经纶学典

总主编◎李朝东

修订版

教材解析

JIAOCAIJIEXI

人教A版

高中数学

必修5

读者出版集团
DPGC.,L
甘肃少年儿童出版社

经纶典学

总主编◎李朝东

教材解析

JIAOCAIJIEXI

本册主编：刘向东

人教A版

高中数学

必修5

读者出版集团
D P G C., L
甘肃少年儿童出版社

图书在版编目(CIP)数据

教材解析:人教版.高中数学.5:必修/李朝东主编.——兰州:甘肃少年儿童出版社,2011.5

ISBN 978-7-5422-2945-8

Ⅰ.①教… Ⅱ.①李… Ⅲ.①中学数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第075864号

责任编辑:伏文东

装帧设计:杭永鸿

教材解析·高中数学

必修5 人教A版

李朝东 主编

甘肃少年儿童出版社出版发行

(730030 兰州市读者大道568号)

0931-8773255

南京天德印务有限公司

开本 880毫米×1230毫米 1/16 印张 12 字数 240千

2011年5月第1版 2011年5月第1次印刷

印数:1~5 000

ISBN 978-7-5422-2945-8 定价:23.00元

前言

当一道道疑似难题摆在你面前时，是胸有成竹，还是找不着头绪？如果是前者，那恭喜你，你已经跨越了教材与考试之间的差距；如果是后者，那你也别急，《经纶学典·教材解析》在教材与考试间为你搭建一个沟通平台。

不少同学有这样的感觉：教材都熟悉了，课堂上也听懂了，但考试却取不到好成绩。原因在于教材内容与考试要求有差距，课堂教学与选拔性考试有差别。这就需要在教材之上、课堂之外能够得到补充、提升，直至达到高考的选拔要求。本书就是从以下两个方面填补这种差距。

首先是对教材的深度挖掘。教材内容通俗易懂，但里面包含着丰富的信息，我们把教材所包含的信息挖掘出来，并进行系统整理，让知识内涵和外延、知识间的联系充分展现。

第二是对课堂教学的补充和拓展。本书不是对课堂教学的重复，而是在课堂教学基础上，对课堂教学进行补充、提高，挖掘那些学生难以理解、难以掌握的内容，进行归纳和总结，为学生穿起一条规律性的“线”。数学侧重解题方法、解题技巧、解题思路的整理，注重方法的拓展，找出最优的解题方法，对本节内容与其他小专题内容进行归纳总结。这些由于课堂教学时间限制或教师水平发挥的问题，在课堂上并没有全部传授给学生，而这些恰恰就是考试中要考查的，学生拉开差距的所在。

正是本着上述编写理念，本丛书以学生为中心，用最易理解的表现形式呈现学习中难以理解的部分。希望本书为你的成长助力，有更好的想法和意见请登录：www.jing-lun.cn。

编者

QIANYAN

读者反馈表

尊敬的读者：

您好！感谢您使用《经纶学典·教材解析》！

为了不断提高图书质量，恳请您写下使用本书的体会与感受，我们将真诚地吸纳。在修订时将刊登您的意见，并予以一定的奖励，以表达我们诚挚的谢意。

<table>
<tr><td rowspan="3">读者简介</td><td>姓　名</td><td></td><td>性　别</td><td></td><td>出生年月</td><td></td></tr>
<tr><td>所在学校</td><td colspan="2"></td><td>通讯地址</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>联系方式</td><td colspan="5">(H)：　　　　(O)：
手机：　　　　E－mail：</td></tr>
<tr><td colspan="2">本书情况</td><td>学科</td><td></td><td>版本</td><td>年级</td><td></td></tr>
</table>

您对本书栏目的评价：	您对本书体例形式的评价：	您的购买行为：
1. 教材梳理： 全面□　一般□　不全面□ 2. 教材拓展： 难□　合理□　易□ 3. 典型题解： 全面□　不全面□ 4. 针对性练习： 难□　合理□　易□ 5. 拓展阅读： 需要□　不需要□ 6. 五年高考回放： 需要□　不需要□	1. 栏目设置： 过多□　适中□　过　少□ 2. 题空： 过大□　正好□　过　小□ 3. 版式： 美观□　一般□　不美观□ 4. 封面： 美观□　一般□　不美观□	1. 您购买本书的途径： 广　告□　教师推荐□ 家长购买□　学校统一购买□ 自己购买□　同学推荐□ 2. 您购买本书的主要原因（可多选）： 广告宣传□　包装形式□ 内　容□　图书价格□ 封面设计□　书　名□

您对本书的其他意见：

欢迎登录：www.jing-lun.cn

通信地址：南京红狐教育传播研究所（南京市租用16－02#信箱）　　邮编：210016

目录

MULU

第一章 解三角形

1.1 正弦定理和余弦定理

1.1.1 正弦定理

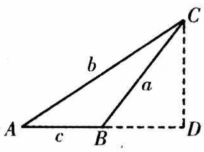
A 教材梳理

知识点一 正弦定理

定理内容:在一个三角形中,各边和它所对角的正弦的比相等,即$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

注意:(1)正弦定理很好地描述了任意三角形中三条边与对应角的正弦之间的一个关系.

(2)给出课本中"当△ABC是钝角三角形时"正弦定理的证明:如图,设∠B为钝角,过C作AB的垂线与AB的延长线交于D点,由三角函数的定义,得



$CD=b\sin A$,$CD=a\sin(180°-B)=a\sin B$,

$\therefore b\sin A=a\sin B$,即$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$.

同理可得$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$.

$\therefore \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

(3)在证得三个连等的比值为$2R$(R是△ABC的外接圆半径)后,正弦定理也可表述为:

在一个三角形中,各边和它的对角正弦值的比相等,都等于其外接圆的直径:

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$,

这一式子在正弦定理的应用中显得格外方便.

知识点二 正弦定理在解三角形中的应用

一般地,把三角形中的三个角A、B、C和它们的对边a、b、c叫做三角形的元素.已知三角形的几个元素求其他元素的过程叫做解三角形.

利用正弦定理可解决下列两类问题:

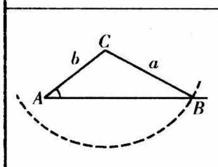
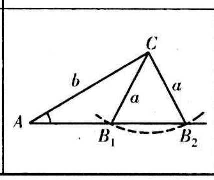
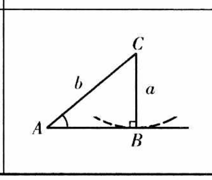
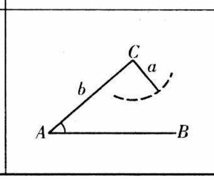
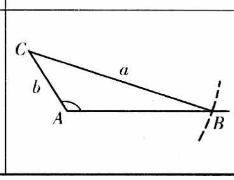
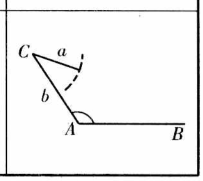
(1)已知△ABC两角和任意一边,求其他两边和一角;

(2)已知△ABC两边和其中一边的对角,求另外一边的对角和其他的边角.

注意:对于第(1)类,其解是唯一确定的,一般先由三角形内角和为180°求得第三个角,再利用正弦定理求其余两边.

对于第(2)类,其解不唯一,由于三角形的形状不能唯一确定,因而会出现两解、一解和无解三种情况:

在△ABC中,已知a、b和A,以点C为圆心,以边长a为半径画弧,此弧与除去顶点A的射线AB的公共点的个数即为三角形的个数,个数见下表:

<table>
<tr><td colspan="4">$A<90°$</td><td colspan="2">$A\geqslant 90°$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$a\geqslant b$</td><td colspan="3">$a<b$</td><td rowspan="2">$a>b$</td><td rowspan="2">$a\leqslant b$</td></tr>
<tr><td>$a>b\sin A$</td><td>$a=b\sin A$</td><td>$a<b\sin A$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

B 教材拓展

拓展点一　正弦定理的几种变形及应用

正弦定理有几种常见变形，在解题时要灵活运用，即

(1) $a=\dfrac{b\sin A}{\sin B}=\dfrac{c\sin A}{\sin C}$,

$b=\dfrac{a\sin B}{\sin A}=\dfrac{c\sin B}{\sin C}$,

$c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}=\dfrac{b\sin C}{\sin B}$;

(2) $a=2R\sin A, b=2R\sin B, c=2R\sin C$;

(3) $\sin A=\dfrac{a}{2R},\sin B=\dfrac{b}{2R},\sin C=\dfrac{c}{2R}$;

(4) $\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$.

注意:(1)变形(1)是解三角形中的常用公式，在判定$\triangle ABC$形状时，可利用变形(2)将边化为角，利用变形(3)将角化为边来解题.

(2)对于公式的应用一般有正用、倒用、变形用，特别要注意公式的变形用.

拓展点二　三角形内角和定理在解三角形中的妙用

三角形内角和定理$A+B+C=\pi$，及由此推出的一些基本关系式在解三角形，以及进行三角变换时应用广泛，如：$A=\pi-(B+C),\dfrac{A}{2}+\dfrac{B}{2}+\dfrac{C}{2}=\dfrac{\pi}{2},\sin(B+C)=\sin A,\cos(B+C)=-\cos A,\sin\dfrac{B+C}{2}=\cos\dfrac{A}{2}$等.

拓展点三　在$\triangle ABC$中，由"$\sin A>\sin B$"能否推出"$A>B$"？反之，是否也成立？

在三角函数中，由$\sin A>\sin B$，推不出$A>B$；由$A>B$，也推不出$\sin A>\sin B$. 但在三角形中，由于$A>B\Leftrightarrow a>b$，又由$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，知$a>b\Leftrightarrow\sin A>\sin B$，从而$\sin A>\sin B\Leftrightarrow A>B$. 所以在$\triangle ABC$中，由$\sin A>\sin B$能推出$A>B$；由$A>B$也能推出$\sin A>\sin B$.

C 典型题解

▶问题一　正弦定理在解三角形中的应用

例题 1　在$\triangle ABC$中，$A=60°$，$C=45°$，$c=\sqrt{2}$，求a、b及$\cos B$.

[解析]　本题直接考查正弦定理在解三角形中的简单应用，可利用$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$求解.

[答案]　解：$\because A=60°,C=45°,c=\sqrt{2}$,

$\therefore$由正弦定理$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，得$a=\dfrac{c\sin A}{\sin C}$,

即$a=\dfrac{\sqrt{2}\sin 60°}{\sin 45°}=\sqrt{3}$.

又由$\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{b}{\sin B}$及$B=180°-(A+C)$，得

$b=\dfrac{c\sin B}{\sin C}=\dfrac{\sqrt{2}\sin 75°}{\sin 45°}=2\sin 75°=2\sin(45°+30°)$

$=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

$\therefore\cos B=\cos 75°=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

[点评]　本题对应的知识点是正弦定理在解三角形中的应用. 在解题时应注意三角形内角和公式的灵活运用.

例题 2　在$\triangle ABC$中，

(1)已知$b=4,c=8,B=30°$，求C、A、a;

(2)已知$b=6,c=9,B=45°$，求C、A、a.

[解析]　本题考查正弦定理的应用和三角形内角和定理，可直接应用正弦定理解答.

[答案]　解：(1)由正弦定理，得

$\sin C=\dfrac{c\sin B}{b}=\dfrac{8\sin 30°}{4}=1$.

又由$c>b$知$C>B$，$\therefore 30°<C<180°$. $\therefore C=90°$.

$\therefore A=180°-(B+C)=60°$.

$\therefore a=\sqrt{c^2-b^2}=4\sqrt{3}$.

(2)$\because\sin C=\dfrac{c\sin B}{b}=\dfrac{9\sin 45°}{6}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}>1$,

$\therefore$本题无解.

[点评]　利用正弦定理与三角形内角和定理能够解决下列两类三角形问题：

(1)已知两角和任意一边，求其他两边和一角；

(2)已知两边和其中一边的对角，求另一边的对角(进而求出其他的边与角).

例题 3　在$\triangle ABC$中，已知$a=\sqrt{2},b=2,A=30°$，解三角形.

[解析]　本题考查正弦定理. 已知两边和一边的对角，求另外的边和角，可利用正弦定理结合三角形内角和定理解决.

[答案]　解：由$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，得$\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}=\dfrac{2\sin 30°}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$\because a<b,\therefore B>A=30°$,

$\therefore B$为锐角或钝角，$\therefore B=45°$或$B=135°$.

①当$B=45°$时，

$C=180°-(A+B)=180°-(30°+45°)=105°$,

又$\because \dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{a}{\sin A}$,

$\therefore c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}=\dfrac{\sqrt{2}\sin 105^\circ}{\sin 30^\circ}=\dfrac{\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\dfrac{1}{2}}=\sqrt{3}+1$;

②当$B=135^\circ$时,

$C=180^\circ-(A+B)=180^\circ-(30^\circ+135^\circ)=15^\circ$,

$\therefore c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}=\dfrac{\sqrt{2}\sin 15^\circ}{\sin 30^\circ}=\dfrac{\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\dfrac{1}{2}}=\sqrt{3}-1$.

综上可得,$B=45^\circ,C=105^\circ,c=\sqrt{3}+1$ 或

$B=135^\circ,C=15^\circ,c=\sqrt{3}-1$.

[点评] (1)要注意在$\triangle ABC$中,$A+B+C=180^\circ$的运用.

(2)$\sin 105^\circ=\sin 75^\circ=\sin(45^\circ+30^\circ)=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$,$\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

(3)要注意运用三角形中大边对大角的性质,进而判定解的个数.

例题 4 $\triangle ABC$中,设$a+c=2b$,$A-C=\dfrac{\pi}{3}$,求$\sin B$的值.

[解析] 通过$a=2R\sin A,b=2R\sin B,c=2R\sin C$转化条件,并结合$A+B+C=\pi$求解.

[答案] 解:$a+c=2b$,由正弦定理$a=2R\sin A,b=2R\sin B$,$c=2R\sin C$,得$\sin A+\sin C=2\sin B$.

由和差化积公式,得$2\sin\dfrac{A+C}{2}\cos\dfrac{A-C}{2}=2\sin B$.

$\because A+B+C=\pi$,

$\therefore \sin\dfrac{A+C}{2}=\cos\dfrac{B}{2}$. 又$A-C=\dfrac{\pi}{3}$,

$\therefore \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\dfrac{B}{2}=2\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{B}{2}$.

又$0<\dfrac{B}{2}<\dfrac{\pi}{2}$,$\therefore \cos\dfrac{B}{2}\neq 0$.

$\therefore \sin\dfrac{B}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. $\therefore \cos\dfrac{B}{2}=\sqrt{1-\sin^2\dfrac{B}{2}}=\dfrac{\sqrt{13}}{4}$.

$\therefore \sin B=2\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{B}{2}=\dfrac{\sqrt{39}}{8}$.

[点评] (1)在解三角形中,经常要用到正弦定理以进行边角关系的互化.

(2)三角形的内角和为π,作为一个隐含条件,要充分利用.

(3)要注意三角恒等式的变形.

▶问题二 判断三角形的形状

例题 5 在$\triangle ABC$中,满足$\dfrac{a}{\cos A}=\dfrac{b}{\cos B}=\dfrac{c}{\cos C}$,试判断$\triangle ABC$的形状.

[解析] 将式中的a、b、c分别用$2R\sin A$、$2R\sin B$、$2R\sin C$代替是解题的突破口.

[答案] 解:由正弦定理$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$,得

$a=2R\sin A,b=2R\sin B,c=2R\sin C$,

代入$\dfrac{a}{\cos A}=\dfrac{b}{\cos B}=\dfrac{c}{\cos C}$中,得

$\dfrac{2R\sin A}{\cos A}=\dfrac{2R\sin B}{\cos B}=\dfrac{2R\sin C}{\cos C}$,即$\dfrac{\sin A}{\cos A}=\dfrac{\sin B}{\cos B}=\dfrac{\sin C}{\cos C}$,

$\therefore \tan A=\tan B=\tan C$.

又$\because A$、B、C是$\triangle ABC$的内角,

$\therefore A=B=C$.

$\therefore \triangle ABC$是等边三角形.

[点评] 本题主要考查正弦定理的变形在三角变换及判定三角形形状中的应用,解题中应注意灵活选取边化角和角化边这两种变形技巧.

例题 6 在$\triangle ABC$中,已知$a^2\tan B=b^2\tan A$,试判断$\triangle ABC$的形状.

[解析] 此题主要考查正弦定理在判断$\triangle ABC$形状时的应用.首先将$\tan B$、$\tan A$化弦为$\dfrac{\sin B}{\cos B}$、$\dfrac{\sin A}{\cos A}$,再将正弦定理变形式$a=2R\sin A,b=2R\sin B$代入即可.

[答案] 解:由已知,得$\dfrac{a^2\sin B}{\cos B}=\dfrac{b^2\sin A}{\cos A}$,

由正弦定理,得$a=2R\sin A,b=2R\sin B$,

$\therefore \dfrac{4R^2\sin^2 A\sin B}{\cos B}=\dfrac{4R^2\sin^2 B\sin A}{\cos A}$,

$\therefore \sin A\cos A=\sin B\cos B$,

$\therefore \sin 2A=\sin 2B$,即$2A=2B$或$2A=\pi-2B$,

$\therefore A=B$或$A+B=\dfrac{\pi}{2}$.

$\therefore \triangle ABC$为等腰三角形或直角三角形.

[点评] (1)正弦定理既可以化边为角,又可以化角为边,在判断$\triangle ABC$形状时还经常与三角函数知识结合起来.

(2)注意此题得到$\sin 2A=\sin 2B$后的讨论,它是基于三角形各角在$(0,\pi)$内得到的.

例题 7 在$\triangle ABC$中,$B=30^\circ,c=150,b=50\sqrt{3}$,试判断$\triangle ABC$的形状.

[解析] 本题考查正弦定理的应用.显然应由正弦定理求出

C 后再判断 $\triangle ABC$ 的形状.

［答案］ 解:由正弦定理,得 $\sin C=\frac{c\sin B}{b}=\frac{150\sin 30^\circ}{50\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\because c>b$,$\therefore C>B$,$\therefore C=60^\circ$或 $C=120^\circ$.

当 $C=60^\circ$时,$A=180^\circ-(30^\circ+60^\circ)=90^\circ$;

当 $C=120^\circ$时,$A=180^\circ-(30^\circ+120^\circ)=30^\circ$.

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形或等腰三角形.

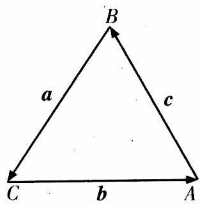
［点评］ 三角形的形状可按边进行分类,也可按角进行分类,在解题时应根据题目中给出的条件,考虑化角为边或化边为角.

▶问题三　正弦定理与函数、三角函数、向量等知识的综合应用

例题 8　在 $\triangle ABC$ 中,设 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.求证:$\triangle ABC$ 为正三角形.

［解析］ 要证 $\triangle ABC$ 为正三角形,只需证 $A=B=C$ 即可,解题的关键是建立向量的数量积与正弦定理的联系.

［答案］ 解:如图,由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$,得



$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\pi-C)=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos(\pi-A)$,

$\therefore |\boldsymbol{a}|\cos C=|\boldsymbol{c}|\cos A$.

由正弦定理,得 $\sin A\cos C=\sin C\cos A$,$\therefore \sin(A-C)=0$.

$\because 0<A<\pi,0<C<\pi$,$\therefore -\pi<A-C<\pi$,

$\therefore A-C=0$,$A=C$.同理由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$,可得到 $B=C$,

$\therefore A=B=C$,即 $\triangle ABC$ 为等边三角形.

［点评］ 本题通过向量知识,综合了正弦定理进行证明.证明的关键是运用向量的数量积公式:$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|a||b|\cos\langle a,b\rangle$,这将是今后高考的热点问题.

例题 9　在 $\triangle ABC$ 中,$c=3\sqrt{2}+\sqrt{6}$,$C=60^\circ$,求 $a+b$ 的取值范围.

［解析］ 本题综合考查了三角函数、正弦定理等知识.利用正弦定理及三角形内角和公式将 $a+b$ 表示为某一个角(如角 A)的三角函数,问题得解.

［答案］ 解:$\because \frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}=\frac{a+b}{\sin A+\sin B}$,$c=3\sqrt{2}+\sqrt{6}$,$C=60^\circ$,

$\therefore \frac{a+b}{\sin A+\sin B}=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sin 60^\circ}=2(\sqrt{2}+\sqrt{6})$,

$A+B=180^\circ-60^\circ=120^\circ$,

$\therefore a+b=2(\sqrt{2}+\sqrt{6})[\sin A+\sin(120^\circ-A)]$

$=2(\sqrt{2}+\sqrt{6})\left(\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\frac{1}{2}\sin A\right)$

$=2(\sqrt{2}+\sqrt{6})\left(\frac{3}{2}\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A\right)$

$=2(\sqrt{6}+3\sqrt{2})\sin(A+30^\circ)$.

$\because A+B=120^\circ$,$\therefore 0^\circ<A<120^\circ$,

$\therefore 30^\circ<A+30^\circ<150^\circ$,

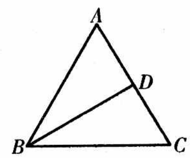
$\therefore \sin(A+30^\circ)\in\left(\frac{1}{2},1\right]$,

$\therefore a+b\in(\sqrt{6}+3\sqrt{2},2(\sqrt{6}+3\sqrt{2})]$.

［点评］ (1)函数、三角函数知识是求范围问题时的常用知识,特别是结合三角形知识命题是常见题型之一,应切实理解掌握.

(2)本题是利用 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a+b}{\sin A+\sin B}$ 这一变换,将 $a+b$ 化为了角 A 的函数.

例题 10　如图,在等腰 $\triangle ABC$ 中,底边 $BC=1$,底角平分线 BD 交 AC 于点 D,求 BD 的取值范围.



［解析］ 本题考查正弦定理、函数知识.应把 BD 表示为 B 的函数,转化为求值域问题解决.

［答案］ 解:由 $B=C$,得 $A=180^\circ-2B$,

$\angle BDC=A+\angle ABD=180^\circ-2B+\frac{B}{2}=180^\circ-\frac{3}{2}B$.

在 $\triangle BCD$ 中,$\frac{BD}{\sin C}=\frac{BC}{\sin\angle BDC}$,

即 $\frac{BD}{\sin B}=\frac{1}{\sin\left(180^\circ-\frac{3}{2}B\right)}$,

$\therefore BD=\frac{\sin B}{\sin\frac{3}{2}B}$

$=\frac{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}{\sin B\cos\frac{B}{2}+\cos B\sin\frac{B}{2}}$

$=\frac{2\cos\frac{B}{2}}{2\cos^2\frac{B}{2}+\cos B}$

$=\dfrac{2\cos\dfrac{B}{2}}{4\cos^2\dfrac{B}{2}-1}$

$=\dfrac{2}{4\cos\dfrac{B}{2}-\dfrac{1}{\cos\dfrac{B}{2}}}$.

又$\because 0°<\dfrac{B}{2}<45°$,$\therefore \dfrac{\sqrt{2}}{2}<\cos\dfrac{B}{2}<1$.

显然,当$\cos\dfrac{B}{2}$逐渐增大时,BD逐渐减小,

$\therefore$ 当$\cos\dfrac{B}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时,$BD=\sqrt{2}$;当$\cos\dfrac{B}{2}=1$时,$BD=\dfrac{2}{3}$.

$\therefore BD$的取值范围是$\left(\dfrac{2}{3},\sqrt{2}\right)$.

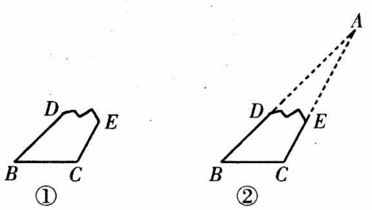
[点评] (1)本题在考查正弦定理的同时考查了三角恒等变形,利用函数单调性求值域的方法及数形结合思想、等价转化思想等.

(2)从此题也可以看出,函数知识是我们研究取值范围问题或最值问题的有力工具.

▶问题四 正弦定理的实际应用

例题 11 如图①,某地出土了一块类似三角形形状的古代玉佩,其中一角已破损,现测得如下数据:$BC=2.57$ cm,$CE=3.57$ cm,$BD=4.38$ cm,$B=45°$,$C=120°$,为了复原,计算原玉佩两边的长(结果精确到0.01 cm).

[解析] 本题是实际问题,可将玉佩补成三角形,从而将问题转化为解三角形问题解决.



[答案] 解:如图②,延长BD、CE交于点A,在$\triangle ABC$中,$BC=2.57$ cm,$B=45°$,$C=120°$,$A=180°-(B+C)=15°$.

$\because \dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{AC}{\sin B}$,$\therefore AC=\dfrac{BC\sin B}{\sin A}\approx 7.02$(cm).

同理$AB\approx 8.60$ cm.

$\therefore$ 原玉佩两边的长分别约为7.02 cm、8.60 cm.

[点评] 将应用题的模型抽象出来,转化为数学问题,是解决此类问题的关键,也是数学上转化思想的具体表现.

D 针对性练习

基础题

1. 在$\triangle ABC$中,$A:B:C=4:1:1$,则$a:b:c$等于 ( )

A. $4:1:4$　　B. $2:1:1$

C. $\sqrt{2}:1:1$　　D. $\sqrt{3}:1:1$

2. 在$\triangle ABC$中,已知$a=5\sqrt{2}$,$c=10$,$A=30°$,则B等于 ( )

A. 105°　　B. 60°

C. 15°　　D. 105°或15°

3. 在$\triangle ABC$中,$b=2\sqrt{2}$,$a=2$,且三角形有解,则A的取值范围是 ( )

A. $0°<A<30°$　　B. $0°<A\leqslant 45°$

C. $60°<A<90°$　　D. $30°<A<60°$

4. 若$a\cos A=b\cos B$,则$\triangle ABC$一定是 ( )

A. 等腰三角形

B. 直角三角形

C. 等腰直角三角形

D. 等腰三角形或直角三角形

5. 在$\triangle ABC$中,若$A=105°$,$B=45°$,$b=2\sqrt{2}$,则$c=$________.

6. 在$\triangle ABC$中,若$\dfrac{\cos A}{a}=\dfrac{\cos B}{b}=\dfrac{\sin C}{c}$,则$C=$________.

7. 已知下列各三角形中的两边及其中一边的对角,判断三角形是否有解,有解的写出解答.

(1)$a=7$,$b=8$,$A=105°$;

(2)$a=10$,$b=20$,$A=80°$;

(3)$b=10$,$c=5\sqrt{6}$,$C=60°$;

(4)$a=2\sqrt{3}$,$b=6$,$A=30°$.

能力提升

8. 设a、b、c分别是$\triangle ABC$中A、B、C的对边,则直线$\sin A\cdot x+ay+c=0$与$bx-\sin B\cdot y+\sin C=0$的位置关系是 ( )

A. 平行　　B. 重合

C. 垂直　　D. 斜交

9. 在$\triangle ABC$中,如果$c=\sqrt{3}a$,$B=30°$,那么C等于 ( )

A. 120°　　B. 105°

C. 90°　　D. 75°

10. 在$\triangle ABC$中,$\sin^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{c-b}{2c}$,则$\triangle ABC$的形状为 ( )

A. 正三角形　　B. 直角三角形

C. 等腰直角三角形　　D. 等腰三角形

11. 在$\triangle ABC$中，$\cos2B+3\cos(A+C)+2=0$，$b=\sqrt{3}$，则$c:\sin C$等于（　　）

A. $3:1$　　B. $\sqrt{3}:1$

C. $\sqrt{2}:1$　　D. $2:1$

12. 已知a、b、c为$\triangle ABC$的三个内角A、B、C的对边，向量$\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},-1)$，$\boldsymbol{n}=(\cos A,\sin A)$，若$\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$，且$a\cos B+b\cos A=c\sin C$，则$A$、$B$的大小分别为（　　）

A. $\frac{\pi}{6}$、$\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{2\pi}{3}$、$\frac{\pi}{6}$

C. $\frac{\pi}{3}$、$\frac{\pi}{6}$　　D. $\frac{\pi}{3}$、$\frac{\pi}{3}$

13. 在$\triangle ABC$中，$\frac{b^2-c^2}{a^2}\sin2A+\frac{c^2-a^2}{b^2}\sin2B+\frac{a^2-b^2}{c^2}\sin2C$的值为________.

14. 在$\triangle ABC$中，若$C=3B$，则$\frac{c}{b}$的取值范围是________.

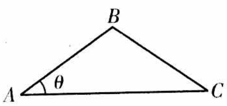
15. 在$\triangle ABC$中，$(a^2+b^2)\sin(A-B)=(a^2-b^2)\sin(A+B)$，试判断$\triangle ABC$的形状.

16. 在$\triangle ABC$中，满足$(2a-c)\cos B=b\cos C$.

(1)求B的大小；

(2)设$\boldsymbol{m}=(\sin A,\cos2A)$，$\boldsymbol{n}=(4k,1)(k>1)$，且$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}$的最大值为5，求$k$的值.

17. 如图，已知$\triangle ABC$中，$|AC|=1$，$\angle ABC=120°$，$\angle BAC=\theta$，记$f(\theta)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$.



(1)求$f(\theta)$关于θ的表达式；

(2)求$f(\theta)$的值域.

[参考答案]

1. D　解析：由$A+B+C=\pi$，$A:B:C=4:1:1$，可以求出三角形的三个内角为$A=120°$，$B=30°$，$C=30°$，再由正弦定理求出$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=\sin120°:\sin30°:\sin30°=\sqrt{3}:1:1$.

2. D　解析：由正弦定理$\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}$，得$\frac{10}{\sin C}=\frac{5\sqrt{2}}{\sin30°}$，$\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$. $\because a<c$，$\therefore A<C$，$\therefore C=45°$或$135°$. 再由$A+B+C=180°$，求出$B=105°$或$15°$.

3. B　解析：由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，得$\frac{2}{\sin A}=\frac{2\sqrt{2}}{\sin B}$，$\therefore \sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin B$. 又$0<\sin B\leqslant1$，得$0<\sin A\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$. 而$a<b$，则$A<B$，$\therefore A$的取值范围为$0°<A\leqslant45°$.

4. D　解析：由$a\cos A=b\cos B$，得$\sin A\cos A=\sin B\cos B$，即$\sin2A=\sin2B$，$\therefore 2A=2B$或$2A=\pi-2B$，即$A=B$或$A+B=\frac{\pi}{2}$，故选D.

5. 2　解析：$C=180°-105°-45°=30°$，$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，$\therefore \frac{2\sqrt{2}}{\sin45°}=\frac{c}{\sin30°}$. $\therefore \frac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{c}{\frac{1}{2}}$，$\therefore c=2$.

6. 90°　解析：由$\frac{\cos A}{a}=\frac{\cos B}{b}=\frac{\sin C}{c}$和正弦定理，知$\frac{\cos A}{2R\sin A}=\frac{\cos B}{2R\sin B}=\frac{\sin C}{2R\sin C}=\frac{1}{2R}$，$\therefore \begin{cases}\cos A=\sin A,\\ \cos B=\sin B,\end{cases}$ $\therefore A=B=45°$，即$C=90°$.

7. 解：(1)$a=7$，$b=8$，$a<b$，$A=105°>90°$，$\therefore$本题无解.
(2)$a=10$，$b=20$，$a<b$，$A=80°<90°$. 讨论如下：$\because b\sin A=20\sin80°>20\sin60°=10\sqrt{3}$，$\therefore a<b\sin A$. $\therefore$本题无解.
(3)$b=10$，$c=5\sqrt{6}$，$b<c$，$C=60°<90°$，$\therefore$本题有唯一解. $\because \sin B=\frac{b\sin C}{c}=\frac{10\sin60°}{5\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore B=45°$，$A=180°-(B+C)=75°$. $\therefore a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\frac{10\sin75°}{\sin45°}=\frac{10\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=5(\sqrt{3}+1)$.　(4)$a=2\sqrt{3}$，$b=6$，$a<b$，$A=30°<90°$. $\because b\sin A=6\sin30°=3$，$a>b\sin A$，$\therefore$本题有两解. $\therefore$由正弦定理，得$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{6\sin30°}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore B=60°$或$B=120°$. ①当$B=60°$时，$C=90°$，$c=\sqrt{a^2+b^2}=4\sqrt{3}$；②当$B$

$=120°$时,$C=30°=A$,∴ $c=a=2\sqrt{3}$. ∴ $B=60°$,$C=90°$,$c=4\sqrt{3}$或$B=120°$,$C=30°$,$c=2\sqrt{3}$.

8. C 解析:∵ $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,∴ $b\sin A=a\sin B$,∴ $A_1A_2+B_1B_2=b\sin A-a\sin B=0$,∴ 两条直线垂直.

9. A 解析:∵ $c=\sqrt{3}a$,∴ $\sin C=\sqrt{3}\sin A=\sqrt{3}\sin(180°-30°-C)=\sqrt{3}\sin(30°+C)=\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin C+\frac{1}{2}\cos C\right)$,即 $\sin C=-\sqrt{3}\cos C$. ∴ $\tan C=-\sqrt{3}$. 又 $C\in(0,180°)$,∴ $C=120°$. 故选 A.

10. B 解析:$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{1-\cos A}{2}=\frac{1}{2}-\frac{b}{2c}$,∴ $\cos A=\frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C}$,即 $\sin B=\sin C\cos A$,而 $\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\sin C\cos A$,∴ $\sin A\cos C=0$,又 $\sin A\neq0$,∴ $\cos C=0$,∴ $C=\frac{\pi}{2}$,故选 B.

11. D 解析:$\cos2B+3\cos(A+C)+2=2\cos^2B-3\cos B+1=0$,∴ $\cos B=\frac{1}{2}$或 1(舍去). ∴ $B=\frac{\pi}{3}$. ∴ $\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2$. 故选 D.

12. C 解析:∵ $\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$,∴ $\sqrt{3}\cos A-\sin A=0$,∴ $\tan A=\sqrt{3}$. ∵ A为$\triangle ABC$的内角,∴ $A=\frac{\pi}{3}$. ∵ $a\cos B+b\cos A=c\sin C$,由正弦定理有 $\sin A\cos B+\sin B\cos A=\sin^2C$,∴ $\sin(A+B)=\sin^2C$. ∴ $\sin C=\sin^2C$. ∴ $\sin C=1$. ∴ $C=\frac{\pi}{2}$. ∴ $B=\frac{\pi}{6}$.

13. 0 解析:由正弦定理,得$\frac{b^2-c^2}{a^2}\sin2A=\frac{\sin^2B-\sin^2C}{\sin^2A}\cdot2\sin A\cos A=\frac{\sin(B+C)\sin(B-C)}{\sin A}\cdot2\cos A=2\sin(B-C)\cdot\cos A=-2\sin(B-C)\cos(B+C)=\sin2C-\sin2B$. 同理$\frac{c^2-a^2}{b^2}\sin2B=\sin2A-\sin2C$,$\frac{a^2-b^2}{c^2}\sin2C=\sin2B-\sin2A$,∴ 原式$=(\sin2C-\sin2B)+(\sin2A-\sin2C)+(\sin2B-\sin2A)=0$.

14. (1,3) 解析:由正弦定理可得$\frac{c}{b}=\frac{\sin C}{\sin B}=\frac{\sin3B}{\sin B}=\frac{\sin(B+2B)}{\sin B}=\frac{\sin B\cdot\cos2B+\cos B\cdot\sin2B}{\sin B}=\cos2B+2\cos^2B=4\cos^2B-1$. 又∵ $A+B+C=180°$,$C=3B$,∴ $0°<B<45°$,$\frac{\sqrt{2}}{2}<\cos B<1$. ∴ $1<4\cos^2B-1<3$. 故 $1<\frac{c}{b}<3$.

15. 解:由$(a^2+b^2)\sin(A-B)=(a^2-b^2)\sin(A+B)$,得$a^2[\sin(A+B)-\sin(A-B)]=b^2[\sin(A+B)+\sin(A-B)]$,∴ $a^2\cos A\sin B=b^2\sin A\cos B$. 由正弦定理,得$\sin^2A\cos A\sin B=\sin^2B\sin A\cos B$. ∵ $0<A<\pi$,$0<B<\pi$,∴ $\sin A>0$,$\sin B>0$,$0<2A<2\pi$,$0<2B<2\pi$,∴ $\sin A\cos A=\sin B\cos B$,即 $\sin2A=\sin2B$. ∴ $2A=2B$ 或 $2A+2B=\pi$,即 $A=B$ 或 $A+B=\frac{\pi}{2}$. ∴ $\triangle ABC$ 为等腰三角形或直角三角形.

16. 解:(1)∵ $(2a-c)\cos B=b\cos C$,∴ $(2\sin A-\sin C)\cos B=\sin B\cos C$,即 $2\sin A\cos B=\sin B\cos C+\sin C\cos B=\sin(B+C)=\sin A$,∵ $\sin A\neq0$,∴ $\cos B=\frac{1}{2}$,∴ $B=\frac{\pi}{3}$.

(2)$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=4k\sin A+\cos2A=-2\sin^2A+4k\sin A+1$,$A\in\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$,设 $\sin A=t$,则 $t\in(0,1]$,则 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=-2t^2+4kt+1=-2(t-k)^2+1+2k^2$,∵ $k>1$,∴ 当 $t=1$ 时,$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}$ 取最大值. ∴ $(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n})_{\max}=-2+4k+1=5$,∴ $k=\frac{3}{2}$.

17. 解:(1)由正弦定理有$\frac{|BC|}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin120°}=\frac{|AB|}{\sin(60°-\theta)}$,∴ $|BC|=\frac{\sin\theta}{\sin120°}$,$|AB|=\frac{\sin(60°-\theta)}{\sin120°}$,∴ $f(\theta)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\cos60°=\frac{2}{3}\sin\theta\cdot\sin(60°-\theta)=\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\right)\sin\theta=\frac{1}{3}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{6}\left(0<\theta<\frac{\pi}{3}\right)$. (2)∵ $0<\theta<\frac{\pi}{3}$,∴ $\frac{\pi}{6}<2\theta+\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$,∴ $\frac{1}{2}<\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant1$,∴ $f(\theta)\in\left(0,\frac{1}{6}\right]$.

E 课后答案点拨

[练习(第 4 页)]

1. (1)$a\approx14$ cm,$b\approx19$ cm,$B=105°$;
(2)$a\approx18$ cm,$b\approx15$ cm,$C=75°$.

2. (1)$A\approx65°$,$C\approx85°$,$c\approx22$ cm
或$A\approx115°$,$C\approx35°$,$c\approx13$ cm;
(2)$B\approx41°$,$A\approx24°$,$a\approx24$ cm.

F 拓展阅读

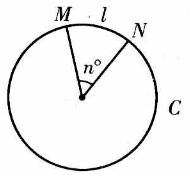
人们早期怎样测量地球的半径

我们知道,地球的形状近似一个球,那么怎样测出它的半径呢?

下面我们介绍一种人们早期近似测量地球半径的方法.

如图①,设圆周长为C,半径为R,圆上M、N两地间的弧

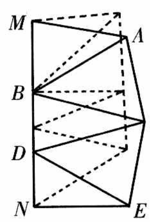
长为 l,对应的圆心角为 $n°$.



①

因为 360°的圆心角所对的弧长就是圆周 $C=2\pi R$,所以 1°的圆心角所对的弧长是$\frac{2\pi R}{360}$,即$\frac{\pi R}{180}$. 于是在半径为 R 的圆中,$n°$的圆心角所对的弧长为:$l=\frac{n\pi R}{180}$,$\therefore R=\frac{180l}{\pi n}$.

在实际测量地球半径时,M、N 两地常选在同一条子午线上,然后用天文方法测出 M、N 两地的纬度,即可算出 $n°$. 当 M、N 两地相距很远时,常采用布设三角网的方法,算出 MN,即 l 的长. 如图②,在 M、N 两地间布设三角点,构成$\triangle AMB$、$\triangle ABC$、$\triangle BCD$、$\triangle CDE$、$\triangle EDN$ 等. 用经纬仪可测出这些三角形的各个角的度数,再量出 M 点附近的那条基线 MA 的长,即可算出 MN 的长.



②

具体算法如下:

在$\triangle MAB$ 中,由于它的各个角已测出,AM 的长也已量出,故由正弦定理得:

$MB=\frac{AM\sin\angle MAB}{\sin\angle ABM}$,$AB=\frac{AM\sin\angle AMB}{\sin\angle ABM}$.

同理可求得 $BC=\frac{AB\sin\angle CAB}{\sin\angle ACB}$,$CD=\frac{BC\sin\angle CBD}{\sin\angle BDC}$,$BD=\frac{BC\sin\angle BCD}{\sin\angle BDC}$,$DE=\frac{CD\sin\angle ECD}{\sin\angle CED}$,$DN=\frac{DE\sin\angle DEN}{\sin\angle DNE}$.

$\therefore MN=MB+BD+DN$.

法国的皮卡尔(Picard. J. 1620 年—1682)于 1669—1671 年间,率领他的测量队首次测出了巴黎和亚眠之间的子午线的长,求得子午线 1°的长约为 111.28 km,这样他推算出地球的半径为 $R=\frac{180\times111.28}{3.1416\times1}\approx6\,376$(km).

他推算出的值与现在公认的地球半径 6 376 km 非常接近.

另外,布设三角网有多种方法(如图②中的虚线),要根据实际情况,布设的网点越少越好.

G 五年高考回放

1 (2009·广东)已知$\triangle ABC$ 中,A、B、C 的对边分别为 a、b、c. 若 $a=c=\sqrt{6}+\sqrt{2}$,且 $A=75°$,则 b 等于 ( )

A. 2　　B. $6-\sqrt{2}$

C. $4-2\sqrt{3}$　　D. $4+2\sqrt{3}$

[解析] $\sin A=\sin75°=\sin(30°+45°)=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$. 由 $a=c=\sqrt{6}+\sqrt{2}$,可知 $C=A=75°$,$\therefore B=30°$,$\sin B=\frac{1}{2}$. 由正弦定理,得 $b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}\times\frac{1}{2}=2$,故选 A.

[答案] A

2 (2009·湖南)在锐角$\triangle ABC$ 中,$BC=1$,$B=2A$,则$\frac{AC}{\cos A}$的值等于________,AC 的取值范围为________.

[解析] 由正弦定理,得 $\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}$,$\therefore \frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin2A}=\frac{AC}{2\sin A\cos A}$,$\therefore\frac{AC}{\cos A}=2BC=2$.

$\because A+B+C=\pi$,$\therefore 3A+C=\pi$,$C=\pi-3A$,

$\because \triangle ABC$ 是锐角三角形,

$$\therefore\begin{cases}0<A<\frac{\pi}{2},\\0<2A<\frac{\pi}{2},\\0<\pi-3A<\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

$\therefore\frac{\pi}{6}<A<\frac{\pi}{4}$,$\frac{\sqrt{2}}{2}<\cos A<\frac{\sqrt{3}}{2}$,又 $AC=2\cos A$,

$\therefore\sqrt{2}<AC<\sqrt{3}$.

[答案] 2　$(\sqrt{2},\sqrt{3})$

3 (2009·山东)已知函数 $f(x)=2\sin x\cos^2\frac{\varphi}{2}+\cos x\sin\varphi-\sin x(0<\varphi<\pi)$在 $x=\pi$ 处取得最小值.

(1)求 φ 的值;

(2)在$\triangle ABC$ 中,a、b、c 分别是 A、B、C 的对边,已知 $a=1$,$b=\sqrt{2}$,$f(A)=\frac{\sqrt{3}}{2}$,求 C.

[答案] 解:(1)$f(x)=2\sin x\cdot\frac{1+\cos\varphi}{2}+\cos x\sin\varphi-\sin x=\sin x+\sin x\cos\varphi+\cos x\sin\varphi-\sin x=\sin(x+\varphi)$.

$\because f(x)$在 $x=\pi$ 时取得最小值,

$\therefore \sin(\pi+\varphi)=-1$，故 $\sin\varphi=1$.

又 $0<\varphi<\pi$，$\therefore \varphi=\frac{\pi}{2}$.

(2)由(1)知 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$.

$\because f(A)=\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

且 A 为 $\triangle ABC$ 的内角，$\therefore A=\frac{\pi}{6}$.

由正弦定理，得 $\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

又 $b>a$，$\therefore B=\frac{\pi}{4}$ 或 $B=\frac{3\pi}{4}$.

①当 $B=\frac{\pi}{4}$ 时，$C=\pi-A-B=\pi-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{12}$；

②当 $B=\frac{3\pi}{4}$ 时，$C=\pi-A-B=\pi-\frac{\pi}{6}-\frac{3\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$.

4 (2009·江西)在 $\triangle ABC$ 中，A、B、C 所对的边分别为 a、b、c，$A=\frac{\pi}{6}$，$(1+\sqrt{3})c=2b$.

(1)求 C；

(2)若 $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=1+\sqrt{3}$，求 a、b、c.

[答案] 解：(1)由 $(1+\sqrt{3})c=2b$，得 $\frac{b}{c}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sin B}{\sin C}$，则有 $\frac{\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}-C\right)}{\sin C}=\frac{\sin\frac{5\pi}{6}\cos C-\cos\frac{5\pi}{6}\sin C}{\sin C}=\frac{1}{2}\cot C+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$，得 $\cot C=1$，$\because 0<C<\pi$，$\therefore C=\frac{\pi}{4}$.

(2)由 $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=1+\sqrt{3}$，得 $ab\cos C=1+\sqrt{3}$.

而 $C=\frac{\pi}{4}$，即得 $\frac{\sqrt{2}}{2}ab=1+\sqrt{3}$，

则有 $\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{2}ab=1+\sqrt{3},\\(1+\sqrt{3})c=2b,\\\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\sqrt{2},\\b=1+\sqrt{3},\\c=2.\end{cases}$

5 (2009·四川)在 $\triangle ABC$ 中，A、B 为锐角，A、B、C 所对的边分别为 a、b、c，且 $\cos 2A=\frac{3}{5}$，$\sin B=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

(1)求 $A+B$ 的值；

(2)若 $a-b=\sqrt{2}-1$，求 a、b、c 的值.

[答案] 解：(1)$\because A$、B 为锐角，$\sin B=\frac{\sqrt{10}}{10}$，$\therefore \cos B=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

又 $\cos 2A=1-2\sin^2A=\frac{3}{5}$，$\therefore \sin A=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos A=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. $\therefore \cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B=\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}-\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\because 0<A+B<\pi$，$\therefore A+B=\frac{\pi}{4}$.

(2)由(1)知 $C=\frac{3\pi}{4}$，$\therefore \sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，得 $\sqrt{5}a=\sqrt{10}b=\sqrt{2}c$，即 $a=\sqrt{2}b$，$c=\sqrt{5}b$. $\because a-b=\sqrt{2}-1$，$\therefore \sqrt{2}b-b=\sqrt{2}-1$，$\therefore b=1$. $\therefore a=\sqrt{2}$，$c=\sqrt{5}$.

6 (2008·浙江)在 $\triangle ABC$ 中，A、B、C 所对的边分别为 a、b、c. 若 $(\sqrt{3}b-c)\cos A=a\cos C$，则 $\cos A=$________.

[解析] 由正弦定理，得 $(\sqrt{3}\sin B-\sin C)\cos A=\sin A\cos C$，化简得 $\sqrt{3}\sin B\cos A=\sin(A+C)=\sin B$，$\because \sin B\neq 0$，$\therefore \cos A=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

[答案] $\frac{\sqrt{3}}{3}$

7 (2007·福建)在 $\triangle ABC$ 中，$\tan A=\frac{1}{4}$，$\tan B=\frac{3}{5}$.

(1)求 C 的大小；

(2)若 $\triangle ABC$ 最大边的边长为 $\sqrt{17}$，求最小边的边长.

[答案] 解：(1)$\because C=\pi-(A+B)$，$\therefore \tan C=-\tan(A+B)=-\frac{\frac{1}{4}+\frac{3}{5}}{1-\frac{1}{4}\times\frac{3}{5}}=-1$. $\because 0<C<\pi$，$\therefore C=\frac{3}{4}\pi$.

(2)$\because C=\frac{3}{4}\pi$，$\therefore AB$ 边最大，即 $AB=\sqrt{17}$. 又 $\tan A<\tan B$，A、$B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore A$ 最小，BC 边为最小边. 由 $\tan A=\frac{1}{4}$ 且 $A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，得 $\sin A=\frac{\sqrt{17}}{17}$. 由 $\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A}$，得 $BC=AB\cdot\frac{\sin A}{\sin C}=\sqrt{2}$. $\therefore$ 最小边 $BC=\sqrt{2}$.

8 (2007·全国)设锐角 $\triangle ABC$ 的内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，$a=2b\sin A$.

(1)求 B 的大小；

(2)求 $\cos A+\sin C$ 的取值范围.

[答案] 解：(1)由 $a=2b\sin A$，根据正弦定理，得 $\sin A=2\sin B\sin A$，又$\because \sin A\neq 0$，$\therefore \sin B=\frac{1}{2}$，由 $\triangle ABC$ 为锐角三角形得 $B=\frac{\pi}{6}$.

(2) $\cos A+\sin C=\cos A+\sin\left(\pi-\dfrac{\pi}{6}-A\right)=\cos A+\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+A\right)=\cos A+\dfrac{1}{2}\cos A+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin A=\sqrt{3}\sin\left(A+\dfrac{\pi}{3}\right)$. 由 $\triangle ABC$ 为锐角三角形且 $B=\dfrac{\pi}{6}$，知 $\begin{cases}0<A<\dfrac{\pi}{2},\\ 0<\pi-\dfrac{\pi}{6}-A<\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$ $\therefore \dfrac{\pi}{3}<A<\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore \dfrac{2\pi}{3}<A+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{5\pi}{6}$，$\dfrac{1}{2}<\sin\left(A+\dfrac{\pi}{3}\right)<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore \dfrac{\sqrt{3}}{2}<\sqrt{3}\sin\left(A+\dfrac{\pi}{3}\right)<\dfrac{3}{2}$，$\therefore \cos A+\sin C$ 的取值范围为 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2}\right)$.

1.1.2 余弦定理

A 教材梳理

知识点一　余弦定理

1. 定理内容：三角形中任何一边的平方等于其他两边的平方和减去这两边与它们的夹角的余弦的积的两倍，即

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$；

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$；

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

注意：应从以下四个方面理解余弦定理：

(1) 余弦定理是勾股定理的推广，勾股定理是余弦定理的特例；

(2) 余弦定理揭示的是三角形中边角之间的关系，是解三角形的重要工具之一；

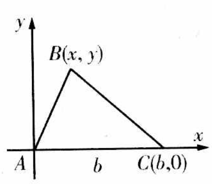
(3) 在余弦定理表达式中，含有三边和一边的对角这四个元素，可利用方程的思想，知三求一；

(4) 在应用余弦定理时，因为已知三边(求角)或已知两边及夹角(求第三边)时，三角形是唯一确定的，即此时的解是唯一的.

2. 余弦定理的推导与证明：

课本给出了余弦定理的向量证法，下面给出其解析几何证法和构造直角三角形后用勾股定理的证法.

(1) 解析几何证法：以 A 为原点，AC 所在直线为 x 轴建立直角坐标系，如图，则可得点 A、C 坐标分别为 $A(0,0)$、$C(b,0)$.



设点 B 的坐标为 (x,y)，由三角函数的定义，得

$\dfrac{x}{c}=\cos A$，$\dfrac{y}{c}=\sin A$，

即点 B 的坐标为 $(c\cos A, c\sin A)$.

根据两点间距离公式，得

$a=|BC|=\sqrt{(c\cos A-b)^2+(c\sin A-0)^2}$，

也就是 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

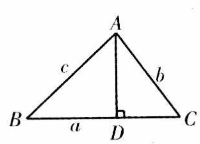
同理可得 $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$，

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

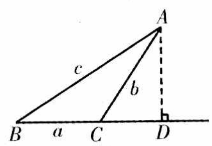
(2) 构造直角三角形后用勾股定理的证法：

已知 $\triangle ABC$ 中两边 a、b、C，求证：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

证明：当 C 为直角时，$\cos C=0$，$\therefore c^2=a^2+b^2$；当 $\angle C$ 为锐角时，如图①，高 AD 将 $\triangle ABC$ 分成两个直角三角形 $\triangle ADB$ 和 $\triangle ADC$；当 $\angle C$ 为钝角时，如图②，作高 AD，则构造了两个直角三角形 $\triangle ADB$ 和 $\triangle ADC$.



①



②

现在来看 $\overrightarrow{AC}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 方向上的正射影数量，当 C 分别为锐角和钝角时，得到两个数量符号相反；当 C 为直角时，射影为零，因此无论角 C 是锐角、钝角还是直角，都有：

$AD=b\sin C$，$DC=b\cos C$，$BD=a-b\cos C$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADB$ 中，运用勾股定理，得

$c^2=AD^2+BD^2=b^2\sin^2 C+(a-b\cos C)^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

同理可证 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

知识点二　余弦定理的推论

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

注意:(1)若已知三角形三边求角时,可利用上述推论.并且若三角形存在,则它的解是唯一的,原因是求出一个角的余弦值后,在$(0,\pi)$上,角与余弦值一一对应.

(2)若A为锐角,则$\cos A>0$,即$b^2+c^2-a^2>0$,即$b^2+c^2>a^2$;若A为直角,则$\cos A=0$,即$b^2+c^2-a^2=0$,即$b^2+c^2=a^2$;若A为钝角,则$\cos A<0$,即$b^2+c^2-a^2<0$,即$b^2+c^2<a^2$.由此可得到一个在解选择题和填空题时经常用到的结论:如果一个三角形两边的平方和等于第三边的平方,那么第三边所对的角为直角;如果小于第三边的平方,那么第三边所对的角是钝角;如果大于第三边的平方,那么第三边所对的角是锐角.

B 教材拓展

拓展点一　正弦定理、余弦定理在解三角形中的应用

1. 正弦定理和余弦定理都反映了三角形中的边与角的关系,用其解三角形时有以下几类:

(1)已知三角形的两边和其中一边的对角,解三角形.基本解法是先由正弦定理求出另一条边所对的角,用三角形的内角和定理求出第三个角,再用正弦定理求出第三边,注意判断解的个数.

(2)已知三角形的两角和任一边,解三角形.基本解法是若所给边是已知角的对边时,可由正弦定理求另一边,再由三角形内角和定理求出第三个角,最后由正弦定理求第三边.若所给边不是已知角的对边时,先由三角形内角和定理求第三个角,再由正弦定理求另外两边.

(3)已知两边和它们的夹角,解三角形.基本解法是先用余弦定理求第三边,再用正弦定理或余弦定理求另一角,最后用三角形内角和定理求第三个角.

(4)已知三角形的三边,解三角形.基本解法是先用余弦定理求出一个角,再用正弦定理或余弦定理求出另一个角,最后用三角形内角和定理,求出第三个角.

从以上分析可以看出,在解三角形过程中,有时求某一个角时既可用正弦定理,又可用余弦定理,各有长处:应用余弦定理运算可能较复杂,但在$(0,\pi)$上角与其余弦值是一一对应的,所以不需讨论;而应用正弦定理时运算量小,但由于$(0,\pi)$上正弦值与角并非一一对应,所以往往需要分类讨论,如"典型题解"中的例1.而在已知三角形中的两边及一边对角时,可以用正弦定理求解,也可以用余弦定理并结合正弦定理求解.

例:$\triangle ABC$中,已知$b=3$,$c=3\sqrt{3}$,$B=30°$,解三角形.

[解析]　题目已知两边和一边的对角,要求另一边和其他的角,可首先由正弦定理求出C,然后再求其他的边和角.亦可由余弦定理列出关于边长a的方程,首先求出边长a,再由正弦定理求A、C.

[答案]　解法1:由$b<c$,$B=30°$,$b>c\sin30°=\frac{3}{2}\sqrt{3}$,知本题有两解.

$\sin C=\frac{c\sin B}{b}=\frac{3\sqrt{3}}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore C=60°$或$C=120°$.

①当$C=60°$时,$A=90°$,由勾股定理,得$a=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{3^2+(3\sqrt{3})^2}=6$;

②当$C=120°$时,$A=30°$,$\triangle ABC$为等腰三角形,$\therefore a=3$.

解法2:由余弦定理$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$,得$3^2=a^2+(3\sqrt{3})^2-2\times3\sqrt{3}a\times\cos30°$,

即$a^2-9a+18=0$,$\therefore a=6$或$a=3$.

①当$a=6$时,由正弦定理,得

$\sin A=\frac{a\sin B}{b}=\frac{6}{3}\times\frac{1}{2}=1$,

$\therefore A=90°$,$C=60°$.

②当$a=3$时,$A=30°$,$C=120°$.

[点评]　解法1是由正弦定理先求角再求边,解法2是由余弦定理先求边再求角.从以上两种解法中可以看出正弦定理与余弦定理的相通性.

2. 利用正弦定理、余弦定理判断三角形的形状

利用三角形中边的关系和角的关系,推导出满足题设条件的三角形形状,其常用方法是:将已知式子都化为角的式子或边的式子再判断.若转化为边的关系式,需再进行因式分解、化简,判断三角形的形状,看是否有两边相等,有三边相等,或是否符合勾股定理.若转化为角的关系式,需再利用三角函数的知识进行恒等变形,同时要考虑角的范围,看是否有两角相等,三角相等或是否有一角为直角,从而确定三角形的形状.

例:在$\triangle ABC$中,若$\frac{a^3+b^3-c^3}{a+b-c}=c^2$,$\sin A\sin B=\frac{3}{4}$,试判定$\triangle ABC$的形状.

[解析]　给定条件既有边长关系式,又有角的三角函数式,可以设法将它们统一为角的关系式.注意到已知条件与余弦定理的联系,可求出角C,从而使问题得解.

[答案]　解:由$\frac{a^3+b^3-c^3}{a+b-c}=c^2$,得

$a^3+b^3-c^3=(a+b)c^2-c^3$

$\Rightarrow a^2-ab+b^2=c^2$

$\Rightarrow a^2+b^2-c^2=ab$,

$\therefore \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{ab}{2ab}=\frac{1}{2}$.