高等学校教材

高等数学

上册

王嘉谋　石　琳　编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

○ 高等学校教材

高等数学

上册

GAODENG SHUXUE

○ 王嘉谋　石　琳　编著

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容简介

本书是依据最新修订的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，结合作者长期的教学实践和经验编写而成的。在保持传统教材理论体系科学完整的前提下，充分考虑到中学数学到大学数学的过渡与衔接，力求结构严谨，逻辑清晰，叙述详细，通俗易懂，富于启发性和便于自学。

全书分上、下两册，上册内容包括极限与连续，一元函数微积分学，无穷级数等七章，书末附有上册习题答案与提示，以及极坐标系简介、二阶和三阶行列式简介、几种常用的曲线、积分简表、初等数学常用公式，希腊字母表等内容。下册内容包括空间解析几何及向量代数，多元函数微积分学，微分方程等五章，书末附有下册习题答案与提示。

本书可作为高等学校工科类各专业高等数学课程的教材，也可作为从事高等教育的教师和科研工作者的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上册/王嘉谋，石琳编著. —北京：高等教育出版社，2011.7

ISBN 978-7-04-032722-9

Ⅰ.①高… Ⅱ.①王… ②石… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 121560 号

策划编辑 张长虹　**责任编辑** 李　茜　**封面设计** 王凌波　**版式设计** 余　杨

插图绘制 黄建英　**责任校对** 陈旭颖　**责任印制** 韩　刚

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印　　刷 北京市朝阳展望印刷厂
开　　本 787×960　1/16
印　　张 26.75
字　　数 500 000
购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　　　 http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
　　　　 http://www.landraco.com.cn
版　　次 2011 年 7 月第 1 版
印　　次 2011 年 7 月第 1 次印刷
定　　价 36.10 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　32722-00

前 言

微积分是近代数学最伟大的成就。由于它在各个领域的广泛应用，以微积分为主要内容的"高等数学"成为大学中最重要的基础课程之一。这门课程对培养学生的思维能力、数学应用能力和分析判断能力都起着非常重要的作用。

进入 21 世纪，我国高等教育有了迅速的发展，从精英教育到大众化教育，教育规模不断扩大，教育对象和教育结构有了较大的变化。为适应新的高等教育形势，体现教育改革的设想和思路，我们广泛听取了具有丰富教学经验的教师和学生的意见，并根据"工科类本科数学基础课程教学基本要求"和"应用型本科大学"的特点，经过反复研讨，编写了这本教材。本教材有如下特色：

1. 对重要的概念和定理，尽可能地从几何直观或物理背景提出问题，然后经过分析和论证上升到一般的概念和结论，最后归纳出定义和定理，目的在于培养学生的创新意识和创新能力。

2. 进一步强调一些重要定义、定理和公式的物理意义或几何内涵，这样做能使学生认识到数学作为一种自然科学语言具有精确的描述能力，从而激发学生学习的兴趣。

3. 在数学公式的推导及应用时，尽量采用数学建模的方法和观点。即"分析实际问题（抽象简化）— 建立数学模型（化为数学问题）— 获得数学解（应用公式和算法）— 解释实际问题（讨论解的合理性）"，这样将有利于提高学生对数学的应用意识和应用能力。

4. 不断强调一些重要的数学思想，如：在微分学中的"局部以直代曲"；在积分学中"化整为零 — 局部以直代曲 — 积零为整"；泰勒公式和函数展开成幂级数中的"以简单代替复杂"，等。这样做将有利于学生通过学习高等数学受到数学思想方法的熏陶，使思维品质得以提升。

5. 合理安排教材中概念与理论、方法与技巧和应用与实践这三部分内容；加强几何和数值方面对数学概念的分析，从多方面培养学生理性思维，注意克服偏重分析运算和运算技巧的倾向，加强实践环节，重视应用能力的培养。

6. 对弧微分采用直观图形与夹逼准则相结合的新方法进行推导，避免了传统教材中的某些不足。

7. 修正了当前部分高等数学教材中常见的一些瑕疵及不妥之处。

总之，本教材力求恰当地处理归纳法与演绎法、数学的发现与知识的传授、加强实际应用与理论分析能力培养之间的关系。尽量做到结构严谨，逻辑清晰，

叙述详细，通俗易懂。

在编写本教材过程中，参考了大量的国内外高等数学优秀教材，从中吸取了丰富的营养，在此对作者们表示深深的感谢。

本书由王嘉谋、石琳主编，参编人员包括石萍、刘玉瑛、何莉敏、董艳、章树玲、陈溟、王尚户、张英琴、王培吉、张晓斌、孙玉琴、张红霞。

全书由王嘉谋、石琳负责统稿及审校。

本教材虽经多年教学经验积累而成，但由于编者学识有限，不妥甚至谬误之处恐也在所难免，敬请读者批评指正。

编者

2011 年 3 月

目　　录

第一章　函数、极限与连续

高等数学研究的主要对象是函数. 研究函数的主要方法是极限理论及其方法. 函数的有关知识中学已经学过. 本章在复习函数有关内容的基础上, 介绍极限和函数连续等基本概念及其性质.

1.1 函　　数

一、集合及其运算

1. 集合

集合是数学的一个基本概念, 是学习现代数学的基础.

集合是具有某种特定性质的事物或对象的全体, 构成集合的事物或对象称为集合的**元素**.

通常用大写字母 A, B, C 等表示集合, 用小写字母 a, b, c 等表示集合的元素. 给定一个集合, 集合中的元素就确定了, 任何一个事物或者是集合中的元素, 或者不是集合中的元素.

如果 a 是集合 A 的元素, 称 a 属于 A, 记为 $a \in A$; 否则就称 a 不属于 A, 记为 $a \notin A$.

集合常用列举法和描述法来表示.

列举法是将集合的元素一一列出. 如自然数集就可以表示为

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}.$$

描述法是通过描述集合中元素所具有的性质来表示集合, 一般表示为

$$A = \{a | a \text{ 具有性质 } P\}.$$

如大于 $\sqrt{2}$ 的实数可以表示为

$$A = \{x | x > \sqrt{2}\}.$$

有时一个集合可以用不同的方法表示, 不管用什么方法表示集合, 只要集合中的元素是一样的, 就表示同一个集合. 例如, 集合 $\{x | x^2 - 1 = 0\}$ 与集合 $\{-1, 1\}$ 是同一个集合.

只有有限个元素的集合称为**有限集**; 不含任何元素的集合称为**空集**, 记为 $\varnothing$; 既不是有限集, 又不是空集的集合称为**无限集**.

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素, 就称集合 A 是集合 B 的一个**子集**, 记为 $A \subset B$. 例如, 一个班级中的女生全体是这个班级组成的集合的子集. 当 A 是 B 的子集, 而 B 又是 A 的子集时, 称集合 A 与 B 相等, 记为 $A = B$.

2. 集合的运算

设有集合 A 与 B, A 与 B 的并集记为 $A \cup B$, 是所有属于 A 或属于 B 的元素组成的集合, 即

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\};$$

集合 A 与 B 的交集记为 $A \cap B$, 即

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\};$$

集合 A 与 B 的差集记为 $A \setminus B$ 或 $A - B$, 即

$$A \setminus B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\};$$

显然有

$$A \setminus B \subset A \subset A \cup B, \quad A \cap B \subset A, \quad A \cap B \subset B.$$

集合的运算有下面的规律:

(1) $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$;

(2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

(3) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

(4) $A \cup A = A, \quad A \cap A = A, \quad A \cup \varnothing = A, \quad A \cap \varnothing = \varnothing$.

3. 区间和邻域

区间是微积分中最常见的数集. 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a < b$. 如图 1.1 所示, 各类区间定义如下:

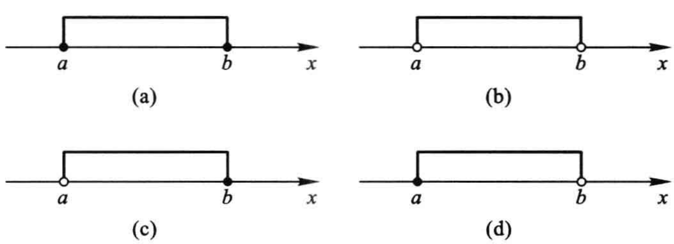

图 1.1

闭区间 $[a, b] = \{x | a \leqslant x \leqslant b\}$;

开区间 $(a, b) = \{x | a < x < b\}$;

左开右闭区间 $(a, b] = \{x | a < x \leqslant b\}$;

左闭右开区间 $[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$.

上面这些区间统称为有限区间, 其中 a,b 称为这些区间的端点, $b-a$ 是这几种区间的长度. 除了有限区间, 还有无限区间, 如图 1.2 所示, 无限区间的定义如下:

$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$;

$(a,+\infty)=\{x|x>a\}$;

$(-\infty,a]=\{x|-\infty<x\leqslant a\}$;

$(-\infty,a)=\{x|-\infty<x<a\}$;

$(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}$.

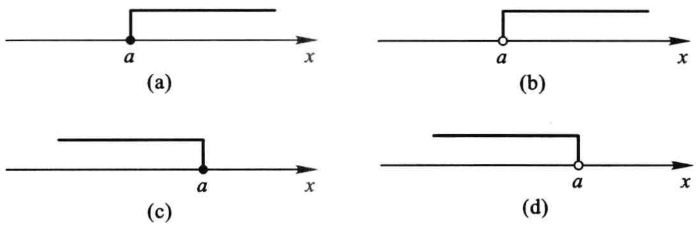

图 1.2

邻域是一种特殊的区间. 如图 1.3 所示, 设 $a,\delta\in\mathbf{R},\delta>0$, 称数集 $\{x||x-a|<\delta\}$ 为点 a 的 δ 邻域, 记作 $U(a;\delta)$. a 叫做这个邻域的中心, δ 叫做邻域的半径. 于是有

$$U(a;\delta)=(a-\delta,a+\delta).$$

称数集 $\{x|0<|x-a|<\delta\}$ 为点 a 的**去心 δ 邻域**, 记作 $\overset{\circ}{U}(a;\delta)$. 于是有

$$\overset{\circ}{U}(a;\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta).$$

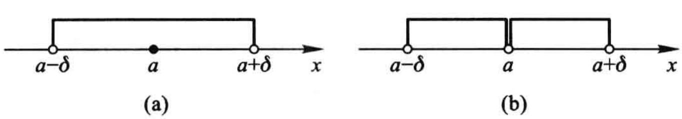

图 1.3

二、函数

1. 函数的概念

在自然界中有些量在某个过程中是变化的, 则称这个量在该过程中为**变量**, 变量通常用字母 x,y,z 等表示; 有些量在某个过程中是不发生变化的, 则称这个量在该过程中为**常量**, 常量通常用字母 a,b,c 等表示. 各种变量之间会相互影响,

如果两个变量之间有着确定性的依赖关系，即某个量的值可以确定另一个量的值，那就是我们要研究的函数关系.

定义 1 设有两个变量 x 与 y, 其中变量 x 在数集 D 中取值. 如果对于每个 $x \in D$, 按照某个确定的对应法则 f, 变量 y 总有唯一的值与它对应, 则称对应法则 f 是定义在数集 D 上的函数, 记作

$$f : D \to (-\infty, +\infty);$$

或

$$f : x \mapsto y, \quad x \in D;$$

或

$$y = f(x), \quad x \in D.$$

其中 x 称为函数 f 的**自变量**, y 称为函数 f 的**因变量**, D 称为函数 f 的**定义域**. 与 $x_0 \in D$ 对应的值 $y_0 = f(x_0)$ 称为函数 f 在点 x_0 处的函数值, 函数值的全体可用集合 W 表示, 即

$$W = \{y | y = f(x), x \in D\} = f(D).$$

集合 W 称为函数 f 的**值域**.

在不需要指出定义域时, 函数可以简写为 $y = f(x)$, 并且约定, 若不特别指出函数 $y = f(x)$ 的定义域, 则这个函数的定义域就是使函数 $f(x)$ 有意义的一切 x. 如 $y = \sqrt{x}$ 的定义域就是 $\{x | x \geqslant 0\}$.

注 1 在定义中, 我们要求对定义域中每一个 x, 只有唯一的值 y 与之对应, 这样定义的函数称为**单值函数**. 如果有不止一个 y 值与 x 对应, 就是**多值函数**. 除非有特殊说明, 本书中涉及的都是单值函数.

注 2 如果对于定义域中不同的 x, 其对应的 y 值也不同, 即当 $x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2$ 时, $f(x_1) \neq f(x_2)$, 我们称这类函数为**一一对应函数**, 简称一一对应.

对于定义域, 除了考虑数学表达式本身的意义外, 还应考虑函数的实际意义. 例如, 圆的面积 S 是圆的半径 r 的函数: $S = \pi r^2$, 由于圆的半径应该大于 0, 所以定义域是 $(0, +\infty)$; 一天中的气温 T 是时间 t 的函数: $T = T(t)$, 一天有 24 小时, 所以定义域是 $[0, 24]$.

一个函数要涉及很多概念, 其中定义域和对应法则是最重要的, 是函数的两个要素. 因为只要有了自变量的定义域, 有了关于定义域的对应法则, 一个函数就被确定了.

有一种特殊的函数, 无论自变量如何变化, 其函数值始终取同一个常数, 这类函数称为**常量函数**.

例 1 设 C 为常数, 则 $y=C$ 是**常量函数**, 定义域是 $(-\infty,+\infty)$, 值域是 $\{C\}$, 其实, 将函数写为 $y=C(\sin^2 x+\cos^2 x)=C$, 就看得更为清楚.

例 2 符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

为分段函数, 定义域是 $(-\infty,+\infty)$, 值域是 $\{-1,0,1\}$, 它的图形如图 1.4 所示, 对任何 $x\in\mathbf{R}$, 有 $x=\operatorname{sgn} x\cdot|x|$ 或 $|x|=x\operatorname{sgn} x$.

例 3 取整函数

对任意的 $x\in\mathbf{R}$, 用记号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 从而得到定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数

$$y=[x],$$

称此函数为**取整函数**, $[x]$ 称为 x 的整数部分. 如 $[0.3]=0,[1.52]=1,[-1]=-1,[-1.52]=-2$. $y=[x]$ 的定义域是 $\mathbf{R}$, 值域是 $\mathbf{Z}$, 如图 1.5 所示, 这是一个**阶梯函数**, 也是分段函数.

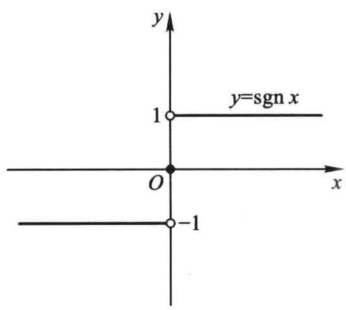

图 1.4

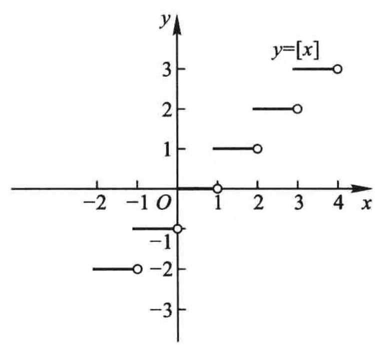

图 1.5

例 4 狄利克雷 (Dirichlet) 函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 是有理数},\\ 0, & x\text{ 是无理数}.\end{cases}$$

这个函数可以描述为: 当 x 为有理数时, $D(x)=1$; 当 x 为无理数时, $D(x)=0$. 它的定义域是 $(-\infty,+\infty)$, 值域是 $\{0,1\}$, 但是, 由于任意两个有理数之间都有无理数, 并且任意两个无理数之间也都有有理数, 所以它的图形无法描绘.

例 5 函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$$

是一个分段函数, 定义域是 $(-\infty, 2]$, 值域是 $[0, +\infty)$, 图形见图 1.6.

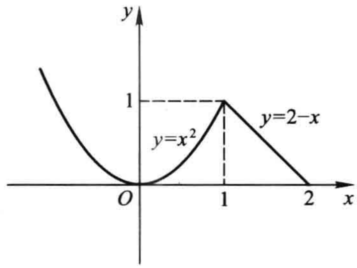

图 1.6

当 $x \in (-\infty, 1]$ 时, $f(x) = x^2$. 当 $x \in (1, 2]$ 时, $f(x) = 2 - x$. 例如, $-1 \in (-\infty, 1]$, 所以 $f(-1) = (-1)^2 = 1$, $\frac{3}{2} \in (1, 2]$, 所以 $f\left(\frac{3}{2}\right) = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$. 如果要求 $f(x-1)$, 可将 x 以 $x-1$ 替换, 得

$$f(x-1) = \begin{cases} (x-1)^2, & x-1 \leqslant 1, \\ 2-(x-1), & 1 < x-1 \leqslant 2, \end{cases}$$

即

$$f(x-1) = \begin{cases} (x-1)^2, & x \leqslant 2, \\ 3-x, & 2 < x \leqslant 3. \end{cases}$$

2. 具有某种特性的函数

(1) 有界函数 — 有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D, 数集 $I \subset D$, 如果存在正数 M, 使对任意的 $x \in I$, 都有

$$|f(x)| \leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 I 上**有界.**

如果这样的 M 不存在, 则称 $f(x)$ 在 I 上**无界.**也就是说, 若对任意给定的正数 M, 总存在 $x_1 \in I$, 使得 $|f(x_1)| > M$, 那么函数 $f(x)$ 在 I 上无界.

如果存在 $M_1 \in \mathbf{R}$, 使得对任一 $x \in I$, 都有 $f(x) \leqslant M_1$, 则称 $f(x)$ 在 I 上有上界, M_1 是 $f(x)$ 的一个上界; 如果存在 $M_2 \in \mathbf{R}$, 使得对任一 $x \in I$, 都有 $f(x) \geqslant M_2$, 则称 $f(x)$ 在 I 上有下界, M_2 是 $f(x)$ 的一个下界. 显然, 函数 $f(x)$ 在 I 上有界的充要条件是它既有上界又有下界.

常常讨论函数在其定义域上的有界性.

例如, 函数 $y = \sin x$, 因为对任一 $x \in (-\infty, +\infty)$, 都有 $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, 即 $|\sin x| \leqslant 1$, 所以, 函数 $y = \sin x$, 在 $x \in (-\infty, +\infty)$ 上既有上界又有下界, 是**有界函数**.

又如函数 $f(x)=\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 内是无界的, 因为对于任一 $x\in(0,+\infty)$, 不存在一个正数 M, 使得 $|\ln x|\leqslant M$ 成立. 但是, 函数 $f(x)=\ln x$ 在区间 $[1,2]$ 内是有界的. 因为取 $M=\ln 2$, 对于任一 $x\in[1,2]$, 都有 $|\ln x|\leqslant\ln 2$ 成立.

由此可见, 在讨论函数的有界性时, 必须指明所在的区间. 一个函数可能在它的整个定义域内有界, 也可能仅在定义域的部分区间内有界.

(2) 奇偶函数 — 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称, 如果对于任意的 $x\in D$, 总有

$$f(-x)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 是**偶函数**; 如果对于任意的 $x\in D$, 总有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称 $f(x)$ 是**奇函数**.

偶函数的图形关于 y 轴对称, 奇函数的图形关于原点对称.

例如, 对于正整数次幂函数 $f(x)=x^n$, 当 n 为偶数时, 它是偶函数, 当 n 为奇数时, 它是奇函数.

又例如, $f(x)=x^4-2x^2$ 是偶函数 (图 1.7), 因为 $f(-x)=(-x)^4-2(-x)^2=x^4-2x^2=f(x)$. $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 是奇函数 (图 1.8), 因为 $f(-x)=\dfrac{1}{-x}=-f(x)$. $f(x)=\sin x+1$ 既非偶函数又非奇函数 (图 1.9).

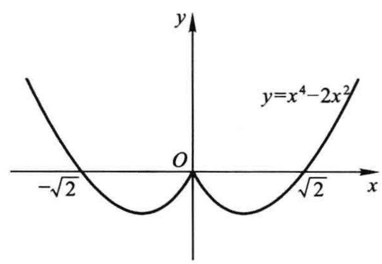

图 1.7

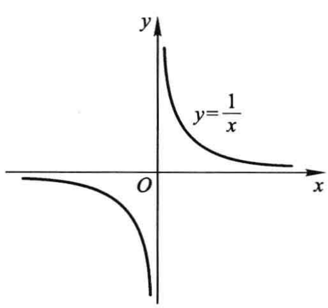

图 1.8

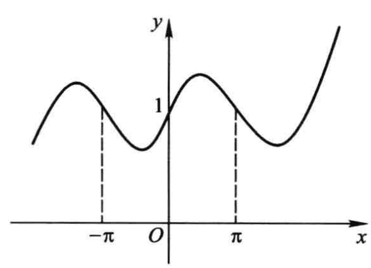

图 1.9

可见, 函数的奇偶性刻画了这个函数的图形关于原点的中心对称性质或关于 y 轴的轴对称性质. 所以对这种函数, 常常只需考虑 $x\geqslant 0$ 时的情形.

(3) 单调函数 — 单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域是 D, 区间 $I \subset D$, 如果对于任意的 $x_1, x_2 \in I$, 且 $x_1 < x_2$, 总有

$$f(x_1) < f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**严格单调增加的**; 如果总有

$$f(x_1) > f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**严格单调减少的**.

单调增加或单调减少的函数都称为**单调函数**.

例如, 函数 $f(x) = \mathrm{e}^x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上是单调增加的; 函数 $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上是单调减少的 (图 1.10); 而函数 $f(x) = x^2$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上是单调减少的, 在区间 $[0, +\infty)$ 上是单调增加的 (图 1.11).

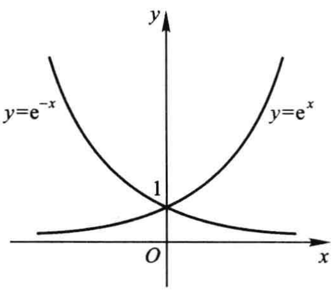

图 1.10

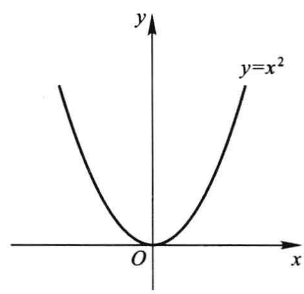

图 1.11

由此可见, 讨论函数的单调性也必须强调 x 所在的区间.

(4) 周期函数 — 周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D \subset \mathbf{R}$, 如果存在一个正数 T, 使对于任意的 $x \in D$, 只要 $x + T \in D$, 总有

$$f(x+T) = f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**周期函数**, T 称为 $f(x)$ 的**周期**, 通常我们所说函数的周期是指最小正周期.

例如, 函数 $\sin x, \cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数, 函数 $\tan x, \cot x$ 是以 π 为周期的周期函数.

对于周期函数, 常常只要考察它在一个周期内的状态就可以了.

注意, 并不是所有的周期函数都能找到最小正周期, 如例 4 中的狄利克雷函数, 每一个正有理数都是它的周期, 但是没有最小正周期.

三、反函数与复合函数

1. 反函数

自变量与因变量之间的关系是相对的, 如圆的面积公式 $S=\pi r^2$, 若将半径 r 当作自变量, 则面积是半径的函数; 若将面积 S 作为自变量, 则半径 r 是 S 的函数, 即 $r=\sqrt{\dfrac{S}{\pi}}$.

定义 2 设函数 $y=f(x)$ 在数集 D 上有定义, 值域 $W=f(D)$. 如果对任何 $y\in W$, 在 D 中有唯一的数 x, 使 $f(x)=y$, 则这个对应法则定义了在数集 W 上的一个函数, 这个函数称为 $y=f(x)$ 在 D 上的反函数, 记作

$$x=f^{-1}(y),\quad y\in W.$$

为了与反函数相对应, 将原来的函数称为**直接函数**. 习惯上我们用 x 表示自变量, y 表示因变量, 因此, 将反函数中两个变量位置互换一下, 得到 $y=f^{-1}(x)$. 除非有特别的说明, 以后说函数 $y=f(x)$ 的反函数就是指 $y=f^{-1}(x)$. 反函数的定义域 $W=f(D)$, 值域是 D.

反函数的图形与直接函数的图形关于直线 $y=x$ 对称 (图 1.12).

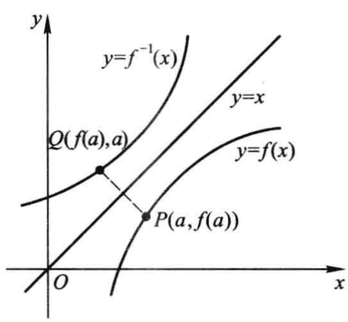

图 1.12

理由: 设点 $P(a,f(a))$ 在曲线 $y=f(x)$ 上, 则点 $Q(f(a),a)$ 在曲线 $y=f^{-1}(x)$ 上, 反之亦然. 所以, 曲线 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 关于直线 $y=x$ 对称.

并不是每个函数都有反函数. 只有当函数 $y=f(x)$ 是一一对应时, 才有反函数. 例如, 二次函数 $y=x^2$ 在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 中没有反函数, 因为对于任何 $y\in[0,+\infty)$, 有两个值 $x_1=\sqrt{y}, x_2=-\sqrt{y}$ 与之对应. 但是在 $[0,+\infty)$ 上, 是一一对应, 有反函数 $y=\sqrt{x}$. 由于严格单调函数是一一对应的, 所以我们可以得到下面的定理.

反函数存在定理　严格单调函数的反函数存在.