系列 1

TIANXING EDUCATION 天星教育

2012

试题调研®

中考版

考前快速提分80讲

YZLI0890144756

杜志建 主编

一本帮你抓住中考提分点的书

一本能在考前快速提升中考成绩的书

一本 **考名校上重点** 不可不看的书

数学

CHISO 青少社 SINCE 1956 新疆青少年出版社

试题调研®

中考版

考前快速提分80讲

主　　编：杜志建

编委会：常　生　邓　凯　刘亮亮　刘　鑫　刘亚平　卢世文
马舒曼　牛晓霞　王文东　吴　憾　杨洪响　杨　坤
余　敏　张　建　张　炜　张以明　郑旭东　周远喜
祝常法　（按姓氏音序排列）

数学

CHISO 新疆青少年出版社

图书在版编目(CIP)数据

试题调研. 中考版系列. 1. 数学 / 杜志建主编. —
乌鲁木齐：新疆青少年出版社，2011. 10
ISBN 978 - 7 - 5515 - 0187 - 3

Ⅰ. ①试… Ⅱ. ①杜… Ⅲ. ①中学数学课 - 初中 - 升
学参考资料 Ⅳ. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 206169 号

出 版 人:徐　江
策　　划:王启全
责任编辑:多艳萍
责任校对:刘　娜
封面设计:天星美工室

试题调研·中考版系列 1　数学

杜志建　主编

出　版:新疆青少年出版社
社　址:乌鲁木齐市北京北路 29 号　　邮政编码:830012
电　话:0991 - 7833936(编辑部)　　0371 - 68698015(邮购部)
网　址:http://www. qingshao. net

发　行:新疆青少年出版社营销中心　　电　话:0991 - 7833979　7833946
经　销:全国各地书店　　法律顾问:钟　麟 13201203567
印　刷:河南大美印刷有限公司

开　本:787mm × 1092mm　1/16　　版　次:2011 年 11 月第 1 版
印　张:7.5　　印　次:2011 年 11 月第 1 次印刷
字　数:165 千字
书　号:ISBN 978 - 7 - 5515 - 0187 - 3
定　价:10.00 元

赢在六月，赢在中考

——《试题调研》中考版策划手记

进入中考备考复习阶段，越来越多的读者来信或打电话诉说他们的困惑：时间紧迫，而要掌握的内容很多，该怎么有效复习提分以进名校、上重点高中呢？并且，现在中考试题的选拔功能越来越强，试题多变化，又该如何科学地备考，以发挥出最佳水平呢？

在咨询了众多一线初三老师后，我们知道，面对越来越鲜活的中考试题，传统的中考复习用书已满足不了备考的需要。如何既能掌握必备的知识点，又能及时跟踪命题信息的变化？唯有MOOK。MOOK是Magazine（杂志）和Book（图书）结合的杂志化图书，既具有图书的专业性和权威性的特点，又具有杂志的时效性和版面新颖活泼的特点，这种形式特别适用于中考复习。而《试题调研》系列是MOOK图书的集大成者，自上市以来，其动态化的出版模式和对命题信息的及时解读，受到莘莘学子的一致好评，帮助数百万的考生成功圆梦，被亲切地称为“中高考意见领袖”。

在研究几十个地市几百份中考试卷，并向几十所学校和数百位名师调研后，针对学生中考前的备考困惑，《试题调研》MOOK系列特推出了中考系列1《考前快速提分80讲》和系列2《临考抢分必备》。

《考前快速提分80讲》甄选出由重点、难点和关键点组合成的80个提分点，逐点深入剖析，并采用旁批式设计，对主体内容进行合理的拓展、延伸，以保证每攻克一个提分点，就把知识连成一片，快速提升学习成绩。

《临考抢分必备》依据最新中考信息，立足于临考，“百家讲堂”帮助你宏观把握考前一月，明晰奋斗目标；“抢分必备”浓缩规律、技巧、归纳等必备知识精华，让你的知识体系没有漏洞，并教你如何避开命题陷阱；“最后一题”让你牛刀小试，有备无患；“考场秘籍”临门一脚为你提供应试技巧、考场应急策略，让你的人生没有遗憾。

你的焦灼给我们带来心灵的叩击，你的微笑是我们闪亮的记忆，你的每一次突破都给我们带来惊喜，你圆梦的温馨也能延伸到我们这里。为了让你“赢在六月，赢在中考”，我们把精心准备的礼物——《试题调研》送给你，让它和你共同谱写传奇。

目录 Contents

索引

2012年中考必须掌握的80个提分点

专题一　数与式

数与式是初中数学中的基础知识，该部分内容的特点是概念多、性质多、运算法则多. 中考考查的重点是对最基本概念的理解和简单的计算，部分试题与现实生活联系较紧密，呈现方式比较灵活，具有一定的新颖性. 本专题的考点有：无理数概念的理解、估算一个无理数的大致范围；平方根、算术平方根概念的理解及运用；科学记数法、有效数字及近似数的概念的理解及运用；二次根式的化简及相关运算的熟练掌握及灵活运用；结合新定义的运算法则进行运算；通过观察、分析，探索并解决一些简单数字、式子及图形排列规律的试题等. 本专题总的考查趋势是注重基础及概念的灵活运用，试题难度中等.

——高级教师　邓凯

提分串讲

提分点 1　无理数的概念及估算

1. 紧扣概念，善于转化：无限不循环小数称为无理数. 其常见的表现形式有以下四种：(1)字母型：含 π 的式子；(2)根式型：开方开不尽的根式；(3)构造型：写成无限不循环形式的“人造”无理数；(4)三角函数型：如 sin 42°. 无理数的识别对大多数同学而言是一个难点，破解该难点的关键是回归概念本身，善于转化，并遵循“一化(简)，二辨(对照上述四种形式)，三判断(判断是否为无理数)”的原则.

2. 掌握无理数估算的方法：与无理数估算有关的常见形式为含根号的数，如某个数的平方根、立方根等，在进行估算时，通常需要利用不等思想，将原数进行放缩.

【典例 1】　下列各数：$\frac{\pi}{2}$，0，$\sqrt{9}$，0.23，cos 60°，$\frac{22}{7}$，0.303 003…，$1-\sqrt{2}$中，无理数的个数为　　(　　)

A. 2 个　　B. 3 个　　C. 4 个　　D. 5 个

分析　识别一个数是不是无理数，一定要根据无理数的定义，回归概念本身，对所给的一组数进行逐一判断.

【解析】　B　分析所给的每一个数，需要化简的，先化简，不难判断$\frac{\pi}{2}$，0.303 003…，$1-\sqrt{2}$是无理数，共 3 个，$\sqrt{9}$形式上带有根号，但化简后为 3，故$\sqrt{9}$并不是无理数，所以选 B.

【点评】　判断无理数时，只要遵循“一化，二辨，三判断”的原则，对每一个数都进行判断即可.

【典例 2】　若 $m=\sqrt{40}-4$，则估算 m 的值所在的范围是　　(　　)

A. $1<m<2$　　B. $2<m<3$　　C. $3<m<4$　　D. $4<m<5$

分析　m 为无理数，可先估算出$\sqrt{40}$的值的范围，从而求出 m 的值的范围.

【解析】　B　因为 $36<40<49$，所以$\sqrt{36}<\sqrt{40}<\sqrt{49}$，即 $6<\sqrt{40}<7$，所以 $2<\sqrt{40}-4<3$，即无理数 m 的值所在的范围为

小贴士

无理数最早由毕达哥拉斯学派弟子希伯斯发现，并以几何方法证明其无法用整数及分数表示. 希伯斯的发现，第一次向人们揭示了有理数系的缺陷，有理数并没有布满数轴上的点，在数轴上存在着不能用有理数表示的“空隙”.

失分警示

判断一组数是不是无理数，不能只停留在数的外在形式上，一定要透过表象抓住其本质，也就是要先化简，千万不能被表象所迷惑. 本题中的$\sqrt{9}=3$，cos 60° $=\frac{1}{2}$，化简后均为有理数.

提分支招

对一个无理数进行估算时，通常会用到不等式的相关性质，以及其他相关知识，要注意解题的灵活性.

$2<m<3$. 故选 B.

【点评】 在确定无理数的取值范围时，首先分析无理数的二次根式部分的被开方数是介于哪两个相邻的完全平方数之间，然后确定该二次根式的结果是介于这两个相邻的完全平方数的算术平方根之间，最后进行相关的整数部分的计算.

提分点2 与数轴有关的计算问题

1. 实数与数轴的关系：(1)实数与数轴上的点是一一对应的关系.(2)在数轴上，原点 O 表示的数字 0 既不是正数，也不是负数；原点右边的数为正数，原点左边的数为负数.(3)数轴是用形来研究实数的性质的有力工具，充分了解数轴的结构和应用特点很重要，用数轴可以进行数的大小比较，即用数轴上的点表示出数后，应用“数轴上的点表示的数，右边的数总比左边的数大”进行比较.

2. 利用数轴深刻理解实数的绝对值：数轴上表示数 a 的点与原点的距离叫做数 a 的绝对值. 解决数的绝对值的相关问题时，利用绝对值的几何意义，往往能够快速有效地解决.

【典例3】 如图 1－1，数轴上 A、B 两点分别对应实数 a、b，则 a、b、$-a$、$-b$ 的大小关系为________.

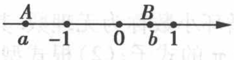

图 1－1

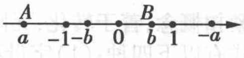

图 1－2

分析 要比较几个数的大小，可以先在数轴上找到各数对应的点，再根据在数轴上排列的数，由左至右，依次变大，从而直接得到答案.

【解析】 $a<-b<b<-a$ 数轴上 A、B 两点分别对应实数 a、b，而 $-a$、$-b$ 分别为 a、b 的相反数，即关于原点对称，这四个数在数轴上的位置如图 1－2 所示，所以 $a<-b<b<-a$.

【点评】 解答该类试题，既要理解相反数的意义，又要理解数轴的本质. 准确地在数轴上表示出各数，是正确解答该类试题的关键.

【典例4】 如图 1－3 所示，数轴上 A、B 两点所表示的数分别为 a、b，则 $|a|+|b|-|a-b|=$________.

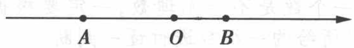

图 1－3

分析 观察图形，根据绝对值的定义可知，$|a|=OA$，$|b|=OB$，$|a-b|=AB$，然后通过线段的加减运算得到答案.

【解析】 0 因为 $|a|=OA$，$|b|=OB$，$|a-b|=AB$，而线段 $OA+OB=AB$，所以 $|a|+|b|-|a-b|=0$.

【点评】 本题巧妙地利用了数轴和绝对值的定义，将复杂的绝对值计算转化为数轴上线段长度的和与差的计算，解答快捷流畅.

提分点3 平方根与立方根的性质与运算

1. 准确把握各个“方根”的概念：(1)若一个非负数的平方等于 a，则这个数是 a 的算术平方根，表示为 $\sqrt{a}(a\geqslant 0)$；(2)若一个数的平方等于 a，则这个数是 a 的平方根，表示为 $\pm\sqrt{a}(a\geqslant 0)$；(3)若一个

小贴士

中学数学的研究对象可分为数(代数)和形(几何)两大部分，数与形的结合称为数形结合. 数轴建立了直线上的点与实数之间的对应关系，奠定了数形结合的基石. 利用数轴可以解决数的计算、数的大小比较、求相反数等问题.

点拨

比较多个实数的大小，最方便快捷的方法是找到这些数在数轴上相对应的点，然后根据数轴上数的特点直接得到结果.

提分锦囊

解决有关绝对值的计算题时，常常借助数轴，将绝对值转化为线段长，再利用代换的思想进行解题.

失分警示

在解决本部分知识的相关问题时，最容易出错的计算是求一个数的二次方根运

数的立方等于 a，则这个数是 a 的立方根，表示为$\sqrt[3]{a}$. 涉及平方根的计算时，要理解并牢记"负数没有平方根"这一性质.

2. 理解"±"的意义：正数的平方根有两个，且互为相反数，表示一个正数的平方根时，使用"±"；正数的立方根是一个正数. 表示一个数的算术平方根和立方根时，不能使用"±"，只有"求平(偶次)方根"或者"计算 $\pm\sqrt{a}(a\geqslant0)$"时，结果才有"±".

3. 熟悉"结果等于它本身的数"的开方运算：平方根等于它本身的数是0；算术平方根等于它本身的数有0，1；立方根等于它本身的数有±1，0.

【典例5】 下列计算正确的是 ( )

A. $\sqrt{4}=\pm2$　　B. $\pm\sqrt{0.01}=0.1$

C. $\sqrt{(-2)^2}=2$　　D. $\sqrt[3]{-8}=2$

分析 对于每个选项，要明白是求算术平方根，平方根，还是立方根，然后根据各自的定义逐一判断.

解析 C $\sqrt{4}$表示4的算术平方根，结果为2，所以A错；$\pm\sqrt{0.01}$表示0.01的平方根，结果为±0.1，所以B错；$\sqrt[3]{-8}$表示−8的立方根，结果为−2，所以D也错；而$\sqrt{(-2)^2}=\sqrt{4}$，表示4的算术平方根，结果为2，所以答案选C.

【点评】 本题涉及平方根、算术平方根和立方根的定义和相关计算，根据定义逐一判断是唯一的选择.

【典例6】 已知 n 是一个正整数，$\sqrt{27n}$是整数，则 n 的最小值是________.

分析 要使$\sqrt{27n}$是整数，则 $27n$ 应为完全平方数，因此，先把27分解因数，其中能开方的因数先开方，然后找与未能开方的因数的积为完全平方数的最小正整数 n.

解析 3 因为 $27=3^2\times3$，所以 $3n$ 是完全平方数，满足条件的最小正整数是3.

【点评】 由算术平方根的定义确定 $27n$ 是完全平方数是解答本题的突破口，将27分解因数是解答本题的关键.

【典例7】 已知 $y=\sqrt{x-2}+\sqrt{2-x}+5$，求 $x+y$ 的值.

分析 由已知条件 $y=\sqrt{x-2}+\sqrt{2-x}+5$，可推断出$\sqrt{x-2}$和$\sqrt{2-x}$都是有意义的，从而可求得 x 的值，进而可求出 y 值.

解析 由题意，得$\begin{cases}x-2\geqslant0,\\2-x\geqslant0,\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}x\geqslant2,\\x\leqslant2.\end{cases}$ $\therefore x=2$. 当 $x=2$ 时，$y=\sqrt{x-2}+\sqrt{2-x}+5=\sqrt{2-2}+\sqrt{2-2}+5=5$.

$\therefore x+y=2+5=7$.

【点评】 本题考查平方根的性质及转化的数学思想，仔细观察已知式子，可根据被开方数为非负数这一隐含条件求出 x 的值，进而求解.

提分点4 科学记数法及有效数字

1. 科学记数法的两个规定：科学记数法即把一个数表示成 $a\times10^n$ 的形式，其中 $1\leqslant|a|<10$，n 是整数. 在这个定义中，有两个严格的规定：(1) $1\leqslant|a|<10$；(2) n 是整数. 因此，使用科学记数法时，一定要注意这两点规定.

算，如求$\sqrt{16}$的算术平方根，解这道题，首先算出$\sqrt{16}=4$，再求4的算术平方根，答案为2.

点拨

算术平方根、平方根和立方根三者出现在一起命题，符号的确定和数值的计算都很容易混淆，牢牢抓住定义分别求解是准确解答这类题的关键.

拓展

使$\sqrt{27n}$是整数的 n 值有无数多个，大家不妨对 n 的取值进行研究，加深对算术平方根的概念的理解.

技巧

根据只有非负数才有平方根，在算术平方根问题中，当被开方数互为相反数时，只有它们都等于0时这两个式子才有意义，根据这个特点，我们可以列出不等式组，从而求出这个不等式组的解集.

小贴士

科学记数法的表达形式是 $N=a\times10^n$，这里 $1\leqslant|a|<10$，若 $|N|\geqslant10$，则 $n=N$ 的整数位数减1；若 $0<|N|<1$，则 n

是一个负数，其绝对值等于N的第一个有效数字前面0的个数(包括小数点前面的0).

提分支招

进行用科学记数法表示的$a\times10^{m}$与$b\times10^{n}$型的乘、除运算时，要先将a与b及10^{m}与10^{n}分别乘、除，最后的结果也必须用科学记数法表示.本题中的运算属于同底数幂相乘，可根据底数不变，指数相加直接得出结果.

链接

解决这类问题要正确理解近似数和有效数字的概念，精确度的形式有两种：(1)精确到哪一位；(2)保留几个有效数字.用科学记数法表示的数的有效数字的位数，只看乘号前的部分即可.

小贴士

定义运算的符号往往各式各样，但其本身没有意义，仅仅用来定义"运算"，包括运算的法则及顺序，所以不要被各种符号所迷惑.事实上，新运算归根结底还要转换为基本的运算来求解，准确掌握我们所学的六种基本运算是解题的关键.

提分锦囊

新定义运算的试题，是近年中考常考的阅读理解题型之一，解题的基本步骤是"阅读—分析—理解—应用"，其

2. 有效数字的确定： 从一个数的左边第一个非零数字起，到末位数字止，所有的数字都是这个数的有效数字.这个定义是对常见的十进制数而言的.对于科学记数法表示的数，有效数字由a中的有效数字决定；对于"中国式记数"，如2.4万，其有效数字也只在2.4这类纯数字中确定.

【典例8】 据测算，人们一年接受的宇宙射线及其他天然辐射照射量约为3 100微西弗(1西弗等于1 000毫西弗，1毫西弗等于1 000微西弗)，3 100微西弗用科学记数法可表示为 ( )

A. 3.1×10^{6}西弗　　B. 3.1×10^{3}西弗

C. 3.1×10^{-3}西弗　　D. 3.1×10^{-6}西弗

分析 题中已知数量的单位是微西弗，而结果是西弗，因此，需要先进行单位换算，然后通过计算求得答案.

解析 C 由题意，可得1微西弗$=10^{-6}$西弗，因此，3 100微西弗$=3.1\times10^{3}\times10^{-6}$西弗，进一步化为科学记数法的形式为$3.1\times10^{-3}$西弗，故答案选C.

【点评】 考查科学记数法的试题中涉及单位换算、数的计算等多个知识点时，要先进行单位换算，然后进行数的计算，最后把结果写成科学记数法的形式.

【典例9】 我国人均淡水资源为世界人均量的四分之一，但是我国目前浪费水的现象仍然十分严重.假若每人每天浪费水0.32升，那么13.4亿人每天浪费的水量保留两个有效数字用科学记数法可表示为________升.

分析 先计算全国所有人每天浪费水的体积，即求0.32与13.4亿的积，然后把所得结果保留两个有效数字并用科学记数法的形式表示.

解析 4.3×10^{8}　$0.32\times1\ 340\ 000\ 000=428\ 800\ 000\approx4.3\times10^{8}$.

【点评】 本题综合考查了数的计算、科学记数法、近似数与有效数字等多个知识点，而且还涉及"中国式记数"与十进制数的转换，保留有效数字并用科学记数法表示一个数时，通常是先写出这个数的近似数，再用科学记数法表示.

提分点5 实数运算中的新定义问题

1. 理解定义，弄清算法： 新定义问题即先给出实数新运算的定义及运算法则，然后付之应用.对于实数运算中的新定义问题的解决，可概括为一句话，即"依葫芦画瓢".这类题有的学生比较害怕，原因是感觉陌生，但是，试题本身的难度并不大，只要认真审题，理解新定义的运算法则，弄清其中的算法，依此算法计算即可得到答案.

2. 依据算法，准确计算： 准确定位定义中各字母或者数值的位置，把具体数值代入到定义的运算中进行运算时，切不可放错位置，计算时一定要细心，防止出错.

【典例10】 定义运算：$a\otimes b=a(1-b)$，下面给出了关于这种运算的几个结论：

①$2\otimes(-2)=6$；②$a\otimes b=b\otimes a$；③若$a+b=0$，则$(a\otimes a)+(b\otimes b)=2ab$；④若$a\otimes b=0$，则$a=0$.

其中正确结论的序号是________.(在横线上填上你认为所有正确结论的序号)

分析 按照定义的运算，分别对四个算式进行验证，然后作出选择.

解析　①③　在①中，$2\otimes(-2)=2\times[1-(-2)]=2\times3=6$，故①正确；在②中，$b\otimes a=b(1-a)=b-ab$，$a\otimes b=a-ab$，故②不一定正确；在③中，$(a\otimes a)+(b\otimes b)=a(1-a)+b(1-b)=a-a^2+b-b^2=a+b-(a^2+2ab+b^2)+2ab$，因为 $a+b=0$，所以 $a+b-(a^2+2ab+b^2)+2ab=a+b-(a+b)^2+2ab=2ab$，故③正确；在④中，若 $a\otimes b=a(1-b)=0$，说明 a 与 $(1-b)$ 两个因式中至少有一个因式为0，但并不能确定 $a=0$，故④不正确.

【点评】　弄清算法之后，直接根据算法计算每个算式即可作出判断，计算的时候要防止出错.

【典例 11】　对实数 a、b，定义运算"⊗"如下：$a\otimes b=\begin{cases}a^b(a>b,a\neq0),\\a^{-b}(a\leqslant b,a\neq0).\end{cases}$ 例如：$2\otimes3=2^{-3}=\frac{1}{8}$. 计算 $[2\otimes(-4)]\times[(-4)\otimes(-2)]=$________.

分析　根据 $2>-4$，$-4<-2$，可将其分别代入新定义运算的两个式子中进行计算，然后求解.

解析　1　原式 $=2^{-4}\times(-4)^2=\frac{1}{16}\times16=1$.

【点评】　本题不是纯粹的新定义运算题，还涉及分类讨论及多重运算问题，计算时要先讨论，再分别计算，最后得出结果.

提分点 6　有关二次根式的运算问题

1. 理解二次根式的"双重非负性"：(1)二次根式条件的非负性. 形如 $\sqrt{a}\,(a\geqslant0)$ 的式子，叫做二次根式. 这个定义用词少，却包含两层意义，其一是形式上有规定，其二是对被开方数有"非负"的限制. (2)二次根式结果的非负性. 即二次根式的结果一定是非负数. 正是二次根式的条件和结果的双重非负性，使得不少学生在解决二次根式的非负性的问题时，因遗漏某一方面而导致出错.

2. 二次根式的运算问题：二次根式的混合运算顺序与实数的运算顺序一样，先乘方，再乘除，最后加减，有括号的先算括号里的，其中，实数运算中的运算律、运算法则及所有的乘法公式，在二次根式的运算中仍然适用. 但在运算过程中，往往会运用二次根式的性质和分母有理化等知识，这就需要大家熟练掌握分母有理化的方法与技巧.

【典例 12】　若实数 a、x 满足 $\sqrt{a-2}+x^2+4=4x$，则 $\frac{x}{a}$ 的值是________.

分析　整理原等式，得 $\sqrt{a-2}+(x-2)^2=0$，由二次根式和完全平方式的非负性，可得 a 与 x 的值，进而可求得答案.

解析　1　整理原等式，得 $\sqrt{a-2}+(x-2)^2=0$，所以 $a=2$，$x=2$，故 $\frac{x}{a}=1$.

【点评】　把等号右边的 $4x$ 移项到左边后，把左边变形为两个非负数之和的形式，此时等号右边等于0，所以两个非负数都只能等

中认真阅读定义是求解的前提条件，分析和理解运算法则并从中提取有价值的数学信息是解题的关键，准确应用提取的信息解题则是重点，解答本类试题，只要遵循这几个关键的步骤，问题就会迎刃而解.

失分警示

本题从表面上看考查的是新定义的运算，实则考查分类讨论的数学思想. 易错点在于读题过程中忽视 $a>b$ 和 $a\leqslant b$ 时对应的运算关系是不同的，从而错误地代入关系式而导致出错.

小贴士

分母有理化的方法与技巧：(1)分母有理化的关键是确定有理化因式，其基本方法为①根据 $(\sqrt{a})^2=a\,(a\geqslant0)$，可知 $\sqrt{a}$ 的有理化因式是 $\pm\sqrt{a}$；②根据平方差公式，可知 $a\pm\sqrt{b}$ 的有理化因式为 $a\mp\sqrt{b}$，$a\sqrt{x}\pm b\sqrt{y}$ 的有理化因式是 $a\sqrt{x}\mp b\sqrt{y}$. (2)分母有理化有时可通过约分来解决.

点拨

解决有关非负数的等式问题，通常先把等式变形为"几个非负数之和等于0"，然后由各个非负数等于0求得各个字母的值，最后求得代数式的值，本题的关键是先移项.

链接

对于含二次根式的函数型问题，首先要由被开方数的非负性求出未知数(自变量)的取值范围，再由自变量的取值范围确定函数的取值范围.

提分锦囊

当分母中含有二次根式时，分子分母同时乘以一个适当的式子(有理化因式)，可将分母中的根号去掉(分母有理化). 如 $\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{1\cdot\sqrt{a}}{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{a}$；$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{1\cdot(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$.

小贴士

在解决一些较为复杂的代数式的求值问题时，比如代数式中含多个字母，或代数式中某个字母次数较高时，无法按常规的化简求值的方法求得，就需要仔细观察代数式的特点，采用一些技巧性方法来解决.

点拨

本题运用了代数式求值的整体策略，该类试题的特点是对所求的代数式中的不同项进行恒等变形，将其化为与所给的已知条件中的字母相一致的形式.

于0，从而求得 a 与 x 的值.

【典例13】 已知 $y=2+3\sqrt{2x-1}$，则 x 的取值范围是____，y 的取值范围是____.

分析 由二次根式的定义得，$2x-1\geqslant0$，从而求得 x 的取值范围，再由二次根式的非负性，得 $\sqrt{2x-1}\geqslant0$，从而求得 y 的取值范围.

解析 $x\geqslant\frac{1}{2}$ $y\geqslant2$ 由二次根式的定义得，$2x-1\geqslant0$，$x\geqslant\frac{1}{2}$；再由二次根式的非负性，得 $\sqrt{2x-1}\geqslant0$，所以 $y\geqslant2$. 所以 x 的取值范围是 $x\geqslant\frac{1}{2}$，y 的取值范围是 $y\geqslant2$.

【点评】 本题涉及二次根式的双重非负性，前一空考查二次根式被开方数的非负性，后一空考查二次根式结果的非负性.

【典例14】 当 $x=2$，$y=3$ 时，求代数式 $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ 的值.

分析 所求代数式不是最简二次根式，可先进行化简，再代入求值.

解析 原式 $=\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}-\frac{\sqrt{y}(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}=\frac{x+\sqrt{xy}-\sqrt{xy}+y}{x-y}=\frac{x+y}{x-y}$.

当 $x=2$，$y=3$ 时，原式 $=\frac{2+3}{2-3}=-5$.

【点评】 本题考查二次根式的化简求值，解题的关键是分母有理化，本题也可将 $x=2$，$y=3$ 直接代入所求代数式，再进行化简求值.

提分点7 代数式的求值策略

在进行代数式的求值运算时，如果代数式本身比较简单，代数式中所给的未知字母的值也比较简单，且题目没有特殊要求时，可直接将未知数的值代入代数式中，进而求出代数式的值. 如果代数式比较复杂，题目又没有特殊要求，则可考虑先将代数式进行化简，然后代入未知字母的值进行求值，若题目有特殊要求，则要严格按照题目中的要求进行求值运算，以上为常用的求代数式值的方法，除了掌握常用的方法外，还应仔细观察所求代数式和未知字母值的特点，根据特点寻找解题的策略，中考中几种常见的技巧性策略有：整体策略、部分策略、取特殊值策略.

【典例15】 已知：$m-n=-2$，求 $2(m-n)-m+n+7$ 的值.

分析 已知 $m-n=-2$，要求 m，n 的具体值，显然行不通，注意到 $-m+n=-(m-n)$，故可采用整体代入法求值.

解析 $\because m-n=-2$，$\therefore$ 原式 $=2(m-n)-(m-n)+7=(m-n)+7=-2+7=5$.

【点评】 合理地添加括号，对所求代数式进行恒等变形，可使所求的代数式与已知条件之间的关系更加清晰，为求值带来了极大的便利，并且节省了答题时间，提高了解题的准确性.

【典例16】 已知 $a^2+a-1=0$，求代数式 a^3+2a^2+8 的值.

分析　本题的已知条件为 $a^2+a-1=0$，可用求根公式求出 a 的值，然后将 a 的值代入代数式 a^3+2a^2+8 中进行求值，这是最常规的解题策略，本题中 a 的值比较复杂，并且所求代数式是关于 a 的三次多项式，计算过程也比较复杂，极易出错，若将已知条件 $a^2+a-1=0$ 变形为 $a^2=1-a$ 的形式，部分代入，则可收到意想不到的效果.

解析　$\because a^2+a-1=0$，$\therefore a^2=1-a$. 原式 $=a\cdot a^2+2a^2+8=a(1-a)+2a^2+8=a-a^2+2a^2+8=a^2+a+8=1-a+a+8=9$.

【点评】　本题根据所求代数式的特点，巧妙地将所给的已知条件进行变形，使得问题变得极其简单，要认真体会这种解题策略的精巧之处.

【典例 17】　设 $a+b+c=0$，$abc>0$，$\frac{b+c}{|a|}+\frac{c+a}{|b|}+\frac{a+b}{|c|}$ 的值是　　（　　）

A. -3　　B. 1　　C. 3 或 -1　　D. -3 或 1

分析　本题由已知条件不易确定 a、b、c 的符号，故可取特殊值代入计算. 也可按一般的方法进行推理计算，得出答案.

解析　B　方法一：因为 $a+b+c=0$，$abc>0$，所以可设 $a=2$，$b=c=-1$，则 $\frac{b+c}{|a|}+\frac{c+a}{|b|}+\frac{a+b}{|c|}=\frac{-2}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}=1$，应选 B.

方法二：由 $a+b+c=0$，$abc>0$，可知 a、b、c 三个数中，必有两数为负数，一数为正数，不妨设 a、b 为负数，c 为正数，则原式 $=\frac{-a}{|a|}+\frac{-b}{|b|}+\frac{-c}{|c|}=\frac{-a}{-a}+\frac{-b}{-b}+\frac{-c}{c}=1+1-1=1$.

【点评】　在取特殊值时，首先，所取的特殊值一定要满足题设条件，如本例中 a、b、c 的取值既要满足 $a+b+c=0$，又要满足 $abc>0$；其次，字母取值的绝对值尽可能小且尽可能为整数，以使运算更加简便.

提分点 8　幂的运算性质及灵活应用

1. 理解并记忆 7 个幂的公式：①同底数幂乘法：$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$（m、n 都是正整数）；②幂的乘方：$(a^m)^n=a^{mn}$（m、n 都是正整数）；③积的乘方：$(ab)^n=a^nb^n$（n 是正整数）；④商的乘方：$(\frac{a}{b})^n=\frac{a^n}{b^n}$（$b\neq0$，$n$ 是正整数）；⑤同底数幂除法：$a^m\div a^n=a^{m-n}$（$a\neq0$，m、n 都是正整数，且 $m>n$）；⑥零指数幂：$a^0=1$（$a\neq0$）；⑦负整数指数幂 $a^{-p}=\frac{1}{a^p}$（$a\neq0$，p 是正整数）.

2. 幂的运算方法：涉及幂的运算，遵循“一看”，“二定”，“三计算”的策略，即首先看算式，然后确定属于哪种幂的运算，最后依公式计算，只有如此，才能快速准确地答题.

3. 幂的大小比较技巧：(1) 所给幂的底数相同、指数不同时，比较幂的大小，只需比较指数的大小即可. (2) 所给幂的指数、底数均不相同，且指数较大时，可利用幂的乘方性质化为同指数的幂，根据底数大小比较幂的大小.

【典例 18】　下列运算正确的是　　（　　）

A. $2y^{-2}=\frac{1}{4y^2}$

B. $(-x)^{-2}\div(-x)^{-4}=x^2$

对比

部分策略是建立在整体策略基础上的一种解题策略，整体策略重点是对所求的代数式进行恒等变形，而部分策略不仅要对所求代数式进行恒等变形，同时还要对已知条件进行恒等变形，进而建立两者之间的联系.

点拨

与整体策略和部分策略不同，取特殊值策略是另外一种实用性极强的解题策略，该类题目不仅需要观察所给代数式的特点，还应充分研究所给的已知条件，更重要的是在取特殊值时，一定要确保所取的值满足所给的已知条件，这是采用此种解题策略的先决条件.

提示

一道题中包含多个幂的运算时，要分清每种运算属于 7 种运算中的哪一种，然后对每个算式按照运算法则逐一计算，切不可因为多种幂的运算混合而出错.

注意

对于判断运算是否正确的试题，一要正确把握公式

和法则的本质特征;二要防止理解上的偏见,犯形式主义的错误;三要注意解题顺序的规范化.

提分锦囊

比较几个正数幂的大小有两种方法:(1)把它们化成同底数幂,当0<底数<1时,指数越大,幂越小;反之,当底数>1时,指数越大,幂越大.(2)把它们化成指数相同的幂,此时底数越大,则幂越大.

小贴士

对于分式的化简求值题,不能认定一种固定的方法,至于具体该选择哪种方法,应该根据具体的题目来定,哪种方法简便易行,就选择哪种方法,即选择合适的方法运算.

失分警示

解答分式问题时,一定要牢记"分母不为0"和"除数不为0"这两个原则性要求.同时,在分式化简时,一定要根据分式的形式,恰当地选择究竟是该"先展开,后化简",还是"先化简,后展开",适当的方法往往会事半功倍.

C. $(-2x^{-2}y^{-3})^{-2}=4x^4y^6$

D. $(x^2y^{-3})\cdot(-x^{-1}y^2)^4=-xy^2$

分析 本题综合了幂的运算与整式的乘除法,要作出正确的判断,只能"按部就班",对每个运算式进行计算,直到选出正确的选项为止.

解析 B $2y^{-2}=\frac{2}{y^2}$,因此A错误;$(-x)^{-2}\div(-x)^{-4}=(-x)^{-2-(-4)}=x^2$,因此B正确;$(-2x^{-2}y^{-3})^{-2}=(-2)^{-2}(x^{-2})^{-2}\cdot(y^{-3})^{-2}=\frac{x^4y^6}{4}$,因此C错误;$(x^2y^{-3})^2\cdot(-x^{-1}y^2)^4=x^4y^{-6}\cdot x^{-4}y^8=y^2$,因此D错误.

【点评】 本题主要考查幂的运算及整式的乘除法运算,其中负整数指数幂的运算很容易出错,需要仔细理解运算法则.

【典例19】 3^{50}、4^{40}、5^{30}的大小关系是 ( )

A. $3^{50}<4^{40}<5^{30}$ B. $5^{30}<3^{50}<4^{40}$

C. $5^{30}<4^{40}<3^{50}$ D. $4^{40}<5^{30}<3^{50}$

分析 3^{50}、4^{40}、5^{30}三个数的指数和底数均不同,要比较大小,可先化为同指数幂进行比较.

解析 B $3^{50}=(3^5)^{10}=243^{10}$,$4^{40}=(4^4)^{10}=256^{10}$,$5^{30}=(5^3)^{10}=125^{10}$,因为$125<243<256$,所以$5^{30}<3^{50}<4^{40}$,故选B.

【点评】 本题考查幂的大小比较,观察发现,50、40、30都是10的倍数,可把3^{50}、4^{40}、5^{30}的指数写成10与另一个因数的乘积的形式,再逆用幂的乘方法则转化为指数相同的幂的大小比较.

提分点9 分式化简求值中的技巧问题

1. 常规分式的化简求值:对于一般的分式的化简求值题,常规的解题思路是先化简,再代入求值,或者直接将数值代入,再进行化简求值.分式的化简往往考查因式分解、约分、通分等多种运算,所以,同学们平时需要加强这些基本运算的训练.

2. 条件分式求值的常用技巧:对于给出一些限定条件的分式的求值问题,常用的解题技巧有以下两种:(1)参数法.当已知条件形如$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$,所要求值的代数式是一个含$x$、$y$、$z$、$a$、$b$、$c$而又不易化简的分式时,通常设$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=k$($k$就是我们通常所说的参数),然后将其变形为$x=ka$,$y=kb$,$z=kc$,再代入所求代数式化简求值.(2)整体代入法.观察所要求值的代数式,把已知条件变形成适合化简所求代数式的形式,然后整体代入,化简求值.

【典例20】 先化简$\left(\frac{x}{x-5}-\frac{x}{5-x}\right)\div\frac{2x}{x^2-25}$,然后从不等式组$\begin{cases}-x-2\leqslant 3,\\2x<12\end{cases}$的解集中,选取一个你认为符合题意的整数$x$的值代入求值.

分析 因为括号内可以变形为同分母分式相加减,因此可选择"先加减,后展开"的方法化简.在求出不等式组的解集后,选择x的值时,要避免选择使"分母为0"和"除数为0"的数值.

解析 原式$=\frac{2x}{x-5}\cdot\frac{(x+5)(x-5)}{2x}=x+5$.

解不等式组$\begin{cases}-x-2\leqslant 3,\\2x<12\end{cases}$得$-5\leqslant x<6$.

因为5,-5,0不符合题意,所以可选择-4,-3,-2,-1,1,2,3,4中的任何一个,代入$x+5$求值即可(答案不唯一).

【点评】 这道题中,学生容易判断出x的值不能取5和-5,而忽视0,事实上,当$x=0$时,除数为0,这一点一定要引起高度重视.

【典例21】 已知$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=4$,则$\frac{a-3ab+b}{2a+2b-7ab}=$______.

分析 观察分式,本题适合运用整体代入法求解,可先将条件变形为$a+b=4ab$,把$a+b$作为整体代入求解.

【解析】 1 因为$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=4$,所以$\frac{a+b}{ab}=4$,即$a+b=4ab$,所以,原式$=\frac{4ab-3ab}{2\times4ab-7ab}=\frac{ab}{ab}=1$.

【点评】 在有关分式的求值时,把注意力和着眼点放在问题的整体结构上,把一些密切联系的相关代数式作为一个整体来处理,能收到事半功倍的效果.

拓展

本题也可利用分式的基本性质,将分式的分子、分母同除以ab,得到关于$(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})$的表达式,再用整体代入法进行求值.

提分点10 数与式的规律探索题

1. 数字中的规律探索:数字规律主要是指一组排列的数字之间形成某种规律,这种规律通常与数字序号有着密切的关系,可将每个数字与其序号放在一起进行比较分析,找出规律,归纳出一般性结论. 其解题策略是:由特例观察、归纳—猜想、揭示一般规律—试验或证明猜想.

2. 式子中的规律探索:式子的规律本质上依然是数的规律,此类题目包含数式类规律探索题,幂类规律探索题,数阵类规律探索题. 解决该类问题的关键是通过化简或者运用其他手段把式子变形成有规律的代数式或等式,最后对找出的规律加以验证.

小贴士

无论是数的规律,还是式的规律,本质上都是探索一种函数关系,该函数的自变量是正整数,数或式与顺序号之间的函数关系即为规律.

【典例22】 如下数表是由从1开始的连续自然数组成的,观察规律并完成各题的解答.

1

2 3 4

5 6 7 8 9

10 11 12 13 14 15 16

17 18 19 20 21 22 23 24 25

26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36

…

(1)表中第8行的最后一个数是______,它是自然数______的平方,第8行共有______个数;

(2)用含n的代数式表示:第n行的第一个数是______,最后一个数是______,第n行共有______个数;

(3)求第n行各数之和.

提分支招

数表中每一行的第一个数依次是1,2,5,10,17,26,…,每一行的最后一个数依次是1,4,9,16,25,36,…,分别与序号1,2,3,4,5,6,…联系起来进行对比,不难发现其规律分别是$(n-1)^2+1$,n^2. 发现这个规律是解决本题的关键,同时也是求解第(3)题的基础.

分析 观察各行的最后一个数,发现其是正整数的平方,因此,第(1)、(2)小题都容易解决;对于第(3)小题,至少有两种方法可用,第一种方法是依次表示出前几行各数之和,然后找规律,并用规律计算第n行各数之和,第二种方法是直接写出第n行的各个数字,直接求和.

【解析】 (1)64 8 15

(2)$(n-1)^2+1$ n^2 $(2n-1)$

(3) 方法一:第1行可表示为1×1;第2行各数之和等于3×3;第3行各数之和等于5×7;第4行各数之和等于7×13;类似地,第n

点拨

找到各行最后一个数与该行的行数的关系是解决本题的关键,对于第(3)小题,在第(2)小题的基础上很容易让

人想到求第n行所有数的和，但要注意在求和的过程中，第n行数字的个数为$2n-1$，以免计算出错.

提示

本题第(3)小题中，所设的奇数的表示方法不同，证明过程也不尽相同，本题所设的形式，在证明过程中需要分类讨论. 也可把两个奇数设为$(2n+3)$，$(2n-1)$，这样证明过程就简化了.

提分支招

解答此类问题的常用方法：(1)如果所给等式或代数式的形式不统一，先将每个等式或代数式化为统一的形式；(2)按规律顺序排列这些式子；(3)将发现的规律用等式或代数式或文字表示出来；(4)验证规律的正确性.

行各数之和等于$(2n-1)(n^2-n+1)=2n^3-3n^2+3n-1$.

方法二：第n行各数分别为$(n-1)^2+1,(n-1)^2+2,(n-1)^2+3,\cdots,(n-1)^2+2n-1$，共有$(2n-1)$个数，它们的和等于$(2n-1)\cdot(n^2-n+1)=2n^3-3n^2+3n-1$.

【点评】 此类题目的设计体现了引导学生发现规律的特点，提供的数表可供同学们发现数字之间的特征，在问题的设计上也是层层递进，逐步引导学生通过观察、分析、比较、探究来解决问题.

【典例23】 小明写了三个算式：$5^2-3^2=8\times2$，$9^2-7^2=8\times4$，$15^2-3^2=8\times27$，小华接着又写了两个具有同样规律的算式：$11^2-5^2=8\times12$，$15^2-7^2=8\times22$，…

(1)请你再写出两个(不同于上面算式)具有上述规律的算式；

(2)用文字写出反映上述算式的规律；

(3)证明这个规律的正确性.

分析 小明和小华写的五个式子的形式，已是统一的形式，观察式子中的数字规律，可以发现任意两个奇数的平方差是8的整数倍，于是要解答的三个问题就迎刃而解了.

解析 (1)答案不唯一. 如：$13^2-11^2=8\times6$，$15^2-13^2=8\times7$等.

(2)任意两个奇数的平方差是8的倍数.

(3)证明：设m、n为整数，则两个奇数可表示为$2m+1$、$2n+1$.

则$(2m+1)^2-(2n+1)^2=4(m-n)(m+n+1)$.

当m、n同为奇数或偶数时，$(m-n)$一定为偶数，所以$4(m-n)$一定是8的倍数；

当m、n为一奇一偶时，$(m+n+1)$一定为偶数，所以$4(m+n+1)$一定是8的倍数.

综上：任意两个奇数的平方差是8的倍数.

【点评】 探索式的规律分两步进行，首先看"形"，即式的形式，如果式的形式不统一，需要通过化简等变形手段进行变形；然后看"数"，即发现数字之间的规律，通过数字之间的规律即可反映式所反映的规律.

解题速训

1. 下列运算正确的是 ( )

A. $a^3\cdot a^3=2a^3$　　B. $a^3+a^3=a^6$

C. $(-2x)^3=-6x^3$　　D. $a^6\div a^2=a^4$

2. 设$m=\sqrt{50}-\sqrt{8}$，则m的取值范围是 ( )

A. $4<m<5$　　B. $5<m<6$

C. $30<m<40$　　D. $40<m<50$

3. A、B、C、O四点所表示的数分别为a、b、c、0. 根据图1-4中各点的位置，下列各数的绝对值的比较错误的是 ( )

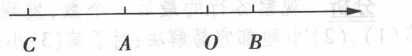

图1-4

A. $|a|<|c|$　　B. $|b-c|<|c|$

C. $|a|>|b|$　　D. $|a-b|>|a|$

4. 已知$x-2y=-2$，则$3-x+2y$的值是 ( )

A. 0　　B. 1　　C. 3　　D. 5