权威　实用　经典

2013 人大考研

2013年 考研数学

高分复习全书（数学三）习题详解

曹显兵　刘喜波／编著

赠

中国人民大学出版社

2013年

考研数学高分复习全书(数学三)习题详解

曹显兵　刘喜波　编著

中国人民大学出版社
·北京·

目　录

第一部分　微积分

第一章　函数、极限与连续

习题精选一

一、填空题

1. $(ab)^{\frac{3}{2}}$.

【分析】 此题为未定式"1^{∞}"型.

【详解】 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{x}\left(\frac{a^x+b^x}{2}-1\right)}=e^{\frac{3}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x+b^x-2}{x}}=e^{\frac{3}{2}\lim\limits_{x\to 0}(a^x\ln a+b^x\ln b)}=e^{\frac{3}{2}(\ln a+\ln b)}=(ab)^{\frac{3}{2}}$.

2. $-\dfrac{3}{2}$.

【详解】
$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}ax^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-\frac{2}{3}a.$$

由题意知 $-\dfrac{2}{3}a=1$,所以 $a=-\dfrac{3}{2}$.

3. $10\ln 3$.

【详解】 因为$\lim\limits_{x\to 0}(3^x-1)=0$,所以$\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin 2x}\right)=0$,从而有$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sin 2x}=0$.

由 $\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin 2x}\right)\sim\dfrac{f(x)}{\sin 2x}$, $3^x-1=e^{x\ln 3}-1\sim x\ln 3$,得
$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{\sin 2x}}{x\ln 3}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x^2\ln 3}=5,$$

故
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=10\ln 3.$$

4. $\dfrac{1}{2}$.

【分析】 作变量替换 $u=xt$,然后求极限.

【详解】 令 $u=xt$,则
$$\int_{\frac{x}{2}}^{x}\frac{e^{xt}-1}{t}dt=\int_{\frac{x^2}{2}}^{x^2}\frac{e^u-1}{u}du,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin x^2}\int_{\frac{x}{2}}^{x}\frac{e^{xt}-1}{t}dt=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\int_{\frac{x^2}{2}}^{x^2}\frac{e^u-1}{u}du=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x}\left(2x\frac{e^{x^2}-1}{x^2}-x\frac{e^{x^2/2}-1}{x^2/2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-e^{x^2/2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2/2}(e^{x^2/2}-1)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{x^2/2}-1)}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

5. $\alpha=1,\quad \beta=\frac{1}{2}.$

【详解】 由$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}-(\alpha+\beta\sin x)}{\sin^2 x}$存在知

$$\lim_{x\to 0}[\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}-(\alpha+\beta\sin x)]=0,$$

可得 $\alpha=1.$

用泰勒公式有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}-(\alpha+\beta\sin x)}{\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{2}(\sin x+\sin^2 x)-\frac{1}{8}(\sin x+\sin^2 x)^2-(1+\beta\sin x)+o(\sin^2 x)}{\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\sin x+\frac{3}{8}\sin^2 x}{\sin^2 x}$$

存在,从而有 $\beta=\frac{1}{2}.$

故 $\alpha=1,\quad \beta=\frac{1}{2}.$

二、选择题

1. (B)

【分析】 利用无穷小量阶的比较.

【详解】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\sin^2 x)\cos x}{3x^2+4x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{3x^2+4x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2+4x^3}=\frac{1}{3}.$

所以 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的同阶但非等价无穷小. 答案应选(B).

2. (C)

【详解】

$$F(x)=\int_0^x(x^2-t^2)f(t)dt=x^2\int_0^x f(t)dt-\int_0^x t^2f(t)dt,$$

$$F'(x)=2x\int_0^x f(t)dt+x^2f(x)-x^2f(x)=2x\int_0^x f(t)dt.$$

因为 $F'(x)$ 与 x^k 是同阶无穷小,所以$\lim\limits_{x\to 0}\frac{F'(x)}{x^k}$存在且不为零.

用洛必达法则有

$$\lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{2\int_0^x f(t)dt}{x^{k-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{2f(x)}{(k-1)x^{k-2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2f'(x)}{(k-1)(k-2)x^{k-3}}$$

$$= 2f'(0)\lim_{x\to 0}\frac{1}{(k-1)(k-2)x^{k-3}}$$

存在且不为零，从而 $k-3=0$，即 $k=3$.

3. (A)

【详解】 函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的间断点是 $x=0,\pm\frac{\pi}{2},1$，而

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}=1,\quad \lim_{x\to 0^-}\frac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}=-1,$$

故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点.

但 $\lim\limits_{x\to\pm\frac{\pi}{2}}\frac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}=\infty$， $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}=\infty$， 故答案应选(A).

4. (C)

【详解】 由 $f(x),g(x)$ 可导知，$f(x),g(x)$ 连续．于是有：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=g(x_0)$．又 $f(x_0)<g(x_0)$，所以有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)<\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$．故选(C).

【评注】 本题也可用排除法．取 $f(x)=x$，$g(x)=x+1$，则 $f(x)<g(x)$，$x\in(-\infty,+\infty)$．但(A)，(B)，(D) 不成立，故选(C).

5. (C)

【详解】 由 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$，即 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}=2$，因而 $g(0)=0$，$g'(0)=2$．故应选(C).

三、解答题

1.【详解】 用洛必达法则有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)+\ln(1-x)}{1-\cos x+\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-2x}{(1+x)(1-x)}}{\sin x+2\sin x\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{-2}{(1+x)(1-x)(1+2\cos x)}=-\frac{2}{3}.$$

2.【详解】 由泰勒公式有 $\sqrt{1+x^2}=1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$,

$$\sqrt[3]{1+2\sin^2 x}=1+\frac{2}{3}\sin^2 x+o(x^2),$$

所以
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt[3]{1+2\sin^2 x}}{\tan^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\frac{1}{2}x^2\right)-\left(1+\frac{2}{3}\sin^2 x\right)+o(x^2)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}\sin^2 x}{x^2}=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{6}.$$

3.【详解】
$$\lim_{x\to 0}(3e^{\frac{x}{x-1}}-2)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(3e^{\frac{x}{x-1}}-3)}{x}},$$

而 $$\lim_{x\to 0}\frac{(3e^{\frac{x}{x-1}}-3)}{x}=3\lim_{x\to 0}e^{\frac{x}{x-1}}\frac{-1}{(x-1)^2}=-3,$$

故 $$\lim_{x\to 0}(3e^{\frac{x}{x-1}}-2)^{\frac{1}{x}}=e^{-3}.$$

4.【详解】 由洛必达法则有

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{-\sin(x-1)}{\cos(x-1)}}{-\left(\cos\frac{\pi}{2}x\right)\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to 1}\frac{-\sec^2(x-1)}{\frac{\pi}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2}x\right)\frac{\pi}{2}}=\frac{-1}{\frac{\pi^2}{4}}=-\frac{4}{\pi^2}.$$

5.【分析】 作代换 $t=\frac{1}{x}$,转化“$\infty-\infty$”型为“$\frac{0}{0}$”型.

【详解】 令 $t=\frac{1}{x}$,用洛必达法则有

$$\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})\right]=\lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\ln(1+t)\right]=\lim_{t\to 0}\left[\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}\right]$$

$$=\lim_{t\to 0}\left[\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t}\right]=\lim_{t\to 0}\frac{1}{2(1+t)}=\frac{1}{2}.$$

6.【详解】 由泰勒公式有 $\ln(1+ax)=ax-\frac{a^2x^2}{2}+o(x^2)$,从而得

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{a}{x}-\left(\frac{1}{x^2}-a^2\right)\ln(1+ax)\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{a}{x}-\left(\frac{1}{x^2}-a^2\right)\left(ax-\frac{a^2x^2}{2}+o(x^2)\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{a}{x}-\frac{a}{x}+a^3x+\frac{a^2}{2}-\frac{a^4x^2}{2}\right]=\frac{a^2}{2}.$$

【评注】 本题可通分直接利用洛必达法则,但较烦琐且易出错.

7.【详解】 $$\lim_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\sin(n\pi-\pi\sqrt{n^2+1})$$

$$=\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\sin\pi\frac{-1}{n+\sqrt{n^2+1}}=0.$$

8.【分析】 应注意极限 $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}$ 不存在情形的处理(要考虑左、右极限).

【详解】 $$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x}\right)=1.$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=2-1=1,$$

所以 原式 $=1$.

9.【详解】 当 $x<0$ 时,$e^{tx}\to 0$,故 $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{x+e^{tx}}{1+e^{tx}}=x$. 当 $x=0$ 时,$\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{x+e^{tx}}{1+e^{tx}}=\frac{1}{2}$. 当 $x>0$ 时,$e^{tx}\to+\infty$,故 $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{x+e^{tx}}{1+e^{tx}}=1$. 所以

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{x+e^{tx}}{1+e^{tx}}=\begin{cases}x & x<0;\\ \frac{1}{2}, & x=0;\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

【评注】　含参量的极限一定要考虑参数的取值范围.

10.【详解】　$f(x)$ 的间断点为 $x=-k\pi-\frac{\pi}{2}(k=0,1,2,\cdots),x=0,x=1$.

因为　$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=0$，　$\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=-\sin 1$，　故 $x=0$ 为跳跃间断点.

因为 $x\to 1$ 时，$f(x)$ 的左、右极限均不存在，故 $x=1$ 为第二类间断点.

因为　$\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}}f(x)=\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}}\frac{x(\pi+2x)}{2\cos x}=-\frac{\pi}{2}$，　故 $x=-\frac{\pi}{2}$ 为可去间断点.

因为　$\lim\limits_{\substack{x\to -k\pi-\frac{\pi}{2}\\ k=1,2,\cdots}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -k\pi-\frac{\pi}{2}\\ k=1,2,\cdots}}\frac{x(\pi+2x)}{2\cos x}=\infty$，　故 $x=-k\pi-\frac{\pi}{2}(k=1,2,\cdots)$ 为第二类间断点.

11.【详解】　由于 $2x-1<[2x]\leqslant 2x$ 成立，故当 $x\neq 0$ 时，有

$\frac{2x-1}{x}<\frac{[2x]}{x}\leqslant\frac{2x}{x}$，　即　$2-\frac{1}{x}<\frac{[2x]}{x}\leqslant 2$，　或　$\frac{2x-1}{x}>\frac{[2x]}{x}\geqslant\frac{2x}{x}$，

即
$$2-\frac{1}{x}>\frac{[2x]}{x}\geqslant 2.$$

由夹逼原理，
$$\lim_{x\to\infty}\frac{[2x]}{x}=2.$$

因为　$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{[2x]}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-1}{x}=\infty$，　$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{0}{x}=0$.

所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在.

第二章　导数与微分

习题精选二

一、填空题

1. $-\frac{101!}{100}$.

【详解】　由于 $f(1)=0$，则 $f(x)=f(x)-f(1)$.

由导数的定义有
$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}[(x+2)(x-3)(x+4)\cdots(x+100)]$$

$$= 3 \cdot (-2) \cdot 5 \cdot (-4) \cdots (-98) \cdot 101 = -\frac{101!}{100}.$$

2. $\frac{f'(0)}{2}$.

【详解】 用导数的定义.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1-\cos x)}{\tan^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(2\sin^2\frac{x}{2})}{\tan^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(2\sin^2\frac{x}{2})\cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{f(2\sin^2\frac{x}{2}) - f(0)}{2\sin^2\frac{x}{2} - 0}\cdot\frac{\cos^2 x\cdot 2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2 x}\right] = \frac{f'(0)}{2}.$$

3. $\frac{1}{(x+1)^2}\ln\frac{2x-1}{x+1}$.

【详解】 令 $u = \frac{2x-1}{x+1}$, 则 $u'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(u)\cdot u'(x) = \ln u^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{3}{(x+1)^2} = \left(\ln\frac{2x-1}{x+1}\right)\frac{1}{(x+1)^2}.$$

4. e.

【详解】 $\lim\limits_{x\to 0}[1+f(x)]^{\frac{1}{\ln(1+x)}} = \lim\limits_{x\to 0}[1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{f(x)-f(0)}{\ln(1+x)-\ln 1}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\cdot\frac{x}{\ln(1+x)-\ln 1}\right]}$

$$= \mathrm{e}^{f'(0)\frac{1}{\ln'(1+x)}\big|_{x=0}} = \mathrm{e}.$$

5. $3\sqrt{3}$.

【详解】 $g''(y) = (g'(y))' = \left(\frac{1}{f'(x)}\right)'_y = -\frac{f''(x)}{f'^2(x)}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2}\cdot\frac{1}{f'(x)}.$

当 $y=2$ 时， $x = 1,\quad f'(1) = -\frac{1}{\sqrt{3}},\quad f''(1) = 1,$

故 $$g''(2) = -\frac{1}{\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = 3\sqrt{3}.$$

二、选择题

1. (A)

【详解】 函数可能的不可导点为 $x=\pm\pi$.

因为
$$y'_-(\pi) = \lim_{x\to\pi^-}\frac{(\pi^2-x^2)\sin^2 x}{x-\pi} = 0,$$
$$y'_+(\pi) = \lim_{x\to\pi^+}\frac{-(\pi^2-x^2)\sin^2 x}{x-\pi} = 0,$$

所以 y 在 π 处可导.

又
$$y'_-(-\pi) = \lim_{x\to-\pi^-}\frac{-(\pi^2-x^2)\sin^2 x}{x+\pi} = 0,$$
$$y'_+(-\pi) = \lim_{x\to-\pi^+}\frac{(\pi^2-x^2)\sin^2 x}{x+\pi} = 0,$$

所以 y 在 $-\pi$ 处可导.

故 y 无不可导点.

【评注】 本题可利用如下结论:设$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\exists$,则 $g(x)|x-x_0|$ 在 x_0 处可导的充分必要条件为$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$.

2. (C)

【详解】 由于 $-f(x)=f(-x)$,所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为奇函数,故曲线 $y=f(x)$ 关于 $(0,0)$ 中心对称. 又当 $x\in(0,+\infty)$ 时 $f'(x)>0,f''(x)>0$,故当 $x\in(-\infty,0)$ 时 $f'(x)>0,f''(x)<0$.

3. (C)

【详解】 由于 $f(x)$ 为奇函数,故 $f(0)=0$.

对 $f(x)$ 在以 $0,x$ 为端点的区间上用拉格朗日中值定理有

$$|f(x)|=|f(x)-f(0)|=|f'(\xi)|\,|x-0|\leqslant M\cdot 1,$$

故对 $\forall x\in[-1,1],|f(x)|\leqslant M$.

4. (C)

【详解】 根据泰勒公式有

$$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+o(x^5),\quad \sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5),$$

则
$$\tan x-\sin x=\frac{x^3}{2}+\frac{1}{8}x^5+o(x^5),$$

而
$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)x^2}{2!}+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots,$$

由题知$\lim\limits_{x\to 0}F(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{f(x)}=1$,即当 $x\to 0$ 时,$f(x)$ 与 $\tan x-\sin x$ 为等价无穷小量,所以

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=0,\quad \frac{f'''(0)}{3!}=\frac{1}{2},$$

故 $f'''(0)=3$,而 $f^{(4)}(0)$ 任意.

5. (D)

【详解】 由于

$$F(x)=\int_0^x(x^2-t^2)f'(t)\mathrm{d}t=x^2\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t-\int_0^x t^2f'(t)\mathrm{d}t,$$

所以

$$F'(x)=2x\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t+x^2f'(x)-x^2f'(x)=2x\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t,$$

由题意知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F'(x)}{x^2}=1$,即

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{2x\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t}{x}=2\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=2f'(0),$$

故　$f'(0)=\dfrac{1}{2}$.

三、解答题

1.【详解】 (1) 当 $x\neq 0$ 时,$f(x)$ 显然连续.

当 $x=0$ 时,
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=a=f(0),$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{x(1+\sqrt{1+x})}=\frac{1}{2}.$$

故当 $a=\frac{1}{2}$ 时,$f(x)$ 处处连续.

(2) 当 $x\neq 0$ 时,$f(x)$ 显然可导. 当 $x=0$ 时,
$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=b,$$
$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x}-\dfrac{1}{2}}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-\sqrt{1-x}}{4x\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1}{2}x}{4x}=\frac{1}{8}.$$

所以当 $b=\frac{1}{8}$ 时,$f(x)$ 处处可导.

2.【详解】 方程两边对自变量 x 求导,得
$$2-\mathrm{e}^{-(x+y)^2}(1+y')=xy'+y \qquad ①$$

令 $x=0$,由原方程得
$$0-\int_1^{y(0)}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=0.$$

又 $\mathrm{e}^{-t^2}\neq 0$,所以有 $y(0)=1$,代入 ① 式,得
$$2-\mathrm{e}^{-[0+y(0)]^2}[1+y'(0)]=0+y(0).$$

即 $2-\dfrac{1+y'(0)}{\mathrm{e}}=1$, 解得 $y'(0)=\mathrm{e}-1$.

3.【详解】 当 $x\neq a$ 时, $g'(x)=\dfrac{f'(x)(x-a)-f(x)}{(x-a)^2}$.

当 $x=a$ 时,
$$g'(a)=\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{f(x)}{x-a}-f'(a)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f'(a)(x-a)}{(x-a)^2}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{2(x-a)}=\frac{1}{2}f''(a).$$

故
$$g'(x)=\begin{cases}\dfrac{f'(x)(x-a)-f(x)}{(x-a)^2}, & x\neq a,\\[2mm] \dfrac{1}{2}f''(a), & x=a.\end{cases}$$

又由于
$$\lim_{x\to a}g'(x)=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)(x-a)-f(x)}{(x-a)^2}=\frac{1}{2}f''(a)=g'(a).$$

所以，$g'(x)$ 在 $x=a$ 处连续．

4.【详解】 由于 $f(x+1)=2f(x)$，则

$$f(x+2)=2f(x+1)=2^2f(x).$$

一般式为
$$f(x+n)=2f(x+n-1)=\cdots=2^nf(x),$$

则
$$f(n)=2^nf(0)=2^n,$$

所以
$$f'(n)=\lim_{x\to0}\frac{f(x+n)-f(n)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2^nf(x)-2^nf(0)}{x}=2^nf'(0).$$

5.【证明】 当 $0<|x-a|<\delta$ 时，$|f(x)|\geqslant|g(x)|$.

又 $f(a)=g(a)=0$，则 $\quad |f(x)-f(a)|\geqslant|g(x)-g(a)|$，

于是
$$\frac{|f(x)-f(a)|}{|x-a|}\geqslant\frac{|g(x)-g(a)|}{|x-a|}.$$

令 $x\to a$，则有

$$\lim_{x\to a}\frac{|f(x)-f(a)|}{|x-a|}\geqslant\lim_{x\to a}\frac{|g(x)-g(a)|}{|x-a|},$$

即
$$|f'(a)|\geqslant|g'(a)|.$$

6.【详解】 由莱布尼茨公式有

$$f^{(n-1)}(x)=\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k\left[(x-a)^n\right]^{(n-1-k)}\varphi^{(k)}(x)=\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k\frac{n!}{(k+1)!}(x-a)^{k+1}\varphi^{(k)}(x),$$

显然
$$f^{(n-1)}(a)=0.$$

所以
$$f^{(n)}(a)=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}n!\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k\frac{1}{(k+1)!}(x-a)^k\varphi^{(k)}(x)=n!\varphi(a).$$

7.【详解】 由泰勒公式有

$$f(x)=f(0)+f'(0)(x-0)+\frac{f''(\xi(x))}{2}(x-0)^2=\frac{f''(\xi(x))}{2}x^2,$$

其中 $\xi(x)$ 介于 $0,x$ 之间，且 $\lim\limits_{x\to0}\xi(x)=0$，

同时 $f(u)=\frac{1}{2}f''(\xi(u))u^2$，其中 $\xi(u)$ 介于 $0,u$ 之间，而 $u=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$，

故
$$\lim_{x\to0}u=\lim_{x\to0}\frac{-f(x)}{f'(x)}=\lim_{x\to0}\frac{-f'(x)}{f''(x)}=0,$$

所以
$$\lim_{x\to0}\xi(u)=0,$$

故
$$\lim_{x\to0}\frac{xf(u)}{uf(x)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}xf''(\xi(u))u^2}{\frac{1}{2}uf''(\xi(x))x^2}=\frac{f''(0)}{f''(0)}\lim_{x\to0}\frac{u}{x}=\lim_{x\to0}\frac{u}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}}{x}=1-\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{xf'(x)}=1-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f''(\xi(x))x}{f'(x)}$$

$$=1-\frac{1}{2}f''(0)\lim_{x\to0}\frac{x}{f'(x)}=1-\frac{1}{2}f''(0)\lim_{x\to0}\frac{1}{f''(x)}=\frac{1}{2}.$$

8.【详解】 一般有如下结论：$f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上一个连续的周期函数，周期为 p，则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{p}\int_0^p f(t)\mathrm{d}t.$$

事实上，对 $\forall x>0$，$\exists n$ 及 $x'\in[0,p)$，使 $x=np+x'$，由周期函数积分性质有

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t&=\frac{1}{np+x'}\int_0^{np+x'} f(t)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{np+x'}\left[\int_0^{np} f(t)\mathrm{d}t+\int_{np}^{np+x'} f(t)\mathrm{d}t\right]\\&=\frac{n}{np+x'}\int_0^p f(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{np+x'}\int_0^{x'} f(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

因
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{np+x'}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{p+\frac{x'}{n}}=\frac{1}{p},$$

$$\left|\frac{\int_0^{x'} f(t)\mathrm{d}t}{np+x'}\right|\leqslant\frac{\int_0^{x'}|f(t)|\mathrm{d}t}{np+x'}\leqslant\frac{\int_0^{p}|f(t)|\mathrm{d}t}{np+x'}\to 0\quad(n\to\infty),$$

所以
$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t&=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{np+x'}\int_0^p f(t)\mathrm{d}t+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{np+x'}\int_0^{x'} f(t)\mathrm{d}t.\\&=\frac{1}{p}\int_0^p f(t)\mathrm{d}t+0=\frac{1}{p}\int_0^p f(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

由于 $|\sin t|$ 的周期为 π 且连续，则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x|\sin t|\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}|\sin t|\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}.$$

9.【证明】 因为 $f(x)g(x)=1$，则

$$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=0,\qquad ①$$

即
$$\frac{f'(x)}{f(x)}=-\frac{g'(x)}{g(x)}.\qquad ②$$

式①两边求导得

$$f''(x)g(x)+2f'(x)g'(x)+f(x)g''(x)=0,$$

$$f''(x)+2\frac{f'(x)g'(x)}{g(x)}+\frac{f(x)g''(x)}{g(x)}=0,$$

$$\frac{f''(x)}{f'(x)}+\frac{2f'(x)g'(x)}{f'(x)g(x)}+\frac{f(x)g''(x)}{f'(x)g(x)}=0,$$

由①得
$$\frac{f''(x)}{f'(x)}+\frac{2g'(x)}{g(x)}-\frac{f(x)g''(x)}{g'(x)f(x)}=0,$$

则
$$\frac{f''(x)}{f'(x)}+\frac{2g'(x)}{g(x)}=\frac{g''(x)}{g'(x)},$$

又由②得
$$\frac{f''(x)}{f'(x)}-\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{g''(x)}{g'(x)}-\frac{g'(x)}{g(x)}.$$

10.【证明】 由于
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}},$$

两边对 x 求导有
$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}\cdot\frac{dy}{dx}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}=-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3},$$

故
$$\frac{d^2x}{dy^2}=-\left(\frac{dx}{dy}\right)^3\cdot\frac{d^2y}{dx^2}=-\left(\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right)^3\frac{d^2y}{dx^2},$$

又
$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\left(\frac{dy}{dx}\right)^3,$$

所以
$$\frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}\left[-\left(\frac{dy}{dx}\right)^3\right]=1.$$

第三章　微分中值定理与导数的应用

习题精选三

一、填空题

1. $(-\infty,-1)$，$(0,1)$.

【详解】 由已知得 $y'=2x-\frac{2}{x}<0$.

当 $x<0$ 时，解得上述不等式的解集为 $(-\infty,-1)$；

当 $x>0$ 时，解得上述不等式的解集为 $(0,1)$.

所以函数 $y=x^2-\ln x^2$ 的单调减区间为 $(-\infty,-1)$ 和 $(0,1)$.

2. $a=4$，$b=5$.

【详解】
$$f'(x)=3x^2+2ax+b,$$

由题设知
$$f'(-1)=3-2a+b=0, \tag{①}$$
$$f(-1)=-1+a-b=-2, \tag{②}$$

联立①,②解得　$a=4$，$b=5$.

3. $-\frac{1}{\ln 2}$.

【详解】 由 $f'(x)=2^x(1+x\ln 2)=0$,得驻点为 $x=-\dfrac{1}{\ln 2}$,而

$$f''(x)=2^x[2\ln 2+x(\ln 2)^2],\quad f''\left(-\frac{1}{\ln 2}\right)>0.$$

所以函数 $y=x\cdot 2^x$ 在 $x=-\dfrac{1}{\ln 2}$ 时取得极小值.

4. $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}$.

【详解】 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{2x+1}=\dfrac{1}{2}$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]=-\dfrac{1}{4}$,

所以斜渐近线方程为 $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}$.

5. $y=\dfrac{x}{\mathrm{e}}$.

【解析】 设过原点与曲线 $y=\ln x$ 相切的切线的切点为 (x_0,y_0),则切线的斜率为 $k=\dfrac{1}{x_0}$,故切线方程为

$$y-y_0=\frac{1}{x_0}(x-x_0),$$

因为切线过原点,则

$$-y_0=\frac{1}{x_0}(-x_0),$$

解得 $y_0=1$,从而切点为 $(\mathrm{e},1)$,而切线的斜率为 $k=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

所以该切线方程为 $y=\dfrac{x}{\mathrm{e}}$.

二、选择题

1. (D)

【详解】 因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\mathrm{e}^{-x^2}}{1-\mathrm{e}^{-x^2}}=\infty$,所以 $x=0$ 为垂直渐近线;

又$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\mathrm{e}^{-x^2}}{1-\mathrm{e}^{-x^2}}=1$,所以 $y=1$ 为水平渐近线.

2. (A)

【详解】 由于 $f(x_0)>0$,$f'(x_0)=0$,故有

$$f''(x_0)-2f'(x_0)+4f(x_0)=f''(x_0)+4f(x_0)=0,$$

所以有 $f''(x_0)<0$,即 $f(x)$ 在 x_0 点处取得极大值.

3. (A)

【详解】 由 $f''(x)+f'(x)g(x)+f(x)x=\mathrm{e}^x-1$, $f(0)=1$, $f'(0)=0$,解得 $f''(0)=0$.

$f''(x)+f'(x)g(x)+f(x)x=\mathrm{e}^x-1$ 两边对 x 求导有

$$f'''(x)+f''(x)g(x)+f'(x)g'(x)+f'(x)x+f(x)=\mathrm{e}^x, \qquad ①$$

从而有 $f'''(0)=0$, ① 两边对 x 求导得

$f^{(4)}(x)+f'''(x)g(x)+f''(x)g'(x)+f''(x)g'(x)+f'(x)g''(x)+f''(x)x+2f'(x)=\mathrm{e}^x$，
可得 $f^{(4)}(0)=1>0, f(0)=1$ 为 $f(x)$ 的极小值.

4. (A)

【详解】 令 $x-t=u$，则 $t=x-u$，故

$$F(x)=\int_0^x (x-u)f(u)\mathrm{d}u = x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u.$$

由于 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 单调递增，即对任意的 $x\in(0,+\infty)$，$f(x)>f(0)=0$.

从而有　$F'(x)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u>0$，所以 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递增；

$F''(x)=f(x)>0$，$F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内是凹弧.

5. (D)

【详解】 对 $f'^2(x)$ 与 $f^2(x)$ 运用柯西中值定理可知，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f'^2(b)-f'^2(a)}{f^2(b)-f^2(a)}=\frac{2f'(\xi)f''(\xi)}{2f(\xi)f'(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{f(\xi)},$$

要使 $f''(\xi)+f(\xi)=0$，即 $\frac{f''(\xi)}{f(\xi)}=-1$，从而有

$$\frac{f'^2(b)-f'^2(a)}{f^2(b)-f^2(a)}=-1,$$

整理得到

$$f'^2(a)-f^2(b)=f'^2(b)-f^2(a).$$

三、解答题

1.【证明】 因为 $f(x)$ 不恒为常数且 $f(a)=f(b)$，故至少存在一点 $c\in(a,b)$，使得

$$f(c)\neq f(a)=f(b).$$

若 $f(c)>f(a)$，则在 $[a,c]$ 上 $f(x)$ 满足拉格朗日中值定理条件，因此至少存在一点 $\xi\in(a,c)\subset(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}>0.$$

若 $f(c)<f(a)=f(b)$，则在 $[c,b]$ 上应用拉格朗日中值定理可知，至少存在一点 $\xi\in(c,b)\subset(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}>0.$$

综上所述命题得证.

【评注】 本题也可用反证法进行证明，即假设对 $\forall x\in(a,b)$，有 $f'(x)\leqslant 0$，于是 $f(x)$ 单调不增，因此有 $f(a)\geqslant f(x)\geqslant f(b)$，而 $f(a)=f(b)$，故有 $f(a)=f(x)=f(b)$，即 $f(x)$ 为常数. 这与题设矛盾.

2.【证明】 作辅助函数 $F(x)=f(x)-x$.

由题设 $0<f(x)<1$，得 $F(0)=f(0)>0$，而 $F(1)=f(1)-1<0$，根据连续函数介值定理知在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)-\xi=0$.

下面用反证法证唯一性.