主　编：李有毅　吴建平　郑拴平

初二

数学嘉年华

模块强化与考点梳理

赛★攻克中考

气象出版社
China Meteorological Press

数学嘉年华
模块强化与考点梳理
（初二）

气象出版社
China Meteorological Press

内 容 简 介

本书的主要内容涉及分式、根式、三角形、四边形、函数以及二次方程，在每一讲的“知识梳理”中介绍了基本的定义定理，在“学法指导”中选取了有代表性的题目来介绍常用的解题方法与技巧，在“题海拾贝”中列举了丰富的习题，是一本讲练结合的数学辅导书。同时，本书也是一本数学竞赛的习题集，书中大多数题目比现行中学数学教学内容更具有灵活性和综合性，基本上覆盖了目前初中数学竞赛中题目的类型。经常演练这些题目，对于拓宽思路，提高解题技巧和培养良好的数学修养大有好处。本书是数学爱好者的良师益友。

图书在版编目(CIP)数据

数学嘉年华：模块强化与考点梳理. 初二/李有毅，吴建平，郑拴平主编. —北京：气象出版社，2012.01

ISBN 978-7-5029-5412-3

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①李…②吴…③郑… Ⅲ. ①中学数学课-初中-教学参考资料 Ⅳ. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 263379 号

出版发行：气象出版社

地　　址：北京市海淀区中关村南大街 46 号　　**邮政编码**：100081

总 编 室：010-68407112　　**发 行 部**：010-68409198

网　　址：http://www.cmp.cma.gov.cn　　**E-mail**：qxcbs@cma.gov.cn

责任编辑：邵　华　　**终　　审**：黄润恒

封面设计：燕　彤　　**责任技编**：吴庭芳

印　　刷：北京奥鑫印刷厂印刷

开　　本：787 mm×1092 mm　1/16　　**印　　张**：10.5

字　　数：268.8 千字

版　　次：2012 年 1 月第 1 版　　**印　　次**：2012 年 1 月第 1 次印刷

定　　价：22.00 元

《数学嘉年华模块强化与考点梳理（初二）》编委会

前 言

什么是数学，不同的理解就会有不同的解释，不同的数学家都会有自己不同的定义，但人们通常以恩格斯的经典论断作为普适定义，即“数学是关于现实世界的空间形式和数量关系的科学”。学习和研究数学可以训练我们的思维方式，培养我们缜密思考和研究问题的逻辑思维习惯，从而促进高品质的思维方式和推理能力的形成。

如何把新课程标准中的先进教育理念转化为优质课堂教学的实际行为是基础教育课程改革的重点和难点。一线的教师们常常会探讨这样的一些问题：如何指导学生学会数学，如何指导学生学习教材，如何调动学生学习数学的积极性和主动性，如何帮助学生克服学习过程中所遇到的知识学习和思维训练等方面的障碍。他们凭着多年一线教学的实践经验，本着对教育实验的探索和热情，立足学生的学习实际，以思维训练为核心，以夯实基础为根本，以激发学生学习兴趣为导向，以提高运用能力和培养思维品质为目标，将解题研究、知识归纳和能力提升融为一体。本书编写中力争做到与课堂教学内容同步，并对课堂教学内容进行挖掘寻找新的生长点，对其进行深层拓展及课外内容的渗透，确保为广大学生学习数学提供便捷，为学有余力学生超前学习提供帮助。

为使这一既定目标得以实现，本书在编写中从整体布局上做了精心架构，分为六个主要篇章，即“写在前面”、“本讲重点”、“知识梳理”、“学法指导”、“总结与反思”、“题海拾贝”。编写中注重例题讲解过程中思路分析及问题解答的技巧，“题海拾贝”则强调了学生通过对习题的演练解答，加强对已有知识的巩固和提高。

“头脑不是一个要被填满的容器，而是一把需要被点燃的火把”。古希腊人普鲁塔戈在3000年前如是说，当下的数学教学也不例外。真正的数学教学应该是点燃学生智慧的火把，而不是将知识简单地填塞进学生的头脑。希望此书能起到这样的功效！

李有毅

2011-12-16

目　　录

第 1 讲　分式的概念与计算

【写在前面】

分式的概念和性质，是分式中最基本、最核心的内容．分式的性质是对分式进行约分、通分的依据，是进行分式计算的基础．分式的变形与求值也是初中数学竞赛的重要内容之一，解题时需要有敏锐的观察分析能力与一定的技巧．本讲主要研究分式的概念、性质以及分式的化简求值．

【本讲重点】

分式的概念、性质与分式化简求值．

【知识梳理】

1．分式的概念：一般的，如果 A,B 表示两个整式，并且 B 中含有字母，那么式子 $\dfrac{A}{B}$ 叫做分式．

整式与分式统称为有理式．

在理解分式的概念时，注意以下三点：

(1) 分式的分母中必然含有字母；

(2) 分式的分母的值不为 0．

2．分式有意义的条件是分式分母不为 0．

3．分式的值为零：分式的分子为零，且分式的分母不能为零．

4．分式的基本性质：分式的分子与分母同时乘以（或除以）一个不等于 0 的整式，分式的值不变．用公式可以表示为：

$$\frac{A}{B}=\frac{AM}{BM},\frac{A}{B}=\frac{A\div M}{B\div M}(M\neq 0)$$

注意：① 在运用分式的基本性质时，基于的前提是 $M\neq 0$；

② 强调“同时”，分子分母都要乘以或者除以同一个“非零”的数字或者整式；

③ 分式的基本性质是约分和通分的理论依据．

5．基本运算

分式的乘法：$\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{d}=\dfrac{a\cdot c}{b\cdot d}$

分式的除法：$\dfrac{a}{b}\div\dfrac{c}{d}=\dfrac{a}{b}\times\dfrac{d}{c}=\dfrac{a\cdot d}{b\cdot c}$

乘方：$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\underbrace{\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{a}{b}\cdots\dfrac{a}{b}}_{n个}=\dfrac{\overbrace{a\cdot a\cdots a}^{n个}}{\underbrace{b\cdot b\cdots b}_{n个}}=\dfrac{a^n}{b^n}$（$n$ 为正整数）

分式的加减法法则：

同分母分式相加减，分母不变，把分子相加减，$\dfrac{a}{c}\pm\dfrac{b}{c}=\dfrac{a\pm b}{c}$；

异分母分式相加减，先通分，变为同分母的分式再加减，$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}\pm\frac{bc}{bd}=\frac{ad\pm bc}{bd}$.

分式的混合运算的运算顺序：先算乘方，再算乘除，后算加减，如有括号，括号内先算.

结果以最简形式表述.

【学法指导】

【例 1】(1)x 为何值时，分式$\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}$有意义？

(2) 要使分式$\dfrac{a^2-4}{1+\dfrac{1+3a}{2a}}$无意义，求 a 的值.

【分析】分式为繁分式，要使分式有意义，处于分母位置的有理式应不为 0；分式无意义，处于分母位置的有理式等于 0.

【解答】(1)$1+\dfrac{1}{1+x}\neq 0$ 且 $1+x\neq 0$，则 $x\neq-2$ 且 $x\neq-1$

(2) 根据题意可得 $1+\dfrac{1+3a}{2a}=0$ 或 $2a=0$，所以 $a=-\dfrac{1}{5}$ 或 $a=0$

【点评】分式有无意义，逢“分母”必注意.

【实践】(1) 分式$\dfrac{a-1}{1-\dfrac{1}{|a|}}$有意义，那么 a 的取值范围是______；

(2) 若分式$\dfrac{x^2-16}{(|x|-3)(x+4)}$无意义，则 x______.

【例 2】当 x 为何值时，下列分式的值为 0？

(1) $\dfrac{x^2-1}{x+1}$　　(2) $\dfrac{|x|-3}{x-3}$　　(3) $\dfrac{x^2+3}{x+7}$

(4) $\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$　　(5) $\dfrac{x^2-4}{x^2+2x}$　　(6) $\dfrac{x^2+3x}{5+x-\dfrac{4}{x+5}}$

【分析】分式的值为零的条件是分式的分子为零并且分母不能为零.

【解答】(1) 由 $x^2-1=0\Rightarrow x=\pm 1$，但当 $x=-1$ 时，分母为 0，故 $x=1$ 时，原式的值为 0；

(2) 由 $|x|-3=0\Rightarrow x=\pm 3$，又 $x-3\neq 0\Rightarrow x\neq 3$，故 $x=-3$；

(3) 由 $x^2+3\geqslant 3>0$ 可知，无论 x 为何值，分式的值都不为 0；

(4) 由 $x^2+2x-3=0\Rightarrow x=1$ 或 $x=-3$，又 $x-1\neq 0\Rightarrow x\neq 1$，故 $x=-3$；

(5) 由 $x^2-4=0\Rightarrow x=\pm 2$，又 $x^2+2x\neq 0\Rightarrow x\neq 0$ 且 $x\neq-2$，故 $x=2$.

(6) 根据题意可得$\begin{cases}x^2+3x=0\\5+x-\dfrac{4}{x+5}\neq 0\\x+5\neq 0\end{cases}$，解得 $x=0$.

【点评】分式的分子为 0 这一条件可转化为一次或二次方程，有时会用到因式分解等变形技巧. 注意在满足分子为 0 的前提下一定检验分母是否为 0.

【实践】当 x 为何值时，下列分式的值为 0？

(1) $\dfrac{2x-1}{x+3}$　(2) $\dfrac{x^2-2x-3}{(x+1)(x+2)}$　(3) $\dfrac{|x|-6}{x^2-5x-6}$　(4) $\dfrac{x^2-16}{x^2+3x-4}$　(5) $\dfrac{x^2-9}{1+\dfrac{1}{3+x}}$

【例 3】约分：(1) $\dfrac{-24x^3y}{30x^2y^3}=$______；(2) $\dfrac{6x^2+2x}{3x+1}=$______；(3) $\dfrac{x^{2n+3}-8x^{2n}}{x^{n+4}+4x^{n+2}+16x^n}=$______.

【分析】分式的分子、分母是单项式时，约分应约去分式分子、分母的公因式；分式的分子、分母为多项式时，应先因式分解，再约分.

【解答】(1) $-\dfrac{4x}{5y^2}$；(2) $2x$；

(3) 原式 $=\dfrac{x^{2n}(x^3-8)}{x^n(x^4+8x^2+16-4x^2)}=\dfrac{x^{2n}(x-2)(x^2+2x+4)}{x^n(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)}=\dfrac{x^n(x-2)}{x^2-2x+4}$.

【点评】分式的基本性质是分式约分的根据. 约分的最后结果是最简分式或整式.

【实践】约分：

(1) $\dfrac{3m^2+6m}{m^2-m-6}$；　(2) $\dfrac{-4y^2+x^2}{-x^2+4xy-4y^2}$；

(3) $\dfrac{6a^{n+1}b^4}{2a^{n-1}b}$($n$ 是大于 1 的整数)；　(4) $\dfrac{x^{2n+2}-4x^{2n}}{x^{n+2}-x^{n+1}-2x^n}$($n$ 是正整数).

【例 4】化简：$\dfrac{a^2-(b-c)^2}{(a+c)^2-b^2}+\dfrac{b^2-(c-a)^2}{(a+b)^2-c^2}+\dfrac{c^2-(a-b)^2}{(b+c)^2-a^2}$.

【分析】将每个分式的分子、分母先分解因式，约分后再进行分式加法运算.

【解答】原式$=\dfrac{(a+b-c)(a-b+c)}{(a+b+c)(a-b+c)}+\dfrac{(b+c-a)(a+b-c)}{(a+b+c)(a+b-c)}+\dfrac{(a-b+c)(b+c-a)}{(a+b+c)(b+c-a)}$

$$=\frac{a+b-c}{a+b+c}+\frac{b+c-a}{a+b+c}+\frac{a-b+c}{a+b+c}=1.$$

【点评】在进行分式计算之前应先观察分式的结构特点，灵活地变形使计算更加简便.

【实践】化简：① $\dfrac{b-c}{(a-b)(a-c)}-\dfrac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{a-b}{(c-a)(c-b)}$；

② $\dfrac{2a-b-c}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{2b-c-a}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{2c-a-b}{(c-b)(c-a)}$.

【例 5】化简：$\dfrac{2a^2+3a+2}{a+1}-\dfrac{a^2-a-5}{a+2}-\dfrac{3a^2-4a-5}{a-2}+\dfrac{2a^2-8a+5}{a-3}$.

【分析】很显然，直接通分后分子较复杂，将分式的分子适当地组合之后裂为整式与分式和的形式再进行分式加减运算较为简便.

【解答】原式$=\dfrac{2a^2+2a+a+1+1}{a+1}-\dfrac{a^2+2a-3a-6+1}{a+2}-\dfrac{3a^2-6a+2a-4-1}{a-2}$

$+\dfrac{2a^2-6a-2a+6-1}{a-3}$

$$=\left[(2a+1)+\frac{1}{a+1}\right]-\left[(a-3)+\frac{1}{a+2}\right]-\left[(3a+2)-\frac{1}{a-2}\right]+\left[(2a-2)-\frac{1}{a-3}\right]$$

$$=[(2a+1)-(a-3)-(3a+2)+(2a-2)]+\left(\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a-2}-\frac{1}{a-3}\right)$$

$$=\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a-2}-\frac{1}{a-3}$$
$$=\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\frac{-1}{(a-2)(a-3)}$$
$$=\frac{-8a+4}{(a+1)(a+2)(a-2)(a-3)}$$

【点评】在分式加减运算中,先不要盲目通分,可通过各分式结构特点进行拆项重组,达到化简目的.

【实践】计算:$\frac{x+4}{x+1}+\frac{x-2}{x-3}-\frac{x+2}{x-1}-\frac{x+4}{x+3}$.

【例 6】计算:$\frac{1}{a-x}-\frac{1}{a+x}-\frac{2x}{a^2+x^2}-\frac{4x^3}{a^4+x^4}+\frac{8x^7}{x^8-a^8}$.

【分析】先将前两个分式通分后再与后一个分式通分. 依此类推会发现最后两个分式互为相反数,因此结果为 0.

【解答】原式$=\frac{2x}{a^2-x^2}-\frac{2x}{a^2+x^2}-\frac{4x^3}{a^4+x^4}+\frac{8x^7}{x^8-a^8}$

$$=\frac{4x^3}{a^4-x^4}-\frac{4x^3}{a^4+x^4}+\frac{8x^7}{x^8-a^8}$$
$$=\frac{-8x^7}{x^8-a^8}+\frac{8x^7}{x^8-a^8}=0.$$

【点评】本题采取的是分式的递推通分,是常用的一种进行分式计算的方法.

【实践】计算:$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}+\cdots+\frac{2^n}{1+x^{2n}}$($n$ 为自然数).

【例 7】化简:$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\cdots+\frac{1}{(x+99)(x+100)}$.

【分析】将每一个分式拆为两个分子为 1 的分式的差的形式后,再进行分式加法运算.

【解答】原式 $=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\cdots+\frac{1}{x+99}-\frac{1}{x+100}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+100}$
$=\frac{100}{x^2+100x}$.

【点评】此种方法为“裂项法”,是进行分式加法运算的一种重要方法.

【实践】化简:$\frac{1}{x^2+x}+\frac{1}{x^2+3x+2}+\frac{1}{x^2+5x+6}+\frac{1}{x^2+7x+12}+\frac{1}{x^2+9x+20}$.

【例 8】化简:$\frac{b-c}{a^2-ab-ac+bc}+\frac{c-a}{b^2-ab-bc+ac}+\frac{a-b}{c^2-bc-ac+ab}-\frac{2}{a-b}-\frac{2}{b-c}-\frac{2}{c-a}$.

【分析】本题涉及因式分解的一些技巧. 我们发现:$a-b-(a-c)=c-b$,

故$\frac{b-c}{a^2-ab-ac+bc}=\frac{1}{a-b}+\frac{1}{c-a}$. 同理,$\frac{c-a}{b^2-ab-bc+ac}=\frac{c-a}{(b-a)(b-c)}=\frac{1}{b-c}+\frac{1}{a-b}$,

$\frac{a-b}{c^2-bc-ac+ab}=\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}=\frac{1}{c-a}+\frac{1}{b-c}$. 裂项后再进行分式加减运算即可.

【解答】$\frac{b-c}{a^2-ab-ac+bc}+\frac{c-a}{b^2-ab-bc+ac}+\frac{a-b}{c^2-bc-ac+ab}-\frac{2}{a-b}-\frac{2}{b-c}-\frac{2}{c-a}$ $=0$.

【点评】本题先把前三项分式中的分母进行因式分解，然后相应分子经过适当变形后便可拆项，达到化简目的.

【实践】化简：$\frac{2a-b-c}{a^2-ab-ac+bc}+\frac{2b-c-a}{b^2-ab-bc+ac}+\frac{2c-a-b}{c^2-ac-bc+ab}$.

【例9】已知：$ax=by=cz=1$，求$\frac{1}{1+a^4}+\frac{1}{1+b^4}+\frac{1}{1+c^4}+\frac{1}{1+x^4}+\frac{1}{1+y^4}+\frac{1}{1+z^4}$的值.

【分析】根据已知条件的特点，将分式分组进行加法运算.

【解答】$\because \frac{1}{1+a^4}+\frac{1}{1+x^4}=\frac{1}{1+a^4}+\frac{1}{1+\frac{1}{a^4}}=\frac{1}{1+a^4}+\frac{a^4}{1+a^4}=1$

$\therefore$ 原式 $=\left(\frac{1}{1+a^4}+\frac{1}{1+x^4}\right)+\left(\frac{1}{1+b^4}+\frac{1}{1+y^4}\right)+\left(\frac{1}{1+c^4}+\frac{1}{1+z^4}\right)=3$

【点评】"配对"思想.

【实践】有理数 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足 $a_ia_{n-i}=1,i=0,1,2,\cdots,n$.

求代数式$\frac{1}{1+a_0^{10}}+\frac{1}{a+a_1^{10}}+\frac{1}{1+a_2^{10}}+\cdots+\frac{1}{1+a_n^{10}}$的值.

【总结反思】

在理解分式概念时，一定不要忽略"分母不为0"这一条件.分式的基本性质是分式变形的依据.在分式化简过程中，一定先观察各分式的结构特点，然后采取因式分解、乘法公式、拆项变形、配对变形等技巧解决问题.

【题海拾贝】

1.若 a 使分式$\frac{a^2-4}{1+\frac{1+3a}{2a}}$没有意义，那么 a 的值是(　　)

A. 0　　B. $-\frac{1}{3}$ 或 0　　C. ± 2 或 0　　D. $-\frac{1}{5}$ 或 0

2.若分式$\frac{x^2-16}{(|x|-3)(x+4)}=0$，则 x ______;

3.约分：

(1) $\frac{mx+my}{x^2-y^2}=$ ______　　(2) $\frac{4x^{m+1}y^{m-1}}{18x^{m+2}y^{m-3}}=$ ______

(3) $\frac{x^2-4x-12}{x^2+7x+10}=$ ______　　(4) $\frac{a^2-b^2-c^2+2bc}{c^2-a^2-b^2+2ab}=$ ______

4.计算：$\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{a^2}{b^2}\right)\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}-1\right)\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}+1\right)$

5.若 $a|x-1|=-b(xy-2)^2$，且 $ab>0$，求$\frac{1}{xy}+\frac{1}{(x+1)(y+1)}+\cdots+\frac{1}{(x+2007)(y+2007)}$的值.

6. 化简：$\dfrac{a^2-bc}{(a+b)(a+c)}+\dfrac{b^2-ac}{(b+c)(b+a)}+\dfrac{c^2-ab}{(c+a)(c+b)}$.

7. 化简：代数式$\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2x}{x^2+1}+\dfrac{4x^3}{x^4+1}$.

8. 化简：$\dfrac{a-b}{(c-a)(c-b)}+\dfrac{b-c}{(b-a)(a-c)}+\dfrac{c-a}{(b-c)(b-a)}$.

9.（2007 年初二数学竞赛）

化简：$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\left(1+\dfrac{1}{a}\right)+\dfrac{1}{c}\left(1+\dfrac{1}{a}\right)\left(1+\dfrac{1}{b}\right)+\dfrac{1}{d}\left(1+\dfrac{1}{a}\right)\left(1+\dfrac{1}{b}\right)\left(1+\dfrac{1}{c}\right)-\left(1+\dfrac{1}{a}\right)\left(1+\dfrac{1}{b}\right)\left(1+\dfrac{1}{c}\right)\left(1+\dfrac{1}{d}\right)$.

10. 如果设 $y=\dfrac{x^2}{1+x^2}=f(x)$，并且 $f(1)$ 表示当 $x=1$ 时 y 的值，即 $f(1)=\dfrac{1^2}{1^2+1}=\dfrac{1}{2}$，$f(\dfrac{1}{2})$ 表示当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时 y 的值，即 $f(\dfrac{1}{2})=\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}{1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{5}$，…… 求 $f(1)+f(2)+f(\dfrac{1}{2})+f(3)+f(\dfrac{1}{3})+\cdots+f(n)+f(\dfrac{1}{n})$ 的值.（结果用含有 n 的代数式表示，n 为正整数）

第 2 讲　分式的变形与求值

【写在前面】

基于分式的概念和性质，可以对分式进行约分、通分等化简. 分式化简是分式变形的主要形式，借助于对分式进行灵活多样的变形，可以使问题得到迅速准确的解决. 另外，分式的变形与求值也是初中数学竞赛中的重要内容之一. 本讲主要研究分式的变形和求值.

【本讲重点】

分式的变形与求值.

【知识梳理】

1. 预备知识：整式及其运算（尤其是乘法公式的灵活运用），因式分解.

具体来说，本讲主要涉及一些常用的乘法公式，并且从整式运算和因式分解两个角度灵活运用，这些公式有：

(1) 完全平方和（差）公式：$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$.

(2) 完全立方和（差）公式：$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$.

(3) 立方和（差）公式：$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$.

(4) 含三项的完全平方和公式：$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$.

2. 先化简后求值是解代数式化简求值问题的基本策略，分式的化简求值通常分为有条件和无条件两类. 给出一定的条件并在此条件下求分式的值的问题称为有条件的分式化简求值，解这类问题，既要瞄准目标，又要抓住条件，既要依据条件逼近目标，又要能根据目标变换条件. 分式求值问题是初中教学竞赛中一种基本题型，近几年来又相继出现了一些新题型，加大了对这类问题的考查力度. 由于此类问题往往涉及的知识点多、覆盖面广、综合性强，因此不少学生在解题时，常常因缺乏必要的解题技巧，短时间内难以迅速找到正确的解题思路，而导致解题过程繁难、运算量大，甚至半途而废. 通过总结一些省、市的竞赛题解题规律，提炼出如下分式求值问题的若干技巧与策略：

(1) 整体代入法；　(2) 适当引入参数；　(3) 拆项变形或拆分变形；
(4) 乘方法；　(5) 取倒数或利用倒数关系；　(6) 配方法；
(7) 特殊值法；　(8) 解方程（组）法；　(9) 构造一元二次方程法；
(10) 整体拆出法；　(11) 竖式相除法.

【学法指导】

【例 1】 设 $b<a<0$，$a^2+b^2=\dfrac{5}{2}ab$，求$\dfrac{a+b}{a-b}$的值.

【分析】 整体代入法. 这里不直接求 a 与 b，而是利用乘法公式，找出 $a+b$ 与 $a-b$ 的关系，再将它们整体代入化简.

【解答】 $\because a^2+b^2=\dfrac{5}{2}ab$，$\therefore a^2+2ab+b^2=\dfrac{9}{2}ab$，$a^2-2ab+b^2=\dfrac{1}{2}ab$，

$\therefore (a+b)^2=\dfrac{9}{2}ab,(a-b)^2=\dfrac{1}{2}ab,\therefore \dfrac{(a+b)^2}{(a-b)^2}=9,$

又 $\because b<a<0,\therefore$ 原式 $=-3.$

【点评】整体代入的数学思想避免了单独求某一个或几个未知数带来的困难，但选择合适的整体代入仍是一个难点，可以从条件或者结论出发判断所选的整体.

【实践】（2010 全国初中数学竞赛）已知$\dfrac{a}{b}=20,\dfrac{b}{c}=10$，则$\dfrac{a+b}{b+c}=$ ______.

【例 2】已知：$2a-3b+c=0,3a-2b-6c=0$，且 $abc\neq 0$，求$\dfrac{a^3-3b^3+2c^3}{ab^2+7bc^2-3a^2c}$的值.

【分析】把 c 看作已知数，解关于 a,b 的方程组后再将 a,b 代入所求分式.

【解答】由题意可知：$\begin{cases}2a-3b+c=0\\3a-2b-6c=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=4c\\b=3c\end{cases}$，$\dfrac{a^3-3b^3+2c^3}{ab^2+7bc^2-3a^2c}=\dfrac{-15c^3}{9c^3}=-\dfrac{5}{3}$

【点评】此种方法属于代入消元法.

【实践】已知 $a+b-c=0,2a-b+2c=0(c\neq 0)$，求$\dfrac{3a-2b+5c}{5a-3b+2c}$的值.

【例 3】已知 a,b,c 满足$\dfrac{ab}{a+b}=\dfrac{1}{3},\dfrac{bc}{b+c}=\dfrac{1}{4},\dfrac{ca}{c+a}=\dfrac{1}{5}$，求分式$\dfrac{abc}{ab+bc+ca}$的值.

【分析】取倒数法. 这里先对每个已知等式做倒数变形，通过观察将所求分式也进行倒数变形，然后建立已知与未知之间的联系，即可求解.

【解答】$\because \dfrac{ab}{a+b}=\dfrac{1}{3},\dfrac{bc}{b+c}=\dfrac{1}{4},\dfrac{ca}{c+a}=\dfrac{1}{5},\therefore \dfrac{a+b}{ab}=3,\dfrac{b+c}{bc}=4,\dfrac{c+a}{ca}=5,$

$\therefore \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=3,\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=4,\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}=5$，解得：$\dfrac{1}{a}=2,\dfrac{1}{b}=1,\dfrac{1}{c}=3.$

$\therefore \dfrac{ab+bc+ca}{abc}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=6,\therefore$ 原式 $=\dfrac{1}{6}.$

【点评】此题的解决在于对已知与未知同时取倒数变形. 而之间联系的纽带是方程组的求解. 事实上，本题也是构造多元方程组的一个经典题例.

【实践】已知$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1$，用两种方法求分式$\dfrac{2x-5xy+2y}{x+2xy+y}$的值.

【例 4】若$\dfrac{a}{3}=\dfrac{b}{4}=\dfrac{c}{5}$，则$\dfrac{3a+2b+c}{a-2b-3c}=$ ______.

【分析】设参数法. 本题条件实际上是方程数少于未知数的三元一次方程组（两个方程，三个未知数），所以无法直接求得 a,b,c 的值. 事实上，也没有必要求出 a,b,c 的值，只要得到用同一参数表达的 a,b,c 即可代入所求分式中，得到分式的值.

【解答】解：设$\dfrac{a}{3}=\dfrac{b}{4}=\dfrac{c}{5}=k$，则 $a=3k,b=4k,c=5k$.

$$\therefore \text{原式}=\frac{3\cdot 3k+2\cdot 4k+5k}{3k-2\cdot 4k-3\cdot 5k}=\frac{22k}{-20k}=-\frac{11}{10}.$$

【点评】形如“连续等式”的条件处理策略通常采取设参数法，因为往往此类问题无法得

到具体的未知数的值，只能借助中间桥梁(即数学中的参数)来解决.

【实践】 如果 $abc \neq 0$，且$\frac{a+b-c}{c}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{-a+b+c}{a}$，求分式$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$的值.

【分析】 设参数法. 这里的已知条件是一个连续等式，将左、中、右三个式子视为一个整体，通过引入参数 k，建立 a,b,c 三者间的联系，使问题得到解决.

【例 5】 已知：$x^2-x-1=0$，求 $x^4+\frac{1}{x^4}$ 的值.

【分析】 乘法公式法. 根据所求对已知条件进行适当变形：$x^2-1=x \Rightarrow x-\frac{1}{x}=1$，利用乘法公式来求解.

【解答】 $\because x^2-x-1=0$，$\therefore x^2-1=x$，$\therefore x-\frac{1}{x}=1(x\neq 0)$

$$\therefore \left(x-\frac{1}{x}\right)^2=1\text{，即：}x^2+\frac{1}{x^2}=3$$

$$\therefore \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2=9\text{，即：}x^4+\frac{1}{x^4}=7.$$

【点评】 对如下公式的掌握和灵活使用是解决该问题的关键：$\left(x\pm\frac{1}{x}\right)^2=x^2\pm 2+\frac{1}{x^2}$. 实际上，这是乘法公式在分式变形中的一个具体的应用.

【实践】 若 $x+\frac{1}{x}=a$，求 $x^6+\frac{1}{x^6}$ 的值.

【例 6】 已知 $abc\neq 0$，且 $a+b+c=0$，则 $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$的值为______.

【分析】 特殊值法. 根据填空题的特点，取满足条件的 a,b,c 的特殊值，问题立即获解，正确率高.

【解答】 解法一：因为 $abc\neq 0$，且 $a+b+c=0$，可取 $a=-1$，$b=\frac{1}{2}$，$c=\frac{1}{2}$，则原式 $=-3$.

解法二：原式 $=\frac{1}{b}(a+c)+\frac{1}{c}(a+b)+\frac{1}{a}(b+c)=\frac{1}{b}(-b)+\frac{1}{c}(-c)+\frac{1}{a}(-a)$ $=-3$.

【点评】 显然第二个方法不是解决填空题的最佳方法，但对于竞赛题目，严格计算的能力一定在平时的训练中不能忽视.

【实践】(2008 全国初中数学竞赛海南赛区)已知实数 a,b 满足 $ab=1$ 且 $a\neq 1$，设 $M=\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}$，$N=\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}$，则 $M-N=$______.

【例 7】 已知 x,y,z,a,b,c 都为实数，且$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$，$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$，求$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ 的值.

【分析】构造方程或方程组法. 将待求值的分式整体视为一个未知数，再利用已知条件，通过解方程或方程组求出这个未知数.

【解答】解：设$\frac{x}{a}=X,\frac{y}{b}=Y,\frac{z}{c}=Z$. 则：$X+Y+Z=1,\frac{1}{X}+\frac{1}{Y}+\frac{1}{Z}=0$.

$\therefore (X+Y+Z)^2=X^2+Y^2+Z^2+2XY+2YZ+2ZX,\frac{XY+YZ+ZX}{XYZ}=0$.

$\therefore XY+YZ+ZX=0,\therefore (X+Y+Z)^2=X^2+Y^2+Z^2$，即：原式 $=X^2+Y^2+Z^2=1$.

【点评】构造方程或者方程组而不去求解具体某一未知数的值，只是整体求解. 这种思想方法在竞赛中常用.

【实践】已知 $xyz=1,x+y+z=2,x^2+y^2+z^2=16$，求$\frac{1}{xy+2z}+\frac{1}{yz+2x}+\frac{1}{zx+2y}$的值.

【例 8】已知 $x^2-5x+1=0$，求$\frac{2x^4-9x^3-x^2-10x+2}{x^2+1}$的值.

【分析】竖式相除法. 这里多项式 $2x^4-9x^3-x^2-10x+2$ 的次数高于多项式 x^2-5x+1 的次数，将它们整体相除，进而将第一个多项式降次（变为 $-x$），使复杂问题简单化. 竖式相除法是解决这类问题的有效方法.

【解答】利用竖式相除得到：$2x^4-9x^3-x^2-10x+2=(x^2-5x+1)(2x^2+x+2)-x$

而 $x^2-5x+1=0$，所以，原式 $=\frac{-x}{x^2+1}=\frac{-x}{5x}=-\frac{1}{5}$.

【点评】降次的手段主要有两种，一种如上题，利用竖式相除来完成；另一种借助于整体代入完成. 具体操作如下：因为 $x^2-5x+1=0$，所以 $x^2=5x-1$，所以：

$$原式=\frac{2(5x-1)^2-9x(5x-1)-(5x-1)-10x+2}{5x}=\frac{5x^2-26x+5}{5x}$$

$$=\frac{5(5x-1)-26x+5}{5x}=\frac{-x}{5x}=-\frac{1}{5}.$$

【实践】若 $x^2-x-1=0$，则$\frac{x^4+2x+1}{x^5}=$ ______.

【例 9】已知：$x+y+z=3a$（$a\neq 0$，且 x,y,z 不全相等），

求$\frac{(x-a)(y-a)+(y-a)(z-a)+(z-a)(x-a)}{(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2}$的值.

【分析】本题字母多，结构复杂. 若把条件写成$(x-a)+(y-a)+(z-a)=0$，那么题目只与 $x-a,y-a,z-a$ 有关，为简化计算，可用换元法求解.

【解答】令 $x-a=u,y-a=v,z-a=w$，则分式变为$\frac{uv+vw+wu}{u^2+v^2+w^2}$，且由已知有 $u+v+w=0$.

将 $u+v+w=0$ 两边平方得 $u^2+v^2+w^2+2uv+2vw+2wu=0$. 由于 x,y,z 不全相等，所以 u,v,w 不全为 0. 所以 $u^2+v^2+w^2\neq 0$，从而有$\frac{uv+vw+wu}{u^2+v^2+w^2}=-\frac{1}{2}$，即所求分式的

值为 $-\frac{1}{2}$.

【点评】 从本例中可以看出,换元法可以使得分式更加简洁,从而简化运算过程.

【实践】 如果 $a+b+c=0$,$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+3}=0$,求 $(a+1)^2+(b+2)^2+(c+3)^2$ 的值.

【总结反思】

"万变不离其宗",以上介绍了初中数学竞赛中分式变形求值问题的各种解题技巧,解题的关键在于把握相关式子(已知的或待求的)在整体上的结构特点,选择恰当的技巧,有时候需要几种技巧融为一体,共同发挥作用.

【题海拾贝】

1. 已知 $ab\neq 0$,$a^2+ab-2b^2=0$,那么 $\frac{2a-b}{2a+b}$ 的值为______.

2. 已知实数 a 与 b 满足等式 $\frac{a^2b^2}{a^4-2b^4}=1$,则 $\frac{a^2-b^2}{19a^2+96b^2}=$______.

3. 已知实数 x,y,z 满足 $\frac{x}{x+1}=\frac{y}{y+2}=\frac{z}{z+3}=\frac{x+y+z}{3}$,则 $x+y+z=$______或______.

4. 设 $\frac{x}{x^2+x+1}=a\left(a\neq 0,\frac{1}{2}\right)$,则 $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}=$______.

5. 已知 a,b,c 为实数,$\frac{ab}{a+b}=\frac{1}{6}$,$\frac{bc}{b+c}=\frac{1}{8}$,$\frac{ca}{c+a}=\frac{1}{10}$. 求分式 $\frac{abc}{ab+bc+ca}$ 的值.

6. (2008年初中数学竞赛试题)已知实数 x,y 满足 $\frac{4}{x^4}-\frac{2}{x^2}=3$,$y^4+y^2=3$,求 $\frac{4}{x^4}+y^4$ 的值.

7. 已知 $a+b+c=0$,$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=-4$,求 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$ 的值.

8. (走美杯第五届决赛)已知 $\triangle ABC$ 的边长为 a,b,c,三边上的高为 p,q,r. 求 $(p+q+r)\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right)-(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ 的值.

9. 已知:$x+\frac{1}{y}=z+\frac{1}{x}=1$,求 $y+\frac{1}{z}$ 的值.

10. 已知 $\frac{b+c+d}{a}=\frac{c+d+a}{b}=\frac{d+a+b}{c}=\frac{a+b+c}{d}=k$,求 k 的值.