SHIJIE ZHUMING SANJIAOXUE JINGDIAN ZHUZUO GOUCHEN

世界著名三角学经典著作钩沉

平面三角卷

（II）

《世界著名三角学经典著作钩沉》编写组 编

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

SHIJIE ZHUMING SANJIAOXUE JINGDIAN ZHUZUO GOUCHEN

世界著名三角学经典著作钩沉

(平面三角卷II)

《世界著名三角学经典著作钩沉》编写组 编

哈爾濱工業大學出版社

内 容 提 要

本书共有五部分，分别为绪论，第一编基本公式，第二编对数表、三角方程，第三编三角形的解法，第四编与复数相关的内容.

本书适合大、中学师生及三角学爱好者阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

世界著名三角学经典著作钩沉. 平面三角卷. 2/《世界著名三角学经典著作钩沉》编写组编. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2010.7

ISBN 978-7-5603-3090-7

Ⅰ.①世… Ⅱ.①世… Ⅲ.①平面三角 Ⅳ.①O124

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 174840 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 唐 蕾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开 本 787mm×960mm 1/16 印张 18.5 字数 322 千字
版 次 2010 年 10 月第 1 版 2010 年 10 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-3090-7
印 数 1~2 000 册
定 价 38.00 元

目录

第二编　对数表、三角方程

绪 论 有向线段、投影

§1 定 义

所谓**矢量**或**有向线段**,指的是在它上面已定义一个方向的一段直线.确定有向线段的方向,应当把限制它的两点作出区别.这两点中的一点叫做**始点**,另一点叫做**终点**.于是有向线段的**方向**,就是一个动点通过线段由始点到终点的移动方向.

矢量的几何表示法为$\overrightarrow{AB}$,读出一个矢量,应先读始点,再读终点.例如,矢量$\overrightarrow{AB}$,就是指始点为 A,终点为 B 的矢量.

由上面的定义,可以得到确定一个矢量的三个要素:

(1) **作用线** 就是载它的那条无限长的直线.

(2) **长度** 就是从始点到终点的(几何)距离.

(3) **方向** 就是一个动点在它上面由始点移向终点的方向.

如果两个矢量的作用线平行或重合,长度相等,并且方向也相同,则它们叫做**等价**.

由此可见,如果作用线不同的两个矢量$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{A'B'}$等价(图1),那么,图形 $ABB'A'$ 是一个平行四边形,因为它的对边分别平行并且相等.

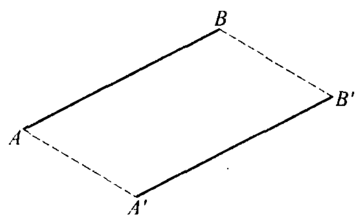

图 1

写两个矢量等价时,习惯上用等号.例如,等式$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$表示$\overrightarrow{AB}$等价于$\overrightarrow{A'B'}$.

§2 合 矢

设有矢量$\overrightarrow{AA'}$,$\overrightarrow{BB'}$,$\overrightarrow{CC'}$,$\overrightarrow{DD'}$.所谓这些矢量的**合矢**或**几何和**,是用如下方式所作的有向线段.取空间的任意一点 O(图 2)为始点,作$\overrightarrow{Oa}$等价于$\overrightarrow{AA'}$;以 a 为新的始点,作$\overrightarrow{ab}$等价于$\overrightarrow{BB'}$.同样,作$\overrightarrow{bc}$等价于$\overrightarrow{CC'}$;最后作$\overrightarrow{cd}$等价于$\overrightarrow{DD'}$.那么,始点是第一矢量的始点 O,终点是最后矢量的终点 d 的$\overrightarrow{Od}$(或等价于$\overrightarrow{Od}$的

任何矢量),就是所设各矢量的**合矢**或**几何和**.

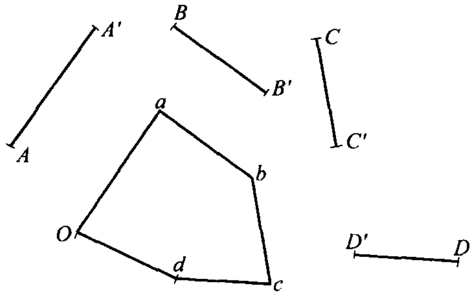

图 2

这里要注意,点 O 是任意的.按照定义,合矢可以有任意的始点.换句话说,有无穷多条彼此都是等价的有向线段可作为合矢.

表示一个矢量是另外各个矢量的合矢,通常用加号.例如,写成

$$\overrightarrow{Od}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{DD'}$$

注意 在只有两个矢量的情况下,它们的合矢,还可以用下面的方法作出:设有两个矢量 $\overrightarrow{AA'}$,$\overrightarrow{BB'}$,取空间的一点 O 为始点(图 3),作 $\overrightarrow{Oa}$,$\overrightarrow{Ob}$ 分别等价于所设的两个矢量.那么,在 $\overrightarrow{Oa}$ 与 $\overrightarrow{Ob}$ 上所作的平行四边形 $Oacb$ 的对角线 $\overrightarrow{Oc}$,就是所求的合矢.事实上

$$\overrightarrow{ac}=\overrightarrow{Ob}=\overrightarrow{BB'}$$

这就证明了 $\overrightarrow{Oc}$ 恰好是按照前面所说的作法,接连作了 $\overrightarrow{Oa}$ 与 $\overrightarrow{ac}$ 分别等价于 $\overrightarrow{AA'}$ 与 $\overrightarrow{BB'}$ 以后所得出的有向线段.

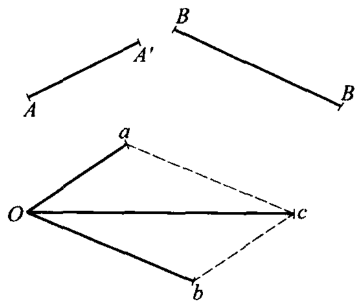

图 3

还可以看到,两个矢量的合矢,与求和时所取这两矢量的次序无关.因为在图 3 中根据定义,同时有

$$\overrightarrow{Oc}=\overrightarrow{Oa}+\overrightarrow{ac}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}$$

与

$$\overrightarrow{Oc}=\overrightarrow{Ob}+\overrightarrow{bc}=\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{AA'}$$

容易推知,对于任何几何和,可以变换各加项的次序而不影响其和.为此,

只要证明可以变换两个相邻项的次序就够了①.

在这里不再详细说明这一推广，也不再讲到以后用不到的关于几何和的一些普通性质，这些性质是与代数和一致的.

§3 载在一条轴上的有向线段

定义 所谓轴是一条无限长的直线，在它上面选定了一个方向，叫做轴的**正方向**；相反的方向就说是**负方向**.

在代数里已定义过载在一条轴上的一条有向线段的**代数量**，在这里重新提一下这个定义和这种有向线段的基本性质②.

设已知载在一条轴上的有向线段，就是说，已知以这轴为作用线的一条有向线段. 所谓这条有向线段的代数量，指的是一个（代数的）数，它以有向线段的长为绝对值，并带有“+”或“-”，这个符号取决于有向线段的方向是轴的正方向或负方向.

为了表示一条有向线段的代数量，在表示这条有向线段的两个字母上面划一条横线. 例如，$\overline{AB}$ 表示有向线段$\overrightarrow{AB}$ 的代数量.

注意 由上面的定义可以推知，载在同轴上的两个长度相等而方向相反的有向线段，它们的量值是两个绝对值相等符号不同的（代数的）数. 例如，$\overline{AB}$ 与$\overline{BA}$ 就是这样的两个数. 因而有

$$\overline{AB}+\overline{BA}=0$$

§4 定 理

载在同轴上各有向线段的合矢的代数量，等于这些有向线段的代数量的和.

在证明时，可以假定各有向线段的首尾相连，因为它们的合矢需要这样来作出.

(1) 先考虑两条有向线段$\overrightarrow{AB}$ 与$\overrightarrow{BC}$ 的情况，它们的合矢是$\overrightarrow{AC}$③.

① 这个证明，不适用于所要求和的两个矢量有互相平行的作用线；这时四点 O, a, b, c 将在同一直线上. 这种特殊情况的讨论，可参看《初等数学教程 —— 代数》(C. 布尔勒著，朱广才译，上海科学技术出版社出版，以下简称《代数》—— 译者注) 中绪论第 1 ~ 3 节.

② §3, §4, §5 只是《代数》中第 7 节与第 23 节的重复叙述（这里讲的“代数量”，就是《代数》中的“代数尺度”—— 译者注.）

③ 在这个证明里，有意不作图示，留待读者自己作出.

如果两条有向线段的方向相同,那么它们的量值就同号.因而和$\overline{AB}+\overline{BC}$的绝对值等于这两线段的绝对值的和;而这和的符号是两个加项的共同符号.另一方面,点 B 既在 A 与 C 之间,那么就有

$$AC = AB + BC$$

这已说明了合矢$\overrightarrow{AC}$的代数量的绝对值,等于和$\overline{AB}+\overline{BC}$的绝对值,并且由于合矢与原来的两条同向线段的方向相同,因此它的量值$\overline{AC}$与$\overline{AB}$, $\overline{BC}$的符号相同,即与$\overline{AB}+\overline{BC}$的符号相同,因此有

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$$

这里,等式的两边有相同的绝对值与符号.

如果两条有向线段的方向相反,由于合矢并不因改变两条有向线段的次序而改变,以及两个数的和也与这两个数的次序无关,所以便总可以假定 AB 是两条有向线段中较长的一条.这两条有向线段的代数量不同号,而且因为 $AB > BC$,所以和$\overline{AB}+\overline{BC}$的绝对值便是$AB-BC$,而符号与$\overline{AB}$的符号相同.另一方面,点 C 落在 A, B 之间,故有

$$AC = AB - BC$$

这就证明了$\overline{AC}$的绝对值也等于$AB-BC$.而且合矢$\overrightarrow{AC}$既与$\overrightarrow{AB}$同向,$\overline{AC}$也就与$\overline{AB}$同号.因此仍有

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$$

在两条有向线段相等而方向相反的特殊情况,它们的合矢是零;而它们的代数量有相等的绝对值和相反的符号,因而和也是零.

(2) 定理在两条有向线段的情况下的真实性,容易推广到若干条有向线段的情况.

设有四条有向线段 $\boldsymbol{S}_1,\boldsymbol{S}_2,\boldsymbol{S}_3,\boldsymbol{S}_4$,它们的代数量分别是 s_1,s_2,s_3,s_4.命 $\boldsymbol{R}_1$ 为 $\boldsymbol{S}_1$ 与 $\boldsymbol{S}_2$ 的合矢,r_1 为它的量值;$\boldsymbol{R}_2$ 为 $\boldsymbol{R}_1$ 与 $\boldsymbol{S}_3$ 的合矢,r_2 为它的量值;$\boldsymbol{R}$ 为 $\boldsymbol{R}_2$ 与 $\boldsymbol{S}_4$ 的合矢,r 为它的量值.那么,$\boldsymbol{R}$ 是所设四条有向线段的合矢.按照上面(1)的证明,有以下各个等式

$$r_1 = s_1 + s_2, r_2 = r_1 + s_3, r = r_2 + s_4$$

这里 r 的求得是先作 s_1 与 s_2 的和,在它的结果 r_1 上加上 s_3,再在所得的结果 r_2 上加上 s_4.因之,根据和的定义有

$$r = s_1 + s_2 + s_3 + s_4$$

这就证明了本节的定理.

§5　定　理

夏耳定理　设 A,B,C,D,E 是位于一轴上的多个点，那么，这些点所确定的各有向线段的代数量之间有关系式

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}+\overline{EA}=0 \qquad ①$$

这个定理是上节定理的一个直接结果. 因为有向线段 $\overrightarrow{AE}$ 是各有向线段 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{DE}$ 的合矢，所以有

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}=\overline{AE}$$

在这个等式的两边都加上 $\overline{EA}$，并注意到 $\overline{AE}+\overline{EA}=0$，即得出等式 ①.

注意　这个极为重要的定理，经常应用在三点的情况. 设 O,A,B 是位于一轴上的三点，那么有

$$\overline{OA}+\overline{AB}+\overline{BO}=0$$

由此得出

$$\overline{AB}=-\overline{BO}-\overline{OA}$$

注意到 $-\overline{BO}=\overline{OB}$，即得

$$\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA} \qquad ②$$

这是夏耳关系式常用的形式.

§6　投　影

定义　已知一条轴 $x'x$ 与不平行于这条轴的一个平面 P，所谓空间一点 A 在轴 $x'x$ 上平行于平面 P 的投影，指的是通过 A 而平行于 P 的平面与轴的交点 a（图 4）. 平面 P 叫做投影上的**准平面**.

直线 Aa 叫做点 A 的**投射线**.

当准平面 P 垂直于投影轴 $x'x$ 时，就说投影是**直角的**. 这时一切投射线都垂直于轴，因为它们都位于垂直于这轴的平面内. 于是可以说，一点在一条轴上的直角投影，是由这点向轴所作的垂线的**垂足**.

所谓一个矢量在一条轴上的投影，指的是载在轴上的一条有向线段，它的始点与终点分别是原矢量的始点与终点的投影.

例如，设有矢量 $\overrightarrow{AB}$，A 与 B 在 $x'x$ 轴上的投影分别是 a 与　　　么，$\overrightarrow{ab}$ 就是 $\overrightarrow{AB}$ 的投影. 我们写成