师范专科学校试用教材

常微分方程

《常微分方程》编写组

延边教育出版社

内 容 提 要

本书是编者根据原教育部1982年10月在昆明审订的师专数学专
学大纲编写而成的。本书结合师专教学的实际，侧重基础理论的论
叙述简明扼要，由浅入深，通俗易懂，范例较多，便于教学和阅读，
作为二、三年制师专数学专业试用教材，也可作高师数学专业函授教
及中学数学教师进修和各高校、成人高校有关专业学生学习的参考用书

本书的内容有：初等积分法，微分方程的基本定理，线性微分方程，线性微分方程组和一阶偏微分方程初步。

责任编辑：徐贞淑　胡幼予

插　　图：吕秀虎

师范专科学校试用教材

常微分方程

东北地区师专数学教材协编组

《常微分方程》编写组

延边教育出版社出版发行

石岘造纸厂印刷厂印刷

787×1092毫米32开本　9.5印张　191千字

1987年9月第1版　1987年9月第1次印刷

ISBN　7—80509—018—1/O·1

书号：13092·4　印数：1——5,130册

定价：1.65元

前　言

本书由“东北地区师专数学教材协编组”中《常微分方程》编写组的同志依照原教育部1982年审订的二、三年制师范专科学校数学专业的教学大纲，针对师专的特点和培养目标，结合多年的教学经验编写而成。

本书较本科院校的教材适当降低了要求，精减了超出大纲的内容。在论述上力求简明扼要，通俗易懂，便于理解。适合师专、教育学院及师范院校和各类成人高校的二、三年制数学专修科作教材与教学参考书。

本书由哈尔滨师专李燕杰，铁岭师专赵振芳，朝阳师专吴杰，大庆师专闵长泰，通化师院姜涛，辽阳师专孟宪义，延边师专胡幼予分章编写，集体审稿，由孟宪义同志执笔统稿。

本书的出版工作，得到了延边教育出版社的大力支持，谨致以衷心的感谢。

编者　1986年10月

绪 论

常微分方程是数学专业的一门重要的基础课。

常微分方程是由人类生产实践的需要而产生的。在二十世纪以前，微分方程的问题主要来源于几何学、力学和物理学，而现在则几乎在自然科学和工程技术的每一个部门都有或多或少的微分方程问题。微分方程甚至和生物、农业以至经济学也密切地挂上钩了。历史上，它的雏型的出现，甚至比微积分的发明还早。伽利略(G·Galilei)研究自由落体运动，笛卡儿(Descartes)在光学问题中由切线性质定出镜面的形状等，实际上都需要建立和求解微分方程。

三百多年前，牛顿(Newton)和莱布尼兹(Leibniz)奠定微积分的基本思想的同时，他们正式提出了微分方程的概念。一六七六——一六七七年间牛顿和莱布尼兹的著名通信中提到过“切线问题之逆”，也就是由切线的性质来求原曲线，这是建立和求解微分方程的问题。十七世纪末到十八世纪，与当时微积分的发展水平相适应，常微分方程研究的中心课题是如何求出通解表达式。贝努里(Bernoulli)家族对分离变量法和换元法，欧拉(Euler)对积分因子法和求常系数线性齐次方程的通解，达朗贝尔(D'Alembert)关于非齐次线性方程通解的迭加原理，拉格朗日(Lagrange)由线性齐次方程通解应用常数变易法得出线性非齐次方程的特解，克莱洛(Clairaut)关于全微

分方程的充要条件和奇解的概念等等，都是这个方面的重大成就。欧拉还第一个考虑了一般常微分方程解的存在问题，提出了求微分方程解的近似方法——欧拉折线法，尽管未达到近代分析所要求的严格性，但为以后解的存在性的严格证明和数值计算指出了明确的方向，提供了重要途径。到十八世纪末，常微分方程已发展成为一个重要的数学分支。

微分方程从它诞生之日起就成为人类认识和改造自然的有力工具。牛顿在创立微积分时，研究了天体力学，它与微分方程是密不可分的。海王星在它未被发现之前，就被天文学家用微分方程的方法，经过许多计算预测了它的存在，后来才根据预测的位置而被找到的。随着生产实践和科学技术的发展，微分方程也不断地向前发展，并且是数学理论联系实际的重要桥梁之一。

十九世纪，人们已经感到用初等函数或其积分式来表达通解在很多情况下是行不通的，大量的微分方程无法用初等积分法求解。这个时代，整个数学科学进入一个理论上严格化的发展阶段，柯西(Cauchy)在建立起数学分析的严格理论的同时，也对常微分方程初值问题解的存在性、唯一性首先给出了严格的证明。由此深入，开创了常微分方程解析理论这一新的分支。刘维尔(Liouville)在四十年代证明了黎卡提(Riccati)方程在一般情况下是不能用初等积分法求解的。

十九世纪后半叶到二十世纪初S. 李(Sophus Lie)运用连续群的思想，对用初等函数积分式能否表示常微分方程通解的问题作出了总结性的工作，这个工作进一步促使了常微分方

程的重点转向了解析理论和定性理论。庞加莱(Poincare)的著名论文"微分方程所定义的积分曲线"和李雅普诺夫(Ляпунов)的巨著"运动稳定性的一般问题"共同奠定了定性理论研究的基础。自此，常微分方程理论的进一步发展分为解析方法、几何方法和数值方法等三个方向。所谓解析方法，就是把微分方程的解看作是依靠这个方程定义的自变量的函数（一种新的定义函数的方法)。在很广泛的假定之下，可证明它的解有级数展开式，并根据每一方程的特点，推导出解的许多性质。在工程、物理、天文等方面有很大实用价值的特殊函数均属此类。所谓几何方法，就是把微分方程的解看成是充满平面或空间(或其中某一区域)的曲线族。对于已给的方程，要求画出曲线族的大致图形，研究它们局部或大范围的几何性质，并从中引出有用的结论。所谓数值方法，就是求微分方程的满足一定初始条件或边界条件的解的近似值的各种方法。

近几十年，世界科学技术进入了核能、火箭、人造卫星时代，常微分方程理论上和应用上都将不断发展，成为人们认识和改造自然的强有力工具。

根据原教育部颁发师专数学专业《常微分方程》课教学大纲精神，本书把重点限制在最基本的，从而也是传统的经典性部份。我们力图使学生学习本书后，能"正确理解常微分方程的基本概念，掌握基本理论和主要方法，具有一定的解题能力，从而有助于学生胜任中学数学教学，并为学生今后的进修与提高打下基础"。

目　录

第一章　基本概念

我们已经学过了一些代数方程，并应用它们解决了许多实际问题，使我们体会到方程论对于解决实际问题的重要性。

在解析几何与微积分中，我们又学习了另一类方程，方程的个数少于未知量的个数，即通常所说的函数方程。

例如：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

$$\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$$

$$x(t+s)=\frac{x(t)+x(s)}{1-x(t)x(s)}$$

这类函数方程与前面所说的代数方程相比，在概念上又前进了一步，它不再是去确定未知量的几个可取值，而是要确定变量之间的函数关系。利用这类方程，可以解决一些新的问题，如极值问题、轨迹问题、定义新的函数等等。

但是，大量的实际问题，特别是比较复杂的问题，我们不能直接写出量与量之间的函数关系，但可以依据力学的、物理学的、几何学的定律、法则、公式建立这些变量和它们导函数或微分之间的关系。

例如：$\dfrac{dy}{dx}=-k(y-y_0)$　　(1)

$$\mathrm{M}(x,\ y)dx+\mathrm{N}(x,\ y)dy=0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \tag{3}$$

称含有未知函数的导数(或微分)的方程为**微分方程**。如果微分方程中，只有一个自变量，则称这种方程为**常微分方程**；而称有两个或两个以上自变量的微分方程为**偏微分方程**。

如(1)，(2)为常微分方程，(3)为偏微分方程。

本书前五章，讨论常微分方程的基本概念，初等解法，一阶微分方程的基本理论，高阶微分方程，线性微分方程组。第六章对一阶偏微分方程做一简介。

常微分方程是一门应用极其广泛的数学分支。它不仅在自然科学、工程技术领域中有广泛的应用，而且在社会科学的某些领域中也得到了新的应用。在常微分方程发展过程中，数学本身的一些其它分支，如复变函数论、泛函分析、拓扑学等都曾给予重要支援。

下面通过几个例题，说明微分方程是如何从生物学、物理学、力学和几何学引导出来的。

§1.1 微分方程的例

例 1. 酵母的繁殖速度与它在该时刻的量成正比。设有m克的酵母，三小时以后增长一倍，问六小时以后是原来的几倍？

解： 设时刻 t 时，酵母的量为$y=y(t)$，依题意有：

$$\frac{dy}{dt}=ky \tag{1.1}$$

其中 $k>0$，且有 $y|_{t=0}=m$，$y|_{t=3}=2m$。

将(1.1)变形为 $\frac{dy}{y}=kdt$

积分得 $\ln y = kt + C_1$

有 $y = Ce^{kt}$ 其中 $C = e^{C_1}$

由 $y|_{t=0} = m$，得 $C = m$

有 $y = me^{kt}$

又由 $y|_{t=3} = 2m$，得 $2m = me^{3k}$

解得 $k = \frac{1}{3}\ln 2$

所以 $y = me^{(\frac{1}{3}\ln 2)t} = 2^{\frac{t}{3}}m$

当 $t = 6$时，$y = 4m$。即六小时后，酵母的量是原来的四倍。

人们发现，在研究放射性元素如镭、铀的衰变，植物的初期生长，液体的冲淡，物体的冷却过程及密封容器的抽真空等问题时，都会得到与(1.1)相同形式的微分方程，但有时右边的k是负的。这种不同领域里的问题却有相同类型的数学模型的事实，为应用数学工作者和工程技术人员应用模拟的方法解决具体的工程、物理等方面的问题，提供了理论根据。

例 2. 单摆振动。设有质量为m的摆锤，用长为l的细线悬挂在O点(如图1.1)，让它在重力作用下，于铅直平面内，沿一圆弧左右摆动，试求摆锤的运动方程。

解: 如图1.1，过点O作铅垂线OO_1，把这一方向取为零度，摆线在其右侧与OO_1所成角规定为正角，在其左侧与它所成的角规定为负角。

摆在振动过程中，摆线与铅垂线OO_1所成角φ是时间t的

函数$\varphi=\varphi(t)$。

质点M受力分析如下：

外力$F(t)$，与运动方向一致；

重力分解的切向力$-mg\sin\varphi \approx -mg\varphi$，$|\varphi|$很微小；

阻力 $-\mu v=-\mu l\frac{d\varphi}{dt}$，与运动方向相反，其中$v$为质点M的切向速度；

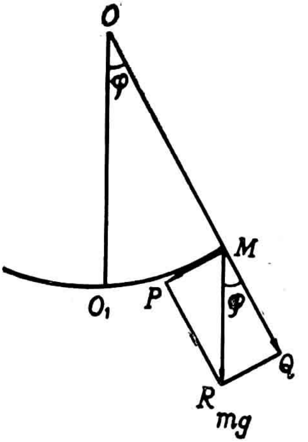

图 1.1

由牛顿第二定律

$$ma=m\frac{dv}{dt}=ml\frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$=F(t)-mg\varphi-\mu l\frac{d\varphi}{dt}$$

即
$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{\mu}{m}\frac{d\varphi}{dt}+\frac{g}{l}\varphi=\frac{1}{ml}F(t) \tag{1.2}$$

当要确定摆的某一个特定的运动时，应先给出摆的初始状态：

$$\varphi|_{t=0}=\varphi_0,\qquad \left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_{t=0}=\dot{\varphi}_0$$

其中φ_0是摆的初始位置，$\dot{\varphi}_0$是摆的初始角速度。

注：1^0 当外力不存在时，单摆做有阻尼自由微小摆动，此时方程(1.2)变为

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{\mu}{m}\frac{d\varphi}{dt}+\frac{g}{l}\varphi=0$$

2^0 当单摆做无阻尼微小摆动时，方程(1.2)变为

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{g}{l}\varphi=0$$

3^0 若摆角不是很小时，不能用φ近似代替$\sin\varphi$，上面方程应为

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0$$

例 3．R－L－C电路

如图1.2所示R－L－C电路中，电源电动势$e(t)$为时间t的函数，试求电键k合上后，电流I应满足的微分方程。其中R、C、L 均为常数。

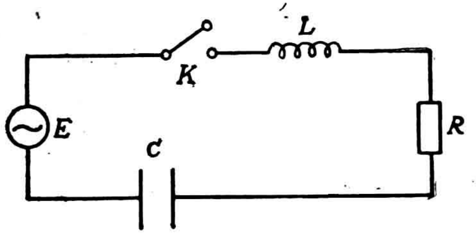

图1.2

解：电容$C=\frac{Q}{V}$，其中Q为电容器极板上电量的绝对值，V为两极板上电压差的绝对值，则有$V=\frac{Q}{C}$。

经过电阻R，电感L的电压降分别为RI及$L\frac{dI}{dt}$。

由基尔霍夫(Kirchhoff)第二定律，在闭合回路中，所有支路上的电压的代数和为零。则有

$$L\frac{dI}{dt}+RI+\frac{Q}{C}=e(t)$$

又 $I=\frac{dQ}{dt}$，对上式两边求导，有

$$\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dI}{dt}+\frac{1}{CL}I=\frac{1}{L}\frac{de(t)}{dt} \tag{1.3}$$

(1.3)为所求的微分方程。

注：1^0 当$e(t)$为常量时，(1.3)变为

$$\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dI}{dt}+\frac{1}{CL}I=0$$

2^0 当$e(t)$为常量，且$R=0$时，则(1.3)变为

$$\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{1}{CL}I=0$$

例 4. 有一曲线，其上任一点的切线在纵轴上的截距恒与切点的横坐标相等，求此曲线所满足的微分方程。

解：设$y=f(x)$为所求的曲线方程，则过曲线上任意一点$A(x, y)$的切线方程为：

$$\mathrm{y}-y=y'(\mathrm{x}-x)$$

其中(x, y)为切线上点的坐标。所以

$$\mathrm{y}=\mathrm{x}y'-xy'+y$$

由题设知：

$$-xy'+y=x \tag{1.4}$$

(1.4)即为所求的方程。

上述几个例子，一方面说明了微分方程在客观实际中有着广泛的应用，另一方面我们可以看出将一个实际问题归结为微分方程问题加以解决，首先要根据所研究问题的物理的、化学的、生物的或其它学科的定律、法则、公式，并利用导数的意义才可能达到我们的目的。

§1.2 基本概念

在微分方程中，未知函数最高阶导数的阶数，**称为微分方程的阶**。

如 $y'=-\dfrac{x}{y}$,

$$ay''+by'+cy=f(x),\ (a\neq 0)$$

$$\frac{d^3x}{dt^3}+\sin x=e^t$$

分别是一、二、三阶的微分方程。

一般地，n阶常微分方程形如

$$F(x;\ y,\ y',\ \cdots,y^{(n)})=0 \tag{1.5}$$

如果方程(1.5)的左端是y，y'，y''，…，$y^{(n)}$的一次有理整式，则称之为**n阶线性微分方程**。其一般形式为：

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y$$
$$=f(x)$$

其中$a_0(x)$不恒为零，$a_i(x)$ $(i=0,\ 1,\ 2,\cdots,\ n)$，$f(x)$为$x\in[a,\ b]$的已知函数。

我们称不是线性方程的微分方程为**非线性微分方程**。

如 $\dfrac{d^2\varphi}{dt^2}+\dfrac{g}{l}\sin\varphi=0$

$$\frac{dy}{dx}+2xe^y=3x^2$$

都是非线性微分方程。

如果函数$y=\varphi(x)$，　$x\in[a, b]$，代入方程(1.5)，使其变成恒等式：

$$F(x;\ \varphi(x),\ \varphi'(x),\ \cdots,\ \varphi^{(n)}(x))\equiv 0 \quad x\in[a,\ b]$$

则称$y=\varphi(x)$是方程(1.5)在$[a,\ b]$上的**解**。

例如，$y=\sin x$，$y=\cos x$是方程$y''+y=0$的解。

如果函数方程$\Phi(x, y)=0$所确定的隐函数 $y=\varphi(x)$是方程(1.5)的解，$x\in[a,\ b]$，则称$\Phi(x,\ y)=0$为方程(1.5)的**隐式解**

例如　$x^2+y^2=C$是方程$y'=-\dfrac{x}{y}$的隐式解。

n阶微分方程，　含有n个独立的任意常数的解，称为该方程的**通解**。记作：

$$y=\varphi(x;\ C_1,\ C_2,\ \cdots,\ C_n)$$

注：所谓函数$y=\varphi(x;\ C_1,\ C_2,\ \cdots,\ C_n)$含有$n$个独立常数,是指行列式

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial C_1} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial C_2} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi}{\partial C_n} \\ \dfrac{\partial\varphi'}{\partial C_1} & \dfrac{\partial\varphi'}{\partial C_2} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi'}{\partial C_n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \dfrac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial C_1} & \dfrac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial C_2} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial C_n} \end{vmatrix} \neq 0$$

$x\in[a,\ b]$，$\varphi^{(k)}$表示φ 对 x 的 k 阶导数，$k=1,\ 2,\ \cdots, n-1$。

类似地，可以定义方程(1.5)的**通积分**

$$\Phi(x,\ y;\ C_1,\ C_2,\ \cdots,\ C_n)=0$$

及特积分

$$\Phi(x, y; C_1^0, C_2^0, \cdots, C_n^0)=0。$$

应用微分方程研究实际问题时，是要求出具体问题的变化规律。因此，在求解过程中，要对所求的解加以限定条件。常见的定解条件有**初始条件**和**边界条件**。本书主要介绍微分方程附有初始条件问题，称这类问题为**柯西初值问题**或简称为**初值问题**。

一阶微分方程的初始条件为：

$$y(x_0)=y_0$$

一般地，n阶微分方程的初始条件为：

$$y(x_0)=y_0, \quad y'(x_0)=y_0', \quad \cdots, \quad y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$$

其中 x_0，y_0，y_0'，…，$y_0^{(n-1)}$均为常数。

称 n 阶微分方程的含有 n 个被确定了的任意常数的解，为微分方程的**特解**。

例 1. 验证 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-4x}$为方程

$$y''+5y'+4y=0$$

的通解，并求满足初始条件 $y|_{x=0}=2$，$y'|_{x=0}=1$的特解。其中C_1、C_2为任意常数。

解： 首先验证是通解。对$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-4x}$求导有

$$y'=-C_1e^{-x}-4C_2e^{-4x}$$

$$y''=C_1e^{-x}+16C_2e^{-4x}$$

代入方程左端，得

$$\text{左式}=(C_1e^{-x}+16C_2e^{-4x})+5(-C_1e^{-x}-4C_2e^{-4x})$$
$$+4(C_1e^{-x}+C_2e^{-4x})=0=\text{右式}$$