

热传导问题的有限元分析

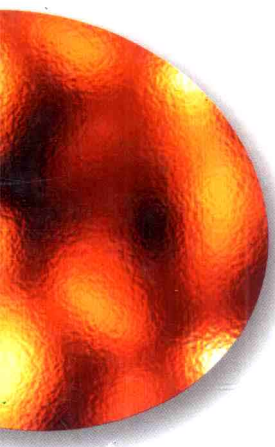
黄厚诚 王秋良 编著

Heat Transfer
Finite Element Analysis



科学出版社

(O-4277.0101)



热传导问题的 有限元分析

www.sciencep.com

ISBN 978-7-03-031071-2



9 787030 310712 >

定价：45.00 元

热传导问题的有限元分析

Heat Transfer Finite Element Analysis

黄厚诚 王秋良 编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书主要介绍了有限元方法解决热传导问题的基本理论和在各种不同传热问题中的应用,重点介绍了有限元在空间和时间坐标上的离散问题.基于有限元方法的强大功能,介绍了应用有限元方法解决相变、传热与对流和复杂磁体等传热问题的分析例子.为了提高计算精度,本书介绍了自适应网格分析技术.另外,本书还提供了两个有限元计算程序,便于读者学习和参考.

本书适合于从事传热问题研究的工程技术人员、研究人员和高等院校的教师参考,也可供高等院校相关专业的研究生和高年级大学生作为教材使用.

图书在版编目(CIP)数据

热传导问题的有限元分析: Heat Transfer Finite Element Analysis/黄厚诚,王秋良编著. —北京:科学出版社,2011

ISBN 978-7-03-031071-2

I. ①热… II. ①黄… ②王… III. ①热传导—有限元分析 IV. ①O551.3
②O241.82

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第088989号

责任编辑:钱俊 张静/责任校对:朱光兰
责任印制:钱玉芬/封面设计:耕者设计工作室

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

双青印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011年5月第一版 开本: B5(720×1000)

2011年5月第一次印刷 印张: 10 1/4

印数: 1—2 000 字数: 194 000

定价: 45.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

本书系统地介绍了有限元法分析热传导问题的方法及在实际工程中的应用. 讨论限于固体和流体中扩散和对流型热传导问题. 本书将从热传导的角度介绍有限元法 (FEM), 其目的是给从事传热研究的工程技术人员提供相关理论和实际应用参考. 同时也介绍了在实际工程中如何利用高级有限元法分析解决热传导问题, 并给出基本理论和分析的细节, 包括两个 FORTRAN 程序. 此外, 除了基本的热传导概念之外, 也提出了一些现代分析方法以提高传统方法的精度和速度.

本书介绍了大量的工程计算实例以体现有限元分析的强大计算分析功能, 同时尽量使其对于工程类研究生和本科生易于理解. 本书可以让初学者掌握有限元法, 当然, 也有足够深度的内容让有经验的从业者受益.

本书前 4 章包括热传导问题的基本概念、基本方程, 并逐步介绍了有限元法. 后 4 章提出了专题讨论、相变、自适应性和对流/平流以及超导磁体工程中的一些传热问题等. 最后, 两个附录给出了 HEAT2D 和 HADAPT 程序的完整细节及完整的用户命令和文档示例. HEAT2D 程序能够分析稳态/瞬态、线性/非线性、扩散/对流类型的热传导问题. HADAPT 是 HEAT2D 的改进版, 包括误差估计、任意几何体的三角形和四边形单元无结构网格生成.

如读者需要相关的程序和输入数据文件完整代码, 可向作者索取.

黄厚诚 王秋良

2009 年 10 月于北京

qiuliang@mail.iee.ac.cn

qiuliangw@hotmail.com

目 录

前言

第 1 章 传热问题数值分析概述	1
1.1 热传导数值分析的意义	1
1.2 有限元热传导分析的可靠性	1
1.3 各种热传导问题	2
1.4 本书目标和安排	2
参考文献	3
第 2 章 基本微分方程	5
2.1 概述	5
2.2 热传导	5
2.2.1 各向同性材料的傅里叶定律	5
2.2.2 各向异性材料的傅里叶定律	7
2.2.3 热传导的控制方程	10
2.2.4 初始条件和边界条件	11
2.3 对流	11
2.4 热辐射	14
参考文献	15
第 3 章 有限元方法	16
3.1 引言	16
3.2 变分原理和 Rayleigh-Ritz 方法	19
3.3 伽辽金加权残数法	23
3.4 二维问题的有限元方法	26
3.4.1 介绍	26
3.4.2 热传导矩阵和载荷矢量	27
3.4.3 三角形单元	28
3.4.4 自然坐标系	35
3.4.5 数值积分法	38

3.5	三维问题的有限元方法	40
3.5.1	介绍	40
3.5.2	轴对称传热问题	42
	参考文献	43
第 4 章	热传导在时间域的离散化	44
4.1	简介	44
4.2	瞬态热传导方程的有限元离散	44
4.3	递推关系	46
4.3.1	广义梯形法和中间点方法系列	46
4.3.2	收敛性	47
4.4	自动时间步长的选择	50
4.5	应用实例	52
	参考文献	54
第 5 章	相变问题	56
5.1	引言	56
5.2	Stefan 相变问题	57
5.3	相变模拟的数值方法	58
5.3.1	有效比热容	59
5.3.2	热焓法	60
5.3.3	热源法	61
5.4	标准实例	64
5.4.1	解析方法	65
5.4.2	数值解法	67
5.5	结论	70
	参考文献	70
第 6 章	自适应热传导分析	73
6.1	引言	73
6.2	热传导的误差估计	74
6.3	高阶近似	76
6.4	自适应程序的执行	78
6.5	稳态典型实例	79
6.6	瞬态分析	84

参考文献	88
第 7 章 传热中的对流效应	90
7.1 引言	90
7.2 稳态对流扩散	91
7.2.1 稳定对流扩散的 SUPG 方法	92
7.2.2 Petrov-Galerkin 法的典型测试	96
7.2.3 典型问题的自适应法	97
7.3 瞬态对流扩散	99
7.3.1 双曲方程的 Taylor-Galerkin 法	100
7.3.2 Taylor-Galerkin 方法的典型测试	102
7.3.3 Taylor-Galerkin 方法解决耦合对流扩散问题	104
参考文献	106
第 8 章 传热分析在超导磁体工程中的应用	109
8.1 引言	109
8.2 超导磁体的热稳定性	109
8.2.1 热稳定性分析概述	109
8.2.2 绝热稳定化线圈的稳定性	111
8.2.3 移动网格有限元模拟 CICC 导体	114
8.2.4 高温超导薄膜的本征稳定性	117
8.3 热应力问题	119
8.3.1 描述热应力方程	119
8.3.2 轴对称线圈的热应力	122
8.4 应用实例	123
8.4.1 600MHz 核磁共振磁体的热分析	123
8.4.2 分离间隙的高、低温混合磁体的热分析	125
8.4.3 迫流冷却超导磁体的对流与传热	130
8.4.4 高温超导薄膜热稳定性分析	131
8.4.5 超导磁体的热应力分析	133
参考文献	135
附录 A HEAT2D 软件的说明	137
附录 B HADAPT 软件的说明	142

第 1 章 传热问题数值分析概述

1.1 热传导数值分析的意义

数字计算机的出现对数学模拟技术在各个领域中的广泛应用产生了革命性的影响。一些复杂的工程问题，在过去仅仅依赖于粗糙近似计算，现在已经可以做出详细数值模拟。过去几十年来，许多简单的几何形状和边界条件问题一直使用精确的解析方法才能得以解决。但大多数工程上感兴趣的问题涉及的是复杂的几何形状和边界条件的问题。工业产品的成本和质量的控制在很大程度上依赖于产品设计阶段的精确分析，因此，采用数值方法获得实际工程问题的近似解是完全必要的。

许多数值方法已经用来分析热传导问题^[1]。虽然一些方法在数字计算机出现之前就已经在使用，但是，这些方法的计算过程较为复杂。自从计算机出现以来，有限差分法 (FDM) 和有限元法 (FEM) 是普遍使用的数值分析方法，并在实际工程中获得了极大的成功。有限差分法有很多优点，特别是它在概念上比较简单和易于实现。有限差分法直接应用于微分方程，通过差分表达式对微分进行近似求解。然而，有限差分法的限制是求解区域要划分成直线单元。因此，对于许多问题，边界必须进行近似，网格分割必须规则。而有限元法不受这些条件的限制，真正能够对区域边界进行精确模拟。如果必要的话，可把求解区域划分成一系列简单非交叉的各种尺寸的面积单元或体积单元。这些单元的边界可以是直线或曲线，微分方程中的场量根据选择的插值函数在单元内变化。有限元法具有高度的灵活性，或是使用较少单元的高阶插值，或是使用所谓大量单元的线性插值，从而得到精确的结果。由于这些优点，有限元法越来越多地成为分析复杂热传导问题首选的数值分析方法，并具有无可匹敌的求解精度和自适应性，成为当代工程设计的主要工具之一。

1.2 有限元热传导分析的可靠性

正如前面提到的，有限元法在解热传导问题方面具有灵活性，是功能较为强大的数值分析方法之一。然而，有限元法也是一种近似的数值方法，因此，必须精确建立有限元分析模型。解的精度受到多方面相关因素的影响，例如，整个区域网格的

分布特性,瞬态问题时间差分格式,边界条件使用是否合理以及材料性质选择是否得当,等等.建立合理的数值模型,依赖于仔细的分析和实际工程计算经验.如果计算分析模型正确,其结果一般非常可靠,将为设计者提供有价值的参考.然而,如果对计算结果表示怀疑,首先需要分析不可预见的错误和误差的来源.因此,有必要仔细检查计算结果,或根据工程应用实际情况加以判断.一种有益的表述或检查结果的方法是使用高质量图形可视化,对计算结果进行直观表达.因此,对于所有数值方法得到的结果,保持怀疑的心态和批评的观点对计算结果加以分析是很重要的.

使用各种标准的解析解,可以测试不同的有限元软件,这些解析解是检测有限元结果是否正确有效方法,这些标准解主要由简单几何体构成问题的精确解析解导出.一些热传导问题的标准测试可以由主流的出版物上的例子得到,如 NAFEMS^[2]等.

1.3 各种热传导问题

工程上,热传导问题构成了一个大的种类.这些问题跨越了许多工程学科,包括土木工程、机械、化学、电气和航空航天工程等.所有各方面的热传导问题的详细讨论超越了本书的范围.本书的主要目的是使用有限元法提供基本热传导分析技术,这些技术可以获得广泛的应用.

本书不特指任何特殊的应用,而是提供给读者/用户一种手段,使他们能够求解大量不同的热传导问题,其中的一些如下所列:

- (1) 不同边界条件的固体内的热传导: ①固定温度; ②固定热通量; ③依赖于对流热传导系数的对流热通量; ④辐射.
- (2) 凝固和熔化(相变)问题.
- (3) 对流热传导.

1.4 本书目标和安排

本书的主要目标如下所列:

- (1) 热传导问题的基本方程;
- (2) 有限元法的背景和基本理论;
- (3) 有限元法实现基本方程的空间和时间离散的一般过程;

- (4) 处理相变问题的特殊技术;
- (5) 标准解析解作为基准测试, 验证数值技术;
- (6) 扩展基本有限元法到包括基于误差估计的自适应性分析;
- (7) 探讨采用标准 FEM 求解强迫对流问题时遇到的困难, 及怎样去克服;
- (8) 对实际工程应用给出一些应用实例;
- (9) 提供了一套完整的软件及代码文档集, 有测试例, 覆盖了本书中大多数主题.

本书根据上述目标安排章节. 第 2 章主要介绍如何建立不同形式热传导问题的基本微分方程, 以及如何施加各种边界条件.

第 3 章向读者介绍有限元法的数学背景, 进一步解释了基本概念. 使用前面建立的基本原则, 举例说明热传导基本方程的空间离散. 瞬态问题 (时间相关) 的时域离散在第 4 章讨论. 同时第 4 章还对热传导问题使用的各种方案进行了讨论.

第 5 章描述了用来求解相变问题的特殊数值技术. 这些技术通过比较冷冻和熔化的解析解进行评估. 在区域场变量存在较高的梯度时, 为了得到较精确的结果, 有必要在求解区域使用非常细的网格. 相反, 在求解区域剩余的部分场变量变化很平坦, 只要粗糙的网格就够了. 这些高梯度区域并不总是可预测的, 并且存在于瞬态问题之中, 这些区域并没有限定于特定的区域. 因此, 如果采用固定的精细网格求解此类问题, 求解代价会较高. 对于这样的问题, 基于估计离散误差的自适应性分析技术是较经济的解决方案, 用该技术求解热传导问题将在第 6 章介绍.

在分析热传导问题中, 当对流是传导的主要模式时, 传统的伽辽金形式的有限元法并不完全适合. 几种对传统方法改进的技术用来模拟对流问题, 并成功地用于此类问题的分析. 这些技术将在第 7 章中讨论. 在第 8 章中讨论了使用有限元方法解决超导磁体的实际工程问题.

附录描述了本书中的软件. 说明了定义的主要变量. 给出了 HEAT2D 和 HADAPT 程序完整的用户指令. 每个程序给出了几个文档示例, 以便于用户熟悉软件. 附录 A 介绍了 HEAT2D 程序. 附录 B 介绍了 HADAPT 程序, 是 HEAT2D 的改进版, 包含了误差估计子程序, 以及任意几何体的三角形和四边形单元无结构网格生成.

参 考 文 献

- [1] Minkowycz W J, Sparrow E M, Schneider G E, et al. Handbook of Numerical Heat Transfer. New York: John Wiley and Sons, Inc, 1988.

- [2] Barlow J, Davies G A O. Selected FE benchmarks in structural and thermal analysis. Technical Report FEBSTA REV 1, NAFEMS, 1986.

第 2 章 基本微分方程

2.1 概 述

众所周知,当物质被加热时,温度就会升高,所以热是一种能量.英国科学家 J.P.Joule(1818~1889)在一次著名的实验中已经证明了这一点.热能的传递有几种不同的方式.热总是由温度高的地方流向温度低的地方,热传递有三种基本方式,即传导、对流和辐射.

如果把金属棒一端放入火中,最终你会发现棒的另一端也会变热.热通过金属传递.这种传热的方式叫传导.受热物体的分子能量增加,并把能量传递到与其相邻的分子,相邻的分子依次传递到下一部分的分子,依此类推.

在流体中,如气体或液体,热传导通过一种称为对流的过程进行.与热源接触的流体膨胀,比包围它冷的外围流体稀薄,流体上升,冷的流体移动到热源位置,接下来又膨胀,上升.结果是,热通过暖流体运动进行传递,即所谓的对流.

热从太阳到达地球,但太空中没有物质进行传导或对流,因此热通过辐射到达.在这种情况下,热仅仅通过另一种形式的电磁波辐射来传递.

2.2 热 传 导

这里,我们不考虑内部结构微观的相互作用.本书的目的仅仅是把热传导当作材料特性来讨论.

2.2.1 各向同性材料的傅里叶定律

考虑一面墙,厚度为 b ,两个表面温度不同,但均为常量,稳态时温度为 T_{w1} 和 T_{w2} ,如图 2.1 所示.由于温度差,在单位时间内流过面积 A 的热量定义为热流率,用 Q 表示.对于这种热量,傅里叶定律有效.

$$Q = \frac{k}{b} A (T_{w2} - T_{w1}) \quad (2.1)$$

式中, k 为热传导系数,表示物质性质.从式 (2.1) 很容易得到

$$k = \frac{Qb}{A(T_{w2} - T_{w1})} \quad (2.2)$$

从而 k 的单位是: $\text{J}/(\text{s}\cdot\text{cm}\cdot^{\circ}\text{C})$ 或 $\text{W}/(\text{cm}\cdot^{\circ}\text{C})$. 单位时间通过表面单位面积的热量叫做热通量, 用 q 表示, 对于 q 下面方程成立:

$$q = \frac{Q}{A} = \frac{k}{b} (T_{w2} - T_{w1}) \quad (2.3)$$

如图 2.1 所示, 如果热传导系数为常量, 墙内温度从 T_{w1} 到 T_{w2} 线性衰减. 然而, 在不稳定加热和冷却过程中, 这种线性关系不存在, 一般热通量会在时间上局部发生变化. 式 (2.1) 仅应用于物体尺寸无限小的情况下. 因此, 式 (2.1) 中温差 $(T_{w2} - T_{w1})$ 由微分 ∂T 代替, 墙的厚度 b 由微分 ∂n 代替, n 是平面元素 dA 的法线. 在这种情况下, 通过表面 dA 的热流量变化率 dQ 的方程为

$$dQ = -k dA \frac{\partial T}{\partial n}$$

方程中的负号表示热流方向指向温度减小的方向, 即温度梯度 $\partial T/\partial n$ 的负方向. 热通量 q_n 微元表示为

$$q_n = -k \frac{\partial T}{\partial n} \quad (2.4)$$

方程 (2.4) 是热传导基本原理的数学表达式, 叫做傅里叶定律, 它表达了热传导与温度的梯度成正比. 对于笛卡儿坐标系下的固体, 分别写出 x 、 y 、 z 方向下的热通量如下:

$$\begin{aligned} q_x &= -k \frac{\partial T}{\partial x} \\ q_y &= -k \frac{\partial T}{\partial y} \\ q_z &= -k \frac{\partial T}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.5)$$

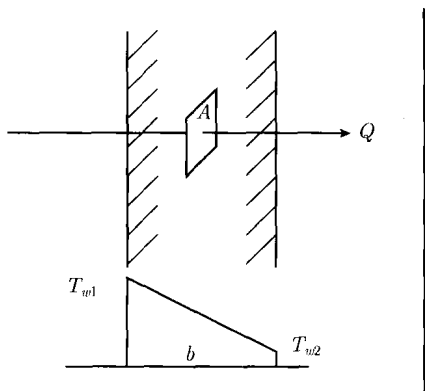


图 2.1 固体壁上的传热

2.2.2 各向异性材料的傅里叶定律

式 (2.5) 仅在各向同性材料下成立. 然而, 有些材料, 如木头、纤维状和晶体物质, 依赖于传导方向. 因此, 更一般形式的各向异性热传导方程的表述指出各个方向的热通量矢量依赖于三个方向的温度梯度.

例如, 对于 x 方向

$$q_x = -k_{11} \frac{\partial T}{\partial x} - k_{12} \frac{\partial T}{\partial y} - k_{13} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2.6)$$

对于 x 、 y 、 $z(x_i)$ 方向, 可以写成

$$q_{x_i} = -k_{i1} \frac{\partial T}{\partial x} - k_{i2} \frac{\partial T}{\partial y} - k_{i3} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2.7)$$

或简写成

$$q_{x_i} = -k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (2.8)$$

式中, 根据下标 j , 重复求解求和. 注意到式中三个热传导分量出现在每个坐标方向上, 热传导系数表达成下面张量形式:

$$k = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

当坐标系 x - y - z 关于原点旋转时, 得到一个新的坐标系 x' - y' - z' . 新的热传导矩阵 K' 写成

$$K' = P^T K P \quad (2.10)$$

式中, P 为方向余弦矩阵

$$P = \begin{bmatrix} \cos(x', x) & \cos(x', y) & \cos(x', z) \\ \cos(y', x) & \cos(y', y) & \cos(y', z) \\ \cos(z', x) & \cos(z', y) & \cos(z', z) \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

实际上, k 是一个二阶张量, 在选择适当坐标系下, 可以变换为对角矩阵形式. 因此

$$P^T K P = \begin{bmatrix} k_\zeta & 0 & 0 \\ 0 & k_\eta & 0 \\ 0 & 0 & k_\xi \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

且有

$$\left. \begin{aligned} q_{\xi} &= -k_{\xi} \frac{\partial T}{\partial \xi} \\ q_{\eta} &= -k_{\eta} \frac{\partial T}{\partial \eta} \\ q_{\zeta} &= -k_{\zeta} \frac{\partial T}{\partial \zeta} \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

(ξ, η, ζ) 是热传导方程在坐标系中的主轴. k_{ξ} 、 k_{η} 、 k_{ζ} 是主热传导系数. 如果 (ξ, η, ζ) 是相互垂直的坐标轴, 那么该材料就是正交各向异性的, 比如木材、合成纤维等. 在这种情况下, \mathbf{K} 矩阵中的 $k_{ij}=0(i \neq j)$, $k_{ii} = k_i$, 也就是说矩阵中的非主对角项都为零, 而主对角项的数值各不相同, 分别代表了该材料在不同方向的热传导系数. 而对于各向同性的材料, $k_{ij}=0(i \neq j)$, $k_{ii} = k$, 也就是非主对角项都为零, 而主对角项的数值全部相同.

为了理解各向异性材料的特性, 我们主要分析两种情况. 假定 (ξ, η) 是热传导系数的主轴, 则有

$$q_{\xi} = -k_{\xi} \frac{\partial T}{\partial \xi}, \quad q_{\eta} = -k_{\eta} \frac{\partial T}{\partial \eta}$$

将 (ξ, η) 坐标轴分别旋转 θ 角度得到 x 、 y 坐标系, 于是有

$$\begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

和

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

于是

$$\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{\xi} & 0 \\ 0 & k_{\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

所以可知

$$\begin{aligned} k_{xx} &= k_{\xi} \cos^2 \theta + k_{\eta} \sin^2 \theta \\ k_{xy} &= k_{yx} = (k_{\xi} - k_{\eta}) \cos \theta \sin \theta \\ k_{yy} &= k_{\xi} \sin^2 \theta + k_{\eta} \cos^2 \theta \end{aligned} \quad (2.17)$$

将方程 (2.17) 代入方程 (2.14) 可得

$$\begin{aligned} q_x &= -(k_{\xi} \cos^2 \theta + k_{\eta} \sin^2 \theta) \frac{\partial T}{\partial x} - (k_{\xi} - k_{\eta}) \cos \theta \sin \theta \frac{\partial T}{\partial y} \\ q_y &= -(k_{\xi} - k_{\eta}) \cos \theta \sin \theta \frac{\partial T}{\partial x} - (k_{\xi} \sin^2 \theta + k_{\eta} \cos^2 \theta) \frac{\partial T}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.18)$$

现在考虑一个正交各向异性的平板, 它的两个表平面的温度分别是 T_1 和 T_2 , 它的热传导系数主轴与坐标轴成 θ 角, 如图 2.2 所示, 其中 $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$, 于是

$$q_y = -(k_\xi \sin^2 \theta + k_\eta \cos^2 \theta) \frac{\partial T}{\partial y} \quad (2.19)$$

也就是

$$k_\theta = k_\xi \sin^2 \theta + k_\eta \cos^2 \theta \quad (2.20)$$

这是一个主轴分别为 $\sqrt{k_\xi}$ 和 $\sqrt{k_\eta}$ 的椭圆函数.

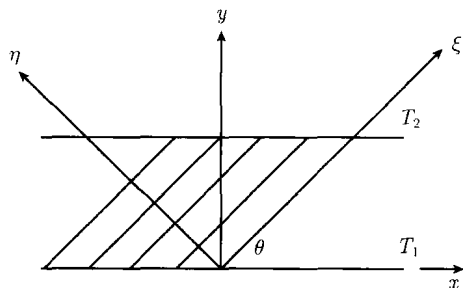


图 2.2 各向异性材料

图 2.3 表明了热传导系数随 θ 角的变化. 这种现象可以通过一个实验来演示, 找一块平板玻璃和一块云母, 将它们一个表面涂上石蜡并在另一表面用蜡烛加热. 几分钟之后就会发现玻璃板上的石蜡融化后呈圆形而云母上的石蜡融化后呈椭圆形^[1].

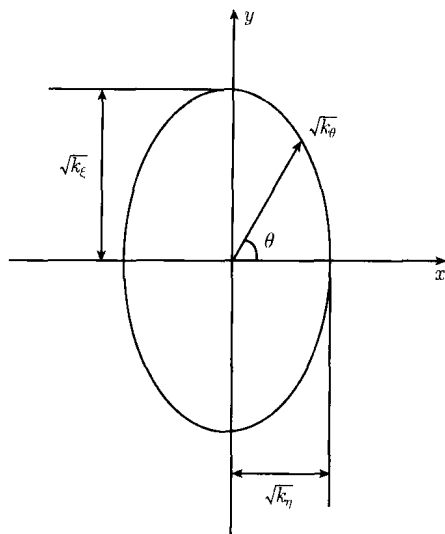


图 2.3 正交各向异性的热传导系数