

SHIJIE ZHUMING SANJIAOXUE
JINGDIAN ZHUZUO GOUCHEN

世界著名三角学 经典著作钩沉

平面三角卷

(II)

《世界著名三角学经典著作钩沉》编写组 编

SHIJE ZHUMING SANJIAOXUE JINGDIAN ZHUZUO GOUCHEN
SHIJE ZHUMING SANJIAOXUE JINGDIAN ZHUZUO GOUCHEN
SHIJE ZHUMING SANJIAOXUE JINGDIAN ZHUZUO GOUCHEN

世界著名三角学经典著作钩沉

(平面三角卷II)

《世界著名三角学经典著作钩沉》编写组 编



哈尔滨工业大学出版社

内 容 提 要

本书共有五部分,分别为绪论,第一编基本公式,第二编对数表、三角方程,第三编三角形的解法,第四编与复数相关的内容.

本书适合大、中学师生及三角学爱好者阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

世界著名三角学经典著作钩沉.平面三角卷.2/
《世界著名三角学经典著作钩沉》编写组编. —哈尔滨:
哈尔滨工业大学出版社,2010.7

ISBN 978 - 7 - 5603 - 3090 - 7

I. ①世… II. ①世… III. ①平面三角 IV. ①O124

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 174840 号

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 唐 蕾

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451 - 86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司

开 本 787mm×960mm 1/16 印张 18.5 字数 322 千字

版 次 2010 年 10 月第 1 版 2010 年 10 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978 - 7 - 5603 - 3090 - 7

印 数 1 ~ 2 000 册

定 价 38.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

◎
目
录

绪 论 有向线段、投影 // 1

§ 1 定义 // 1

§ 2 合矢 // 1

§ 3 载在一条轴上的有向线段 // 3

§ 4 定理 // 3

§ 5 定理 // 5

§ 6 投影 // 5

§ 7 定理 // 6

§ 8 定理 // 7

§ 9 定义 // 8

第一编 基本公式

第一章 弧与角 // 13

§ 10 圆弧的度量 // 13

§ 11 问题 // 13

§ 12 定向圆 // 15

§ 13 定向弧 // 15

§ 14 定理 // 16

§ 15	等余式	//	17
§ 16	定理	//	19
§ 17	定义	//	19
§ 18	定理	//	20
§ 19	总结	//	20
§ 20	加法	//	21
§ 21	角	//	22
§ 22	弧	//	23
§ 23	定理	//	24
	习题	//	24

第二章 三角线的定义 // 25

§ 24	定义	//	25
§ 25	余弦	//	25
§ 26	余弦值的变化	//	26
§ 27	正弦	//	27
§ 28	正弦值的变化	//	27
§ 29	注意	//	28
§ 30	正切	//	28
§ 31	正切值的变化	//	29
§ 32	余切	//	30
§ 33	余切值的变化	//	31
§ 34	注意	//	31
§ 35	正割	//	32
§ 36	正割值的变化	//	32
§ 37	注意	//	33
§ 38	余割	//	33
§ 39	余割值的变化	//	33
§ 40	注意	//	34
§ 41	各三角线的符号表	//	34
§ 42	一个角的三角线	//	35
§ 43	两轴间的角的余弦	//	35
§ 44	基本定理	//	36
	习题	//	36

第三章	三角线的反演	// 37
	§ 45 问题的提出	// 37
	§ 46 余弦与正割的反演	// 37
	§ 47 正弦与余割的反演	// 38
	§ 48 正切与余切的反演	// 39
	§ 49 注意	// 40
	习题	// 40
第四章	补弧、余弧等各线之间的关系式	// 41
	§ 50 引论	// 41
	§ 51 定理	// 41
	§ 52 定理	// 42
	§ 53 定理	// 42
	§ 54 定理	// 43
	§ 55 注意 1	// 44
	§ 56 注意 2	// 45
	§ 57 问题	// 45
	习题	// 46
第五章	同弧各线间的代数关系式	// 47
	§ 58 基本关系式	// 47
	§ 59 定理	// 47
	§ 60 定理	// 48
	§ 61 系	// 49
	§ 62 定理	// 49
	§ 63 定理	// 49
	§ 64 注意	// 50
	§ 65 其他关系式	// 51
	§ 66 应用	// 51
	§ 67 问题	// 52
	§ 68 问题	// 53
	§ 69 弧 $\frac{p\pi}{n}$ 的三角线的计算	// 54
	§ 70 定理	// 54
	§ 71 系	// 54
	§ 72 应用	// 55
	习题	// 57

第六章 弧的加法与减法 // 58

- § 73 问题的提出 // 58
- § 74 两弧的和 // 58
- § 75 $\sin(a+b)$ 的计算 // 59
- § 76 $\tan(a+b)$ 的计算 // 61
- § 77 两弧的差 // 61
- § 78 多条弧的和 // 62
- § 79 通式 // 62
- § 80 前提 // 63
- § 81 证明 // 64
- 习题 // 65

第七章 弧的乘法与除法 // 67

- § 82 问题的提出 // 67
- § 83 弧的乘法 // 67
- § 84 一般情形 // 67
- § 85 弧的除法 // 68
- § 86 问题 // 69
- § 87 问题 // 72
- § 88 问题 // 76
- § 89 定理 // 77
- § 90 除以4,8,16等的除法 // 78
- 习题 // 79

第八章 和、差化积的变换 // 81

- § 91 正、余弦的积化成和、差 // 81
- § 92 正、余弦的和、差化成积 // 82
- § 93 应用1 // 83
- § 94 应用2 // 83
- § 95 应用3 // 84
- § 96 正切的和、差的变换 // 86
- § 97 应用 // 86
- 习题 // 87

第二编 对数表、三角方程

- 第九章 三角线的近似值** // 93
- § 98 定理 // 93
 - § 99 定理 // 93
 - § 100 定理 // 94
 - § 101 注意 // 95
 - § 102 定理 // 97
 - § 103 $\cos 10''$ 与 $\sin 10''$ 的近似计算 // 98
 - 习题 // 99
- 第十章 对数表的作法** // 100
- § 104 辛浦生公式 // 100
 - § 105 化简 // 101
 - § 106 验算 // 102
 - § 107 注意 // 102
- 第十一章 对数表的格式和用法** // 104
- § 108 三角表的类型 // 104
 - § 109 对数表的格式 // 104
 - § 110 对数表的“差”格式 // 105
 - § 111 对数表的用法 // 106
 - § 112 问题 1 // 106
 - § 113 问题 2 // 107
 - § 114 逆问题 1 // 108
 - § 115 逆问题 2 // 109
 - § 116 注意 // 111
 - 习题 // 111
- 第十二章 化一式为可用对数计算** // 112
- § 117 问题的提出 // 112
 - § 118 和的变换 // 113
 - § 119 $A - B$ 的变换 // 114
 - § 120 注意 // 114

- § 121 一般情形 // 115
- § 122 有理式 // 116
- § 123 无理式 // 117
- § 124 注意 // 117
- § 125 二次方程的三角解法 // 118
- 习题 // 124

第十三章 一元三角方程 // 126

- § 126 概论 // 126
- § 127 问题 // 127
- § 128 问题 // 132
- § 129 问题 // 132
- 习题 // 134

第十四章 三角方程组 // 136

- § 130 概论 // 136
- § 131 问题 // 136
- § 132 注意 // 137
- § 133 方程内含未知角本身的情形 // 139
- § 134 问题 // 139
- § 135 问题 // 140
- 习题 // 141

第三编 三角形的解法

第十五章 直角三角形 // 145

- § 136 记号 // 145
- § 137 定理 // 145
- § 138 定理 // 146
- § 139 总结 // 146
- § 140 直角三角形的解法 // 147
- § 141 第一种情形 // 147
- § 142 第二种情形 // 148
- § 143 第三种情形 // 148
- § 144 第四种情形 // 149

§ 145	实际计算的格式	//	149
§ 146	非典型的情形	//	154
§ 147	问题	//	154
§ 148	问题	//	154
	习题	//	155

第十六章 关于斜三角形的公式 // 156

§ 149	定理	//	156
§ 150	定理	//	157
§ 151	定理	//	158
§ 152	总结	//	159
§ 153	三组的等价性	//	160
§ 154	定理	//	163
§ 155	定理	//	164
	习题	//	166

第十七章 斜三角形的解法 // 168

§ 156	典型情形	//	168
§ 157	第一种情形	//	168
§ 158	第二种情形	//	169
§ 159	第三种情形	//	173
§ 160	第四种情形	//	177
§ 161	内切圆的半径	//	180
§ 162	外接圆的半径	//	181
§ 163	实际计算格式	//	181
§ 164	非典型的情形	//	186
§ 165	问题	//	186
§ 166	问题	//	187
§ 167	问题	//	189
§ 168	一般注意	//	190
§ 169	例 1	//	191
§ 170	例 2	//	192
	习题	//	193

第十八章 各种应用	//	196
§ 171 凸四边形	//	196
§ 172 问题	//	197
§ 173 高的测量	//	200
§ 174 问题	//	201
§ 175 绘制测图	//	202
§ 176 问题	//	203
§ 177 问题	//	203
§ 178 三角测量	//	204
§ 179 图面的问题	//	205
习题	//	206

第四编 与复数相关的内容

第十九章 虚数的三角表示	//	211
§ 180 虚数的几何表示	//	211
§ 181 模	//	212
§ 182 辐角	//	212
§ 183 虚数的三角形式	//	213
§ 184 问题	//	214
§ 185 和	//	215
§ 186 定理	//	217
§ 187 积与商	//	218
习题	//	220

第二十章 棣莫佛公式:弧的加法、乘法与除法	//	221
§ 188 加法	//	221
§ 189 乘法	//	223
§ 190 弧的乘法通式	//	224
§ 191 例	//	225
§ 192 除法	//	226
§ 193 三等分法	//	226
§ 194 问题 2	//	229
§ 195 问题 3	//	230
§ 196 注意	//	232
§ 197 一般情形	//	234

§ 198 问题 2 // 237

§ 199 问题 3 // 241

习题 // 243

第二十一章 虚数的 m 次方根——二项方程 // 244

§ 200 虚数的 m 次方根 // 244

§ 201 二项方程 // 245

§ 202 定理 // 246

§ 203 定理 // 247

§ 204 定理 // 247

§ 205 原根 // 248

§ 206 定理 // 248

§ 207 定理 // 250

§ 208 定理 // 251

§ 209 定理 // 252

§ 210 正多边形 // 254

习题 // 256

第二十二章 三次方程的三角解法 // 258

§ 211 二次方程 // 258

§ 212 三次方程 // 259

§ 213 代数解决 // 259

§ 214 三角解法 // 263

§ 215 第二种情况 // 264

§ 216 第三种情形 // 266

§ 217 直接解法 // 267

§ 218 数字的例子 // 269

习题 // 273

编后语 // 274

绪 论 有向线段、投影

§ 1 定 义

所谓**矢量**或有向线段,指的是在它上面已定义一个方向的一段直线. 确定有向线段的方向,应当把限制它的两点作出区别. 这两点中的一点叫做**始点**,另一点叫做**终点**. 于是有向线段的方向,就是一个动点通过线段由始点到终点的移动方向.

矢量的几何表示法为 \overrightarrow{AB} , 读出一个矢量,应先读始点,再读终点. 例如,矢量 \overrightarrow{AB} ,就是指始点为 A , 终点为 B 的矢量.

由上面的定义,可以得到确定一个矢量的三个要素:

- (1) **作用线** 就是载它的那条无限长的直线.
- (2) **长度** 就是从始点到终点的(几何)距离.
- (3) **方向** 就是一个动点在它上面由始点移向终点的方向.

如果两个矢量的作用线平行或重合,长度相等,并且方向也相同,则它们叫做**等价**.

由此可见,如果作用线不同的两个矢量 \overrightarrow{AB} , $\overrightarrow{A'B'}$ 等价(图1),那么,图形 $ABB'A'$ 是一个平行四边形,因为它的对边分别平行并且相等.

写两个矢量等价时,习惯上用等号. 例如,等式 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ 表示 \overrightarrow{AB} 等价于 $\overrightarrow{A'B'}$.

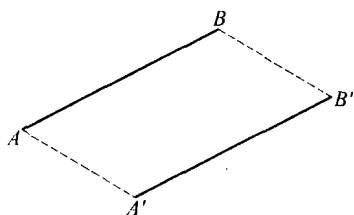


图 1

§ 2 合 矢

设有矢量 $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$, $\overrightarrow{DD'}$. 所谓这些矢量的**合矢**或**几何和**,是用如下方式所作的有向线段. 取空间的任意一点 O (图2) 为始点,作 \overrightarrow{Oa} 等价于 $\overrightarrow{AA'}$; 以 a 为新的始点,作 \overrightarrow{ab} 等价于 $\overrightarrow{BB'}$. 同样,作 \overrightarrow{bc} 等价于 $\overrightarrow{CC'}$; 最后作 \overrightarrow{cd} 等价于 $\overrightarrow{DD'}$. 那么,始点是第一矢量的始点 O , 终点是最后矢量的终点 d 的 \overrightarrow{Od} (或等价于 \overrightarrow{Od} 的

任何矢量),就是所设各矢量的合矢或几何和.

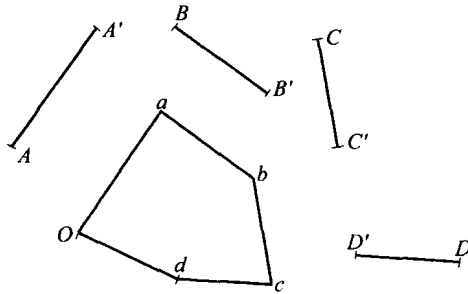


图 2

这里要注意,点 O 是任意的. 按照定义,合矢可以有任意的始点. 换句话说,有无穷多条彼此都是等价的有向线段可作为合矢.

表示一个矢量是另外各个矢量的合矢,通常用加号. 例如,写成

$$\vec{Oa} = \vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'} + \vec{DD'}$$

注意 在只有两个矢量的情况下,它们的合矢,还可以用下面的方法作出:设有两个矢量 $\vec{AA'}$, $\vec{BB'}$, 取空间的一点 O 为始点(图 3), 作 \vec{Oa} , \vec{Ob} 分别等价于所设的两个矢量. 那么, 在 \vec{Oa} 与 \vec{Ob} 上所作的平行四边形 $Oacb$ 的对角线 \vec{Oc} , 就是所求的合矢. 事实上

$$\vec{ac} = \vec{Ob} = \vec{BB'}$$

这就证明了 \vec{Oc} 恰好是按照前面所说的作法, 接连作了 \vec{Oa} 与 \vec{ac} 分别等价于 $\vec{AA'}$ 与 $\vec{BB'}$ 以后所得出的有向线段.

还可以看到,两个矢量的合矢,与求和时所取这两矢量的次序无关. 因为在图 3 中根据定义,同时有

$$\vec{Oc} = \vec{Oa} + \vec{ac} = \vec{AA'} + \vec{BB'}$$

与

$$\vec{Oc} = \vec{Ob} + \vec{bc} = \vec{BB'} + \vec{AA'}$$

容易推知,对于任何几何和,可以变换各加项的次序而不影响其和. 为此,

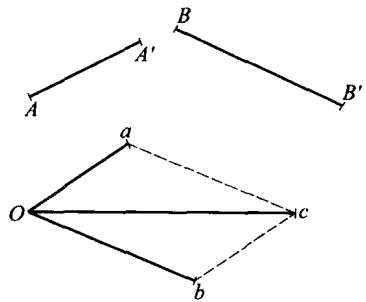


图 3

只要证明可以变换两个相邻项的次序就够了^①。

在这里不再详细说明这一推广,也不再讲到以后用不到的关于几何和的一些普通性质,这些性质是与代数和一致的。

§ 3 载在一条轴上的有向线段

定义 所谓轴是一条无限长的直线,在它上面选定了—个方向,叫做轴的正方向;相反的方向就说是负方向。

在代数里已定义过载在—条轴上的一条有向线段的代数量,在这里重新提—下这个定义和这种有向线段的基本性质^②。

设已知载在—条轴上的有向线段,就是说,已知以这轴为作用线的一条有向线段。所谓这条有向线段的代数量,指的是—个(代数的)数,它以有向线段的长为绝对值,并带有“+”或“-”,这个符号取决于有向线段的方向是轴的正方向或负方向。

为了表示—条有向线段的代数量,在表示这条有向线段的两个字母上面划—条横线。例如, \overline{AB} 表示有向线段 \overrightarrow{AB} 的代数量。

注意 由上面的定义可以推知,载在同轴上的两个长度相等而方向相反的有向线段,它们的量值是—个绝对值相等符号不同的(代数的)数。例如, \overline{AB} 与 \overline{BA} 就是这样的两个数。因而有

$$\overline{AB} + \overline{BA} = 0$$

§ 4 定 理

载在同轴上各有向线段的合矢的代数量,等于这些有向线段的代数量的和。

在证明时,可以假定各有向线段的首尾相连,因为它们的合矢需要这样来作出。

(1) 先考虑两条有向线段 \overrightarrow{AB} 与 \overrightarrow{BC} 的情况,它们的合矢是 \overrightarrow{AC} ^③。

^① 这个证明,不适用于所要求和的两个矢量有互相平行的作用线;这时四点 O, a, b, c 将在同—直线上。这种特殊情况的讨论,可参看《初等数学教程——代数》(C. 布尔勒著,朱广才译,上海科学技术出版社出版,以下简称《代数》——译者注)中绪论第 1 ~ 3 节。

^② § 3, § 4, § 5 只是《代数》中第 7 节与第 23 节的重复叙述(这里讲的“代数量”,就是《代数》中的“代数尺度”——译者注。)

^③ 在这个证明里,有意不作图示,留待读者自己作出。

如果两条有向线段的方向相同,那么它们的量值就同号.因而和 $\overline{AB} + \overline{BC}$ 的绝对值等于这两线段的绝对值的和;而这和的符号是两个加项的共同符号.另一方面,点 B 既在 A 与 C 之间,那么就有

$$AC = AB + BC$$

这已说明了合矢 \overrightarrow{AC} 的代数量的绝对值,等于和 $\overline{AB} + \overline{BC}$ 的绝对值,并且由于合矢与原来的两条同向线段的方向相同,因此它的量值 \overline{AC} 与 \overline{AB} , \overline{BC} 的符号相同,即与 $\overline{AB} + \overline{BC}$ 的符号相同,因此有

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$$

这里,等式的两边有相同的绝对值与符号.

如果两条有向线段的方向相反,由于合矢并不因改变两条有向线段的次序而改变,以及两个数的和也与这两个数的次序无关,所以便总可以假定 AB 是两条有向线段中较长的一条.这两条有向线段的代数量不同号,而且因为 $AB > BC$,所以和 $\overline{AB} + \overline{BC}$ 的绝对值便是 $AB - BC$,而符号与 \overline{AB} 的符号相同.另一方面,点 C 落在 A, B 之间,故有

$$AC = AB - BC$$

这就证明了 \overline{AC} 的绝对值也等于 $AB - BC$.而且合矢 \overrightarrow{AC} 既与 \overrightarrow{AB} 同向, \overline{AC} 也就与 \overline{AB} 同号.因此仍有

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$$

在两条有向线段相等而方向相反的特殊情况,它们的合矢是零;而它们的代数量有相等的绝对值和相反的符号,因而和也是零.

(2) 定理在两条有向线段的情况下的真实性,容易推广到若干条有向线段的情况.

设有四条有向线段 S_1, S_2, S_3, S_4 ,它们的代数量分别是 s_1, s_2, s_3, s_4 .命 R_1 为 S_1 与 S_2 的合矢, r_1 为它的量值; R_2 为 R_1 与 S_3 的合矢, r_2 为它的量值; R 为 R_2 与 S_4 的合矢, r 为它的量值.那么, R 是所设四条有向线段的合矢.按照上面(1)的证明,有以下各个等式

$$r_1 = s_1 + s_2, r_2 = r_1 + s_3, r = r_2 + s_4$$

这里 r 的求得是先作 s_1 与 s_2 的和,在它的结果 r_1 上加上 s_3 ,再在所得的结果 r_2 上加上 s_4 .因之,根据和的定义有

$$r = s_1 + s_2 + s_3 + s_4$$

这就证明了本节的定理.

§ 5 定 理

夏耳定理 设 A, B, C, D, E 是位于一轴上的多个点, 那么, 这些点所确定的各有向线段的代数量之间有关系式

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EA} = 0 \quad \textcircled{1}$$

这个定理是上节定理的一个直接结果. 因为有向线段 \overrightarrow{AE} 是各有向线段 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DE}$ 的合矢, 所以有

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} = \overline{AE}$$

在这个等式的两边都加上 \overline{EA} , 并注意到 $\overline{AE} + \overline{EA} = 0$, 即得出等式 $\textcircled{1}$.

注意 这个极为重要的定理, 经常应用在三点的情况. 设 O, A, B 是位于一轴上的三点, 那么有

$$\overline{OA} + \overline{AB} + \overline{BO} = 0$$

由此得出

$$\overline{AB} = -\overline{BO} - \overline{OA}$$

注意到 $-\overline{BO} = \overline{OB}$, 即得

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} \quad \textcircled{2}$$

这是夏耳关系式常用的形式.

§ 6 投 影

定义 已知一条轴 $x'x$ 与不平行于这条轴的一个平面 P , 所谓空间一点 A 在轴 $x'x$ 上平行于平面 P 的投影, 指的是通过 A 而平行于 P 的平面与轴的交点 a (图 4). 平面 P 叫做投影上的准平面.

直线 Aa 叫做点 A 的投影线.

当准平面 P 垂直于投影轴 $x'x$ 时, 就说投影是直角的. 这时一切投影线都垂直于轴, 因为它们都位于垂直于这轴的平面内. 于是可以说, 一点在一条轴上的直角投影, 是由这点向轴所作的垂线的垂足.

所谓一个矢量在一条轴上的投影, 指的是载在轴上的一条有向线段, 它的始点与终点分别是原矢量的始点与终点的投影.

例如, 设有矢量 \overrightarrow{AB} , A 与 B 在 $x'x$ 轴上的投影分别是 a 与 b , 那么, \overrightarrow{ab} 就是 \overrightarrow{AB} 的投影. 我们写成