳定子码的逻辑算子	396
12.4.3	稳定子码的编码操作	399
12.5	作为稳定子码子类的 CSS 码	400
12.5.1	7-位 CSS 码的稳定子	400
12.5.2	7-位 CSS 码空间	402
12.5.3	7-位 CSS 码的逻辑操作	403
12.5.4	7-位 CSS 码的编码线路	403
12.6	5-位稳定子码	405
12.6.1	5-位码的稳定子	405
12.6.2	5-位稳定子码的生成元矩阵的标准形式	406
12.6.3	5-位稳定子码的码字和编码线路	407
12.6.4	5-位稳定子码的指错子	409
	参考文献	410
第 13 章	无消相干子空间和无消相干子系统	411
13.1	无消相干子空间概念、存在无消相干子空间的 Hamilton 算子条件	412
13.1.1	无消相干子空间概念	412
13.1.2	存在无消相干子空间条件的 Hamilton 算子描述	413
13.1.3	独立相互作用和集体相互作用	414
13.1.4	只存在相位阻尼情况下的无消相干子空间	415
13.2	多量子位系统的无消相干子空间	416

13.2.1	两量子位系统的无消相干态	417
13.2.2	多量子位系统的无消相干子空间	418
13.2.3	多量子位系统存在无消相干子空间的定理	419
13.3	无消相干子空间条件的算子和表示、系统-环境非对称耦合情况下的无消相干子空间	421
13.3.1	系统-环境相互作用的算子和描述、存在消相干子空间条件	421
13.3.2	系统-环境相互作用不具有完全对称性情况下存在无消相干子空间条件	422
13.3.3	相互作用是 Pauli 算子群 Abel 子群的无消相干子空间的例子	426
13.3.4	相互作用是 Pauli 算子群非 Abel 子群的无消相干子空间	428
13.3.5	无消相干子空间和量子纠错码	429
13.4	用半群主方程描写系统-环境相互作用系统存在无消相干子空间条件	430
13.4.1	半群主方程描写中无消相干子空间条件	431
13.4.2	Hamilton 算子描述和半群主方程描述中无消相干子空间条件的差别	432
13.5	系统-环境相互作用算子代数、无消相干子系统	433
13.5.1	无消相干子空间和无消相干子系统	433
13.5.2	相互作用算子代数	434
13.5.3	完全算子代数的约化——无消相干子系统	435
13.5.4	无消相干子系统作为无消相干子空间	437
13.6	算子量子纠错、量子纠错标准模型	437
13.6.1	量子纠错的标准模型	437
13.6.2	无消相干子系统	438
13.6.3	非么正噪声超算子作用下的无消相干子系统	439
13.6.4	非么正量子超算子作用下存在无消相干子系统的例子	443
13.6.5	量子纠错的统一理论——算子量子纠错	445
13.7	寻找无消相干子系统的方法	445
13.7.1	非么正量子超算子作用下存在无消相干子系统的例子	445
13.7.2	无噪声子系统结构和寻找无噪声子系统的方法	448
13.7.3	寻找非么正量子超算子作用下存在无消相干子系统的例子	450
	参考文献	451
第 14 章	容错量子计算	453
14.1	容错测量和容错恢复	453
14.1.1	错误传播规律和容错操作	454

14.1.2	7-位 CSS 码的指错子测量	455
14.1.3	对一般稳定子码的指错子测量	458
14.1.4	Knill 指错子容错测量方案	458
14.2	容错操作和稳定子码的么正操作	459
14.2.1	横向操作	459
14.2.2	稳定子码的么正操作	459
14.3	CSS 类稳定子码上的容错计算	463
14.3.1	CSS 类稳定子码 1-位操作	463
14.3.2	CSS 类码的控制非门操作	464
14.3.3	7-位 CSS 码的容错操作	465
14.4	一般稳定子码上的么正操作	467
14.4.1	测量和一般稳定子码的么正操作	468
14.4.2	一般稳定子码的容错一位门操作	469
14.4.3	一般稳定子码的容错控制非门操作	471
14.5	一般稳定子码容错通用逻辑门组、Toffoli 门	473
14.5.1	Toffoli 门诱导的么正变换	474
14.5.2	实现 Toffoli 门方法	475
14.5.3	对 7-位 CSS 码 Toffoli 门的容错执行	476
14.5.4	对于一般稳定子码的容错 Toffoli 门	478
14.6	量子计算容错阈限定理	480
14.6.1	基本出错率和逻辑出错率	480
14.6.2	级联码	481
14.6.3	量子计算的精确性阈限定理和精确阈限估计	482
14.6.4	关于精确性阈限值研究	484
14.7	Solovay-Kitaev 定理和迭代算法	485
14.7.1	算子距离、Solovay-Kitaev 定理	485
14.7.2	两个预备定理	486
14.7.3	Solovay-Kitaev 定理的证明	489
14.7.4	推广到 $SU(N)$ 情况时 Solovay-Kitave 定理的证明	491
	参考文献	493
第 15 章	拓扑量子计算	495
15.1	拓扑量子计算的数学基础	495
15.1.1	拓扑学和容错量子计算	495
15.1.2	几何相位(局域相)和拓扑相位	497
15.1.3	空间拓扑性质、任意子存在的可能性	498

15.1.4	任意子的坐标交换和编织操作	500
15.2	辫子群	501
15.2.1	辫子和辫子群	501
15.2.2	辫子群中的基本元素、Yang-Baxter 关系	503
15.2.3	辫子群的生成元	504
15.2.4	梭编织和梭编织群	506
15.2.5	辫子群的表示	506
15.3	量子 Hall 物理 (I)	507
15.3.1	经典 Hall 效应	508
15.3.2	量子 Hall 效应	509
15.3.3	电子在均匀电磁场中的运动、Landau 能级	510
15.3.4	整数量子 Hall 效应	513
15.4	量子 Hall 物理 (II)	513
15.4.1	强磁场中 2 维电子气、单电子运动的极坐标描写	513
15.4.2	Laughlin 波函数	516
15.4.3	分数量子 Hall 效应的复合粒子理论	518
15.4.4	分数量子 Hall 态中准粒子激发——任意子	519
15.4.5	物质的拓扑相	521
15.5	任意子的性质 (I)	522
15.5.1	任意子交换和编织统计、Abel 任意子和非 Abel 任意子	523
15.5.2	熔结规则	524
15.5.3	Ising 任意子的熔结规则、编码量子位和简并空间维数	526
15.5.4	Fibonacci 任意子的熔结规则、编码量子位和简并空间维数	528
15.6	任意子的性质 (II)	529
15.6.1	F 矩阵	530
15.6.2	R 矩阵	532
15.6.3	三个 Fibonacci 任意子的基本编织矩阵	533
15.7	使用 Fibonacci 任意子的通用量子计算	534
15.7.1	逻辑量子位构造	534
15.7.2	梭编织对拓扑量子计算的通用性	536
15.7.3	执行单量子位门的编织操作	536
15.7.4	实现两量子位门的编织操作	538
15.8	拓扑态测量	541
15.8.1	$\nu=5/2$ 分数量子 Hall 效应编织统计检测	542
15.8.2	Ising 任意子($\nu=5/2$ 系统)量子位测量	544

15.8.3 Fibonacci 任意子($\nu=12/5$ 系统)量子位测量	545
15.9 拓扑量子计算研究的新进展和简要评述	547
15.9.1 人造系统任意子理论研究	547
15.9.2 不需要编织操作的拓扑量子计算	548
15.9.3 对拓扑量子计算的简要评述	549
参考文献	550
附录 A1 量子物理概要	554
A1.1 量子力学的第一条基本假设——量子态用波函数描写	554
A1.2 量子力学的第二条基本假设——量子态叠加原理	557
A1.2.1 量子态叠加原理	557
A1.2.2 矢量空间	557
A1.2.3 度量空间	558
A1.2.4 Banach 空间、内积、内积空间	559
A1.2.5 Hilbert 空间	560
A1.3 量子态随时间的演化——Schrödinger 方程	560
A1.4 量子力学中的力学量	562
A1.4.1 线性 Hermitian 算子	562
A1.4.2 量子力学的第四条基本假设——力学量用线性 Hermitian 算子表示	564
A1.4.3 算子的对易关系、算子对易的物理意义	565
A1.4.4 电子自旋、Pauli 算子	567
A1.5 量子测量假设	569
A1.5.1 量子力学的第五条基本假设——量子测量假设	569
A1.5.2 一般量子测量	570
A1.5.3 正交投影测量	570
A1.5.4 POVM 测量	571
A1.5.5 Neumark 定理	572
A1.6 量子纠缠现象	574
A1.6.1 量子纠缠现象	575
A1.6.2 EPR 佯谬	575
A1.6.3 隐参数理论和 Bell 不等式	576
A1.7 算子代数	579
A1.7.1 投影算子和密度算子	579
A1.7.2 Banach 代数	580
A1.7.3 C^* -代数	581

A1.7.4 C^* -代数的表示	582
附录 A2 量子信息中的群论基础	584
A2.1 群和半群的基本概念	584
A2.1.1 群和半群的概念	584
A2.1.2 群的例子	585
A2.2 群乘法表和重排定理	587
A2.2.1 群乘法表	587
A2.2.2 重排定理	588
A2.3 群的子集合	589
A2.3.1 子群	589
A2.3.2 陪集	590
A2.3.3 Lagrange 定理	591
A2.3.4 共轭元素类	592
A2.3.5 生成元和循环子群	593
A2.4 正规子群	594
A2.4.1 正规子群	594
A2.4.2 中心化子	596
A2.4.3 商群	597
A2.5 同态、同构、直积群	597
A2.5.1 同态	598
A2.5.2 同构	598
A2.5.3 同态核和商群	600
A2.5.4 直积群	601
附录 A3 群表示理论	603
A3.1 群表示的定义	603
A3.1.1 群表示的概念	603
A3.1.2 群代数和群正则表示	604
A3.1.3 等价表示、么正表示定理	604
A3.1.4 可约表示、不可约表示	605
A3.2 群不可约表示矩阵元正交性定理	606
A3.2.1 Schur 引理 1	606
A3.2.2 Schur 引理 2	608
A3.2.3 群不可约表示矩阵元正交性定理的概念	609
A3.2.4 群不可约表示矩阵元正交性定理的几何解释	611
A3.3 群表示的特征标	612

A3. 3. 1	特征标和特征标表	612
A3. 3. 2	群可约表示的约化	613
A3. 3. 3	投影算子	615
附录 A4	李群和李代数	618
A4. 1	李群的概念	618
A4. 1. 1	连续群的概念	618
A4. 1. 2	李群的概念	618
A4. 1. 3	李群的例子	620
A4. 2	李群的无穷小算子、李代数	621
A4. 2. 1	李群的无穷小算子	621
A4. 2. 2	有限群元的生成、群生成元	623
A4. 3	李代数和李群的表示	624
A4. 3. 1	李代数	624
A4. 3. 2	李代数的表示和李群的表示	626
A4. 4	几个重要李群的表示	627
A4. 4. 1	$SO(2)$ 群的表示	627
A4. 4. 2	$SO(3)$ 群的表示	627
A4. 4. 3	$SO(3)$ 群不可约表示的特征标和不可约表示直积的约化	628
A4. 4. 4	$SU(2)$ 群的不可约表示	630
A4. 4. 5	$SU(2)$ 群不可约表示的特征标	632
索引	634