華夏英才基金學術文庫

黄立宏 郭振远 王佳伏 著

右端不连续微分方程理论与应用

科学出版社

华夏英才基金学术文库

右端不连续微分方程理论与应用

黄立宏 郭振远 王佳伏 著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书较详细地介绍了右端不连续微分方程的基本概念，通过对国内外大量文献资料进行精心筛选与组织，系统地介绍了右端不连续微分方程的一些优秀研究成果，其中很大一部分是作者的新近研究成果. 另外，为了使本书内容自成体系，书中简要介绍了研究右端不连续微分方程的一些基本理论知识、方法和工具，以方便读者阅读、学习和开展有关的研究.

本书适合数学、自动化、计算机、信息技术等专业的高年级本科生、研究生、教师和相关领域的科技工作者，特别是从事常微分方程、泛函微分方程、动力系统、自动控制、生物数学、流行病学、人工神经网络等理论与应用研究的人员阅读.

图书在版编目(CIP)数据

右端不连续微分方程理论与应用/黄立宏，郭振远，王佳伏著. —北京：科学出版社，2011

(华夏英才基金学术文库)

ISBN 978-7-03-031666-0

Ⅰ.①右… Ⅱ.①黄… ②郭… ③王… Ⅲ.①微分方程-研究 Ⅳ.①O175

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 115232 号

责任编辑：赵彦超 徐园园/责任校对：陈玉凤

责任印制：钱玉芬/封面设计：王 浩

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 6 月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2011 年 6 月第一次印刷 印张：17

印数：1—2 500 字数：334 000

定价：58.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

庞加莱在 1881~1886 年以同一标题《由微分方程定义的曲线》发表了四篇论文, 寻求只通过考察微分方程本身就可以回答关于稳定性等问题的方法, 开辟了微分方程研究的一个崭新方向——定性理论. 然而, 常微分方程的定性理论绝大部分是建立在右端函数连续甚至 Lipschitz 连续的基础上. 由于自然规律以及多种因素的影响, 右端不连续微分方程大量存在于许多实际问题的数学建模中, 如神经网络、电子工程、自动控制以及生物数学中许多问题的数学模型均表现为右端不连续微分方程. 另外, 右端不连续微分方程还出现在许多控制系统中, 例如, 切换系统、变结构系统和滑模控制系统. 对于右端不连续微分方程, 现有的许多动力系统方法以及理论都不能直接应用, 给研究带来很大的困难, 这就迫切需要更加有效的理论、方法和工具的出现.

目前关于右端不连续微分方程的专著非常少, 国内至今没有出版过这方面的专著. Filippov 在 1988 年出版的专著 *Differential Equations with Discontinuous Right-hand Sides* 可以说是该领域的一部经典之作, 它给出了不同类型右端不连续微分方程解的定义, 并在此基础上对解的性质进行了定性分析, 尤其是讨论了由右端函数的不连续性所导出的解的性质. Filippov 的专著对于右端不连续微分方程的研究具有重要的参考价值, 被国内外大多数关于右端不连续微分方程研究的文献所引用. 然而，它总结的是 20 世纪 90 年代以前的研究成果, 并且书中关于右端不连续微分方程稳定性的理论甚少, 关于右端不连续时滞微分方程的理论几乎没有涉及. 由于右端不连续微分方程应用的广泛性, 近些年来国内外许多学者纷纷参与到这一领域的研究, 并已取得了不少的研究成果. 因此, 系统地总结现有的研究成果, 使众多的研究工作者较全面地了解该领域的国内外研究现状和动态, 为进一步的研究提供指南, 为有志加盟该领域研究的后继者提供一部合适的入门读物, 以壮大该领域的研究队伍, 进一步丰富该领域的理论和研究方法, 是十分必要的. 本书正是向着这个方向努力的.

本书较详细地介绍了右端不连续微分方程的有关基本概念, 通过对国内外大量文献资料进行精心筛选与组织, 较系统地介绍了近年国内外学者关于右端不连续微分方程研究的一些优秀理论成果,也较详细介绍了有关右端不连续微分方程理论和研究方法在人工神经网络动力学以及生物学等方面的一些应用. 另外, 为了使本书内容自成体系, 书中简要介绍了开展右端不连续微分方程研究的一些基本理论知识、方法和工具, 以方便读者阅读、学习和开展有关的研究.

本书有相当一部分结果是著者及其所带领的“微分方程理论与应用”学术小组成员和所指导的研究生近年的研究成果. 我们近年开展的右端不连续微分方程

研究工作, 得到了国家自然科学基金“右端不连续微分方程的定性理论及其应用研究”(批准号: 10771055)、“不连续微分方程的定性研究”(批准号: 11071060)、“具非光滑信号传输的神经网络模型的动力学研究”(批准号: 10371034)、高等学校博士学科点专项科研基金“具不连续信号传输函数的神经网络模型的定性研究”(批准号: 20010532002) 项目的资助. 本书的出版得到了华夏英才基金的资助, 在此一并致谢!

在本书的写作过程中, 研究生王增賛、胡海军、陈小艳、蔡佐威等为书稿的进一步完善和改进提出了许多宝贵意见.

本书的出版得到了科学出版社责任编辑的大力支持与帮助. 另外, 本书参考了很多国内外专家和同行学者的论文和专著, 无法一一列举. 在此一并表示衷心的感谢!

黄立宏

2010 年 10 月于长沙

目　　录

第 1 章 绪 论

1.1 右端不连续微分方程的研究意义

对于常微分方程

$$\dot{x} = f\big(t, x(t)\big), \tag{1.1.1}$$

其中, $f: I \times G \to \mathbb{R}^n$ 为一个给定的函数, $I \subseteq \mathbb{R}$ 为某非空开区间, $G \subseteq \mathbb{R}^n$ 为某非空开区域. 若 $f(t,x)$ 在 $I \times G$ 上关于 t 和 x 均连续, 则称 (1.1.1) 为右端连续常微分方程, 简称为常微分方程. 若 $f(t,x)$ 在 $I \times G$ 上关于 t 和 x 至少其中的一个不连续, 则称 (1.1.1) 为右端不连续常微分方程, 简称为不连续常微分方程. 类似地, 可以定义右端不连续泛函微分方程和右端不连续偏微分方程. 本书仅考虑右端不连续常微分方程和右端不连续泛函微分方程, 统称为不连续微分方程.

1881~1886 年庞加莱相继以《由微分方程定义的曲线》为题发表四篇常微分方程定性理论的奠基性论文, 开创了常微分方程定性理论研究; 1892 年 Lyapunov 出版著名的俄文论文集 (1907 年翻译成法语 *Problème gènèral de la stabilité de mouvement*) 开创了常微分方程稳定性理论的研究. 至此, 人们对众多类型的常微分方程进行了广泛和深入的研究, 然而, 这些研究大部分是在微分方程右端连续的前提下讨论的. 至今为止, 关于右端连续的常微分方程的定性和稳定性研究已获得了十分丰富的成果, 形成了相当完善的理论体系[1-9]. 关于这些理论的应用及进一步推广, 学者们也已做出了杰出贡献. 如 Lyapunov 稳定性理论在控制系统中得到了更好的应用[10-15], 众多的理论也已被推广到泛函微分方程[16-20]和一般的动力系统[21-30]. 但对于右端不连续的微分方程, 经典的微分方程理论不再适用. 例如: 对于右端连续常微分方程 (1.1.1), 若给以初值条件

$$x(t_0) = x_0, \tag{1.1.2}$$

其中, $t_0 \in I$; $x_0 \in \mathbb{R}^n$, 则根据 Peano 定理[9], 当正常数 δ 充分小时, 方程 (1.1.1) 在区间 $[t_0, t_0+\delta]$ 上关于初始问题的解是存在的, 即存在可微函数 $x(t)$ 使得该函数在区间 $[t_0, t_0+\delta]$ 上关于 t 的导数处处满足 (1.1.1). 而对于右端不连续常微分方程 (1.1.1), 则不管 δ 多么小, 方程 (1.1.1) 在区间 $[t_0, t_0+\delta]$ 上的解都可能不存在.

例1.1.1 考虑右端不连续常微分方程 $\dot{x} = \operatorname{sign} t$. 当 $t<0$ 时, $\dot{x}=-1$, 此时方程的解为 $x(t) = -t + c_1$; 当 $t>0$ 时, $\dot{x}=1$, 这时方程的解为 $x(t) = t + c_2$. 若要求原右端不连续常微分方程的解 $x(t)$ 在 $t=0$ 处连续, 则需 $x(0)=c_1=c_2$, 故原方程在 $(-\infty,+\infty)$ 上的解只可能为 $x(t)=|t|+c$. 但在 $t=0$ 处, 导数 $\dot{x}(t)$ 不存在.

例 1.1.1 说明经典意义下常微分方程解的定义并不适用于右端不连续微分方程. 这表明: 要开展右端不连续微分方程研究, 首先就需要寻求适用于右端不连续微分方程的解的新定义.

在现实世界当中, 能用微分方程建模研究的实际问题非常之多[31,32]. 并且, 由于自然规律以及多种因素的影响, 不连续动力系统大量存在. 只是由于理论工具的缺乏, 过去人们通常用连续的微分方程模型来描述不连续动力系统. 这样的连续模型在很多情况下并不能充分揭示这些实际问题的本质. 为了更好地揭示不连续系统的一些本质属性, 人们难以回避地要在这些系统的动力学建模中采用不连续微分方程.

近年来, 不连续微分方程不仅出现在数学学科本身的研究中, 例如：AL-Sunni Fouad M[33] 在研究一个二次规划问题的解时就导出了一个不连续常微分方程, 而且大量出现在诸如控制工程、机械工程、电子工程、模式识别、神经网络、力学、生物学和经济学等领域中众多实际问题的动力学建模中, 越来越多的数学工作者及相关领域的学者参与到其有关问题的研究.

在机械工程中, 齿轮传动系统用来在两个平行轴之间传送动力或者是改变方向, 在动力传送过程中, 这一对齿轮就形成了一个动力系统, 而每个齿轮都有它自己的子动力系统, 两个子动力系统通过轴和轴承连接起来, 动力传送通过碰撞和摩擦完成. 这样的碰撞和摩擦在两个子系统间就产生了不连续的因素, 整个动力传送系统就是由两个子系统构成的不连续系统. den Hartog 在文献 [34] 中就用分段线性微分方程来刻画齿轮传动系统. 由于黏性以及摩擦力的影响, 一些力学系统[35,36]中还出现了对状态变量不连续的项.

在一些实际神经网络中, 神经元之间的信号传输或神经元的信息输出往往具有不连续的特征[37-43], 事实上, 在神经网络中, 一个神经元根据其自身的活跃水平, 对网络中其他神经元的影响存在激励 (兴奋)、抑制 (干扰) 两种状态, 或激励、抑制、无影响三种状态, 而在众多神经网络中这些状态之间的转换往往是不连续的, 正因为这样, 具有不连续信号传输的神经网络是大量客观存在的, 也是应用十分广泛的. 1943 年 McCulloch 和 Pitts 在人工神经网络研究的开创性论文中所建立的经典模型 (M-P 模型) 中激励函数 (也称信号传输函数或信号函数) 就是非连续型的 (称为 McCulloch-Pitts 型激励函数). 著名神经网络学家 Hopfield 教授在文献 [44,45] 中指出, 由于神经元的分阶反应, 神经网络中的激励函数的高增益性 (High Gain) 是不可忽略的, 通常这种激励函数表现为一个二值函数. Kennedy 和 Chua[46] 在利用神经网络研究线性和非线性规划问题时也指出, 采用二极管似的二值函数模拟抑制神经元信号的输入输出更加符合实际情况. 从作者们近几年开展的具不连续激励函数的微分方程神经网络模型的动力学研究来看, 要想在此方面取得突破, 必须加强对右端不连续微分方程的定性和稳定性理论的研究.

右端不连续微分方程在控制系统中的应用尤为明显，事实上，不连续微分方程的研究最早出现在控制工程领域. 对于一般的控制系统：

$$\dot{x} = f\big(t, x(t), u(t)\big), \quad x(0) = x_0, \tag{1.1.3}$$

其中，$u(t) \in U$ 为控制量. 一般情况下，$u(t)$ 在 U 中的变化是不连续的. 这样的控制系统 (1.1.3) 就是一个右端不连续的微分方程系统. 要想对控制系统 (1.1.3) 有深入的研究，就必须发展右端不连续微分方程的理论. 综合控制问题的求解是控制论研究的主要方向之一，在经典的带固定边界综合控制系统中，其解会变为一个 bang-bang 型[47]，于是，所研究的综合控制系统通常用右端不连续微分方程以及转换面求解[47-55]. 控制系统的稳定性研究也一直是自动控制理论的热点与难点，而其中，关于 Lyapunov 方程的设计方法研究显得尤为重要，根据右端不连续微分方程理论来设计相应的 Lyapunov 方程是目前常用的方法[56-63].

在模式识别中，文献 [64] 研究了基于支持向量机 (SVM) 的关于不可分离类描述问题，并引入右端不连续型梯度系统，来讨论 SVM 分类器解集的性质；文献 [65] 通过对一类右端不连续梯度系统进行研究，得到线性方程有限时间收敛解集的上界估计，并将结果用于最小二次支持向量机 (LS-SVM) 技术.

在计算机网络的应用中，经常出现 QoS (Quantity of Service)、交换工程 (TE)、故障排除 (FR) 等一系列问题，文献 [66] 针对这些问题，通过建立右端不连续微分方程系统，来讨论所引入的控制率能否保证闭环系统收敛于最优问题的解；文献 [67] 在讨论基于多路径呼叫的网络最优分散流量工程问题时，通过引入基于滑模的控制率，建立了闭环不连续微分方程.

另外，一些含不连续现象的复杂生物系统的数学建模也常常通过引入建立于各种变量之间的开关转换函数，进而用不连续微分方程系统来描述[68].

众所周知，合理开发利用渔业和林业等再生资源是国家的一项重要政策，这与人类的生活与生存息息相关. 而为了解决资源的保护与利益的最大化之间的冲突，必须采取不连续的开采策略. 因此，通过建立不连续动力学模型来研究这一问题是非常必要的，文献 [69] 就考虑了资源的保护和可持续发展，把不连续的收获策略引入了物种竞争模型，但这样的工作并不多见.

在传染病动力学研究中，现有的模型几乎都是连续的. 但若考虑到治疗和接种疫苗等因素，则只有建立不连续的模型才能真实地刻画传染病系统. 这是因为，对一个危害严重的传染病 (例如，黑死病和艾滋病) 来说，在其传播早期，人们往往因意识不到严重性而没有足够重视，从而感染者就得不到及时、充分的治疗，甚至得不到治疗. 一段时间后，当人们意识到严重性时，就会突然加大治疗力度，从而形成一个很大的治疗跳跃. 因此，治疗对感染人数应该是不连续的. 从经济的角度来说，如果流行病危害不严重 (例如，普通流感)，感染者为了节省开支就会在主观意识上

把该病分成几个状态, 然后根据所处的状态水平做相应的治疗, 这意味着治疗应该是分段连续的而且有一些跳跃, 例如, 多阶段的治疗.

综上所述, 不连续微分方程在科学和工程技术领域具有广泛的应用背景. 开展不连续微分方程的研究, 从数学学科发展来说, 既可以进一步丰富和发展微分方程理论, 又可促进一些相关数学分支的发展. 通过对机械、控制、人工神经网络等工程领域不连续系统的微分方程建模及对模型的研究, 可以为工程的设计和开发提供重要的理论依据和决策参考, 这关系到国民经济的增长以及社会的发展. 通过对生物学、流行病学等领域一些不连续系统的微分方程建模及对模型的研究, 可为制订资源开采决策以及疾病预防和控制对策等提供依据, 这关系到人们生活与生存的质量. 因此, 对不连续微分方程的研究既有重要的理论意义, 又有重要的应用价值. 但是, 通过前面的介绍可以发现, 不连续微分方程的研究还缺少有效方法, 其理论体系还远不完备, 特别是右端不连续泛函微分方程理论还几乎是空白. 因此, 我们不仅要发展和完善右端不连续常微分方程的理论, 还要发展右端不连续泛函微分方程的理论. 另外, 在工程和技术领域中还有大量没有研究, 或是仅进行过一些比较浅显研究的不连续系统. 因此, 对不连续微分方程理论进行深入研究, 并把理论成果应用于科学和工程技术领域中含不连续现象的动力学问题研究是一项迫切而又具有重要意义的工作.

1.2 右端不连续微分方程的研究概况

对于右端不连续的微分方程, 由于分析工具和方法的限制, 理论的发展比较滞后且相当缓慢. 这方面最早的工作是由 Carathéodory 在 20 世纪 20 年代开创的, 接下来的几十年中只出现了少量的工作. 到了 20 世纪中后期, 由于电器调节系统和不连续振动系统, 以及现代控制理论研究的需要, 右端不连续微分方程理论的研究进入了一个新的时期, 以前苏联的专家为代表的一批学者在 20 世纪六七十年代投入到这一研究领域并获得了一些好的成果, 特别是前苏联学者 Filippov 做了许多优秀的工作, 在其所定义的解的意义下, 比较系统地分析了一些类型方程解的基本性质以及稳定性等[70-75], 20 世纪 80 年代以前的一些代表性的研究成果大多被收集在 Filippov 的专著[76]中, 之后, 虽有一些零星的研究工作, 但比起右端连续的常微分方程的研究成果来, 差距甚大. 我国学者贺建勋教授也曾做过一些有意义的工作[77].

如 1.1 节所述, 右端不连续微分方程在科学和工程技术领域具有广泛的应用背景, 近些年来, 随着非线性科学研究的不断深入, 以及数学在其他学科和众多实际领域应用的日益广泛, 许多用来描述一些科学和工程技术领域实际问题的右端不连续的微分方程模型被建立和研究, 这些模型较右端连续型微分方程模型更好地反映

了实际问题的本质和固有规律[78-81]. 然而, 由于右端不连续微分方程与右端连续微分方程有着本质的区别, 现有的关于右端连续微分方程和动力系统丰富的理论与方法不能直接应用于右端不连续微分方程的研究, 所以给研究带来很大困难, 至今所获结果甚少, 已建立的定性和稳定性理论体系还远没有达到完善的地步, 远不能满足广大科技工作者的需要. 这就迫切需要更加有效的理论、方法和工具的出现, 也就是发展右端不连续微分方程理论.

意大利学者 Forti、法国学者 Pakdaman、本书第一作者以及复旦大学陈天平教授等所带领的学术团队近年开展了用右端不连续微分方程所刻画的具有不连续激励函数的神经网络动力学的研究, 参见文献 [82-91], 不过这些文献获得的结果主要集中在稳定性和解的收敛性方面, 关于其复杂的动力学行为研究结果很少, 而且所研究的模型大都是一些较简单的经典模型, 对于具有多个时滞、分布时滞、脉冲或是随机项的不连续复杂神经网络研究甚少.

综观近些年涌现的为数不多的有关不连续微分方程模型的文献, 很多结果或者由于右端不连续微分方程理论的不完善而存在很大的局限性, 或者是借助于实验观察和一些特殊情形下的计算机数值模拟得到的, 缺乏严格的理论证明. 这些文献的研究内容主要集中在右端不连续常微分方程解的基本性质及稳定性和稳定化方面[92-119], 而在周期解、分岔、混沌等方面的结果很少[120-122], 关于右端不连续泛函微分方程的研究结果几乎是空白. 但自然科学与社会科学中的许多学科提出了大量时滞动力学系统问题, 如自然科学中的核物理学、电路信号系统、生态科学、化工循环系统、遗传问题、流行病学等, 社会科学中的存在于商业销售、财富分布理论、资本主义经济周期性危机、运输调度等问题中关于时滞现象的描述. 各种工程系统的时滞现象更为普遍, 特别是自动控制系统.

在控制理论研究中, 通常把控制系统的右端分成两部分, 一部分叫控制项, 另一部分叫系统项. 关于不连续控制系统的研究已有一些不错的结果, 特别是关于切换系统、变结构控制系统和滑模控制系统的研究[56,57,61,123]. 但我们发现系统项不连续的控制系统的自适应鲁棒控制理论和自适应变结构控制, 以及具有不连续系统项的随机控制系统和马尔可夫切换系统的自适应控制理论研究目前几乎都是空白.

通过对现有关于不连续微分方程研究的文献分析发现, 许多基本的问题都有待进一步研究, 例如: 解的合理定义、初值问题解的存在与唯一性、经典的 Lyapunov 稳定性理论的推广等. 众所周知, 稳定性理论作为微分方程理论的一个分支, 在微分方程理论研究中占有重要的地位, 对于右端连续微分方程已有非常完善的稳定性理论体系. 对于右端不连续微分方程的稳定性问题, 能否建立相应的理论体系, 一直是众多学者关心和为之不断努力的课题. 对于 Filippov 型方程, Lyapunov 方法得到了较好的发展[71,76,113,124,125]. 在文献 [76] 中, Filippov 考察了具有一般形式的右端不连续微分方程的稳定性, 只不过构造的是光滑的 Lyapunov 函数. 文献

[71,113,124,125] 考虑的微分方程都是自治的, 且构造的 Lyapunov 函数不依赖于时间变量. 另外, 一些重要的性质, 如全局指数收敛性、全局指数稳定性和有限时间收敛性等, 在文献 [71,113,124-126] 中并没有被考虑. 对于不连续的 Carathéodory 型方程, 近期的文献 [98,107] 对 Lyapunov 方法作了一些修改和推广, 但所考虑方程的右端仍然对状态变量连续. 由此可知, 即使对于右端不连续的常微分方程, 其稳定性理论也还并不完善. 随着科学技术的发展和理论研究的不断深入, 许多实际问题的研究迫切需要右端不连续泛函微分方程稳定性理论的发展. 然而, 现有的关于右端不连续泛函微分方程稳定性理论的结果还相当少. 有些文献在研究右端不连续泛函微分方程系统的稳定性时, 利用的是关于右端连续的常微分方程或泛函微分方程的相关理论结果, 但一般来说, 这些理论结果对右端不连续泛函微分方程不再适合. 2005 年, Forti 等[83]基于时滞微分包含研究了一类具无限增益时滞神经网络的全局指数稳定性, 所利用的方法可以推广到一般右端不连续泛函微分方程上. 不过, 关于右端不连续泛函微分方程稳定性理论的研究还相当匮乏, 其理论需要进一步发展和完善.

1.3 本书内容介绍

本书余下的内容由五章组成 (第 2~6 章).

第 2 章为基础知识, 主要介绍与右端不连续微分方程的研究密切相关的一些基础知识, 包括闭集和凸集的性质、集值映射的相关概念和性质以及非光滑分析的知识等.

第 3 章为解的基本性质, 主要考虑右端不连续常微分方程和泛函微分方程. 首先介绍了两类方程解的定义, 在此基础上, 分别讨论了这两类方程解的一些基本性质, 包括解的存在与唯一性、解对初值以及方程右端的连续依赖性、解的延拓和整体存在性等.

第 4 章为稳定性理论, 主要讨论在 Filippov 意义下右端不连续常微分方程以及泛函微分方程的稳定性问题. 借鉴右端连续微分方程稳定性的概念, 给出方程右端不连续情形下 Lyapunov 稳定性的几种定义; 利用非光滑函数的广义链式法则, 得到右端不连续常微分方程以及泛函微分方程的一些稳定性结果, 并借助集值导数给出右端不连续微分方程的 Lassalle 不变原理. 此外, 本章也考虑了微小扰动下右端不连续常微分方程的稳定性问题, 给出了一些鲁棒稳定的结果.

第 5 章为具有不连续激励函数的神经网络, 首先介绍了一类小规模具有不连续激励函数的神经网络 (不连续神经网络) 的收敛性, 接下来, 介绍了几类用右端不连续微分方程描述的大规模神经网络模型, 它们分别是自治的、周期的和一般非自治的微分方程系统. 利用第 3 章和第 4 章中的不连续微分方程的基本理论, 分别讨

论了这三类模型的稳定性和收敛性等动力学性质.

第 6 章为具有不连续特征的几类生物学模型的研究介绍. 首先讨论了一类具有多阈值分段线性自调控生物网络的动力学性质. 该生物网络具有一般性, 众多基因调控网络和神经网络都可视为其特殊情形. 它由一个右端不连续的微分方程系统来描述. 通过引入一种能用有限维空间的坐标表示顶点的状态传递图来反映系统轨线在各阈值超平面之间的传递情况, 利用 Filippov 方法, 讨论了生物网络的各种平衡点及其稳定性, 尤其是位于多个阈值面的相交面上的奇异平衡点的性质. 此外, 对该生物网络可能存在的各种闭轨也进行了讨论, 尤其是滑模闭轨以及滑模同宿轨. 其次, 介绍了关于一个在不连续收获策略下的种群数量-努力量 (Stock-Effort) 渔业模型的动力学研究工作. 该生物经济学模型由一对右端不连续的常微分方程给出, 用来描述在捕获区域上的种群数量和捕获努力量. 通过采用 Filippov 意义下的右端不连续微分方程理论及变结构理论, 克服由模型的不连续性带来的定性分析困难, 对模型的动力学性质进行了定性分析. 最后, 介绍了一个用右端不连续微分方程组来刻画的不连续治疗策略下的 SIR 传染病模型. 综合运用广义 Lyapunov 理论等工具, 讨论了模型的动力学性质, 探讨了不连续治疗策略对流行病传播的影响.

第2章 基础知识

本章介绍与右端不连续微分方程的研究密切相关的一些基础知识, 主要包括闭集和凸集的性质、集值映射的相关概念和性质以及非光滑分析的知识等.

2.1 闭集和凸集

为了研究集值映射, 下面简要介绍 n 维空间中闭集和凸集的一些基本性质[76].

首先给出一些常用的记号: $\varnothing$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的空集; 若 $a=(a_1,\cdots,a_n), b=(b_1,\cdots,b_n)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的两个点, A,B 为 $\mathbb{R}^n$ 中的两个集合, 则 $\|a\|$ 表示 a 的 2-范数, 即 $\|a\|=(a_1^2+\cdots+a_n^2)^{1/2}$; $\|A\|$ 表示 $\sup_{a\in A}\|a\|$; $\langle a,b\rangle$ 表示 a 和 b 的内积; $\overline{A}$ 表示 A 的闭包; $\mathrm{co}A$ ($\overline{\mathrm{co}}A$) 表示 A 的凸包 (凸闭包), 它是包含 A 的最小的凸集 (凸闭集), 也是所有包含 A 的凸集 (凸闭集) 的交;

$$\rho(a,b)=\|a-b\|=\sqrt{(a_1-b_1)^2+\cdots+(a_n-b_n)^2},$$

$$\rho(a,B)=\inf_{b\in B}\rho(a,b),\quad \rho(A,B)=\inf_{a\in A,b\in B}\rho(a,b)$$

分别表示点 a 和 b, 点 a 和集合 B, 以及集合 A 和 B 之间的距离; 对于实数域 $\mathbb{R}$ 中的点 x, $|x|$ 表示 x 的绝对值. 若不加以特殊说明, 上述记号在本书余下章节中都适用.

定义2.1.1 如果集合 A 包含它的所有极限点, 那么称 A 为闭集; 如果对集合 A 中的任意两个点 a 和 b, 连接这两个点的线段上的所有点都在 A 中, 那么称 A 是凸集; 对于 $\mathbb{R}^n$ 中的点 x, 若它具有下面的形式:

$$x=\alpha_0x_0+\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_kx_k,$$

其中

$$\alpha_i\geqslant 0,\quad x_i\in\mathbb{R}^n,\quad i=0,1,\cdots,k,\quad \alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_k=1,$$

则称点 x 为点 $x_0,x_1,\cdots,x_k$ 的凸组合.

凸集和闭集有下面的一些基本性质, 这些性质的证明比较容易, 在此略去.

命题2.1.1 下面的结论成立:

(i) 有限多个闭集的并是闭集;

(ii) 任意多个闭集 (凸集)的交是闭集 (凸集);

(iii) 对于给定的点 b, 在非空闭集 A 中总可以找到距离 b 最近的点 a, 即 $\rho(b,a)=\rho(b,A)$;

(iv) $\rho(b,A)=\rho(b,\overline{A}), \rho(A,B)=\rho(\overline{A},\overline{B})$;

(v) 函数 $\varphi(x)=\rho(x,A)$ 是连续的, 且 $|\rho(x,A)-\rho(y,A)|\leqslant\rho(x,y)$.

命题2.1.2 如果非空闭集 A 和 B 没有公共点且 B 是有界集, 那么存在点 $a\in A$, $b\in B$ 使得 $\rho(a,b)=\rho(A,B)>0$.

证明 因为函数 $\varphi(x)=\rho(x,A)$ 是连续的, 因此存在点 $b\in B$ 使得

$$\rho(b,A)=\inf_{x\in B}\rho(x,A).$$

由命题 2.1.1 中的 (iii) 可知, 存在点 $a\in A$ 使得 $\rho(b,A)=\rho(b,a)>0$ (由于$A\bigcap B=\varnothing$). 对任意的点 $x\in B, y\in A$, 有

$$\rho(x,y)\geqslant\rho(x,A)\geqslant\rho(b,A)\geqslant\rho(b,a).$$

因此, $\rho(B,A)\geqslant\rho(b,a)>0$. 由于 $a\in A, b\in B$, 那么 $\rho(B,A)\leqslant\rho(b,a)$. 因此, $\rho(B,A)=\rho(b,a)>0$.

命题2.1.3 对于给定的点 b, 在非空凸闭集 A 中存在唯一的点 a 使得 $\rho(b,a)=\rho(b,A)$.

证明 利用命题 2.1.1 中的 (iii), 可以得到所要找的点的存在性. 假设存在两个不同的点 $a_1\in A$ 和 $a_2\in A$ 满足

$$\rho(b,a_1)=\rho(b,A) \text{ 和 } \rho(b,a_2)=\rho(b,A).$$

令 d 为连接 a_1 和 a_2 的线段的中点. 由 A 的凸性以及等腰三角形的性质可得

$$d\in A \quad \text{且} \quad \rho(b,d)<\rho(b,a_1)=\rho(b,a_2).$$

因此, a_1 和 a_2 不是 A 中距离 b 最近的点. 这就和假设产生了矛盾.

命题2.1.4 假设 A 是一个非空的凸闭集且 $b\notin A$, 那么存在一个 $n-1$ 维平面分离点 b 和集合 A.

证明 令 a 为 A 中距离 b 最近的点. 过线段 $\overline{ab}$ (表示以 a, b 两点为端点的线段) 上一点 m 作垂直于线段 $\overline{ab}$ 的平面 P, 这里 m 不是线段 $\overline{ab}$ 的端点. 假如存在一个点 $c\in A$ 位于 P 上或和 b 位于P 的同侧, 那么角 $\angle bac$ 是锐角. 过 b 向线段 ac 作垂线交于点 d. 显然, d 比 a 距离 b 近. 由于 $a\in A, c\in A$, A 是凸集, 从而 $d\in A$. 这就和 a 为 A 中距离 b 最近的点相矛盾.

命题2.1.5 闭凸集 A 是所有包含该集合的闭半空间的交.

证明 令 M 为所有包含集合 A 的闭半空间的交. 那么 $A\subseteq M$. 下证 $M\subseteq A$, 若令 $b\in M$, 但 $b\notin A$. 由命题 2.1.4, 存在平面 P 分离空间为两部分 Q 和 S, $A\subseteq Q$, $b\in S$. 那么 A 包含在闭半空间 $\overline{Q}$ 中且 $b\notin\overline{Q}$. 因此, $b\notin M$, 也就是说 $M\subseteq A$. 那么, $A=M$.

命题2.1.6 如果 A 和 B 为 $\mathbb{R}^n$ 中的闭凸集, $A\bigcap B=\varnothing$, 且 B 是一个有界集, 那么存在一个 $n-1$ 维平面分离 A 和 B.

证明 令 a 和 b 为命题 2.1.2 中取得的点. 作平面 P 垂直线段 $\overline{ab}$ 上的一点 m, 这里 m 不是线段 $\overline{ab}$ 的端点. 根据命题 2.1.4 可知, P 分离 A 和 B.

定义2.1.2 对于凸集 $A\in\mathbb{R}^n$, 如果在 $n-1$ 维平面 P 的一侧没有 A 中的点, 但在 A 中存在位于 P 上或在 P 的另一侧且任意靠近 P 的点, 那么称 P 为 A 的支撑平面.

命题2.1.7 过闭凸集 A 的边界 Γ 上的任一点都可作一个支撑平面.

证明 令 $a\in\Gamma$, 点 $b_i\notin A$, $b_i\to a, i\to\infty$. 由命题 2.1.4, 存在平面 P_i 分离点 b_i 和集合 A. 令 v_i 为由 a 指向 P_i 且垂直于 P_i 的单位向量. 那么对所有的 $x\in A, y\in P_i$, 有 $\langle v_i,x\rangle\leqslant\langle v_i,y\rangle\leqslant\langle v_i,b_i\rangle$. 在序列 $\{v_i\}$ 中取收敛的子列 $\{v_{ik}\}$, $v_{ik}\to v, k\to\infty$. 则有 $\langle v,x\rangle\leqslant\langle v,a\rangle$, $\forall x\in A$, 也就是说集合 A 位于平面 $\langle v,x\rangle=\langle v,a\rangle$ 的一侧, 且 a 位于这个平面上. 因此, 和向量 v 垂直的这个平面就是 A 的一个支撑平面.

命题2.1.8 如果集合 A 中只有有限个点, 那么 $\mathrm{co}A$ 是由这有限个点的所有凸组合所构成的集合.

证明 记集合 $A=\{x_1,\cdots,x_k\}$ 中的点的所有凸组合所构成的集合为 B. 容易验证 B 是一个凸闭集. 由于 $B\supseteq A$, 因此 $B\supseteq\mathrm{co}A$.

任何闭半空间 Q 都可以写成 $\langle c,x\rangle\leqslant\gamma$, 这里 c 是一个常向量, γ 是一个常数. 如果点 $x_i\in Q, i=1,\cdots,k$, 也就是说 $\langle c,x_i\rangle\leqslant\gamma, i=1,\cdots,k$, 那么对任意的点 $x\in B$, 有 $\langle c,x\rangle\leqslant\gamma$ 成立, 即 $x\in Q$. 因此, $B\subseteq Q$. 由于 $\mathrm{co}A$ 为所有包含 A 的闭半空间的交, 故 $B\subseteq\mathrm{co}A$. 所以 $B=\mathrm{co}A$.

命题2.1.9 如果集合 A 位于闭半空间 $Q=\{x\mid c\cdot x\leqslant\gamma, c\text{ 为一向量}\}$ 中, 则 $\overline{\mathrm{co}}A$ 也位于 Q 中.

证明 根据命题 2.1.5, $\overline{\mathrm{co}}A$ 是所有包含 $\overline{\mathrm{co}}A$ 的闭半空间的交, 也就是所有包含集合 A 的闭半空间的交. 所以 $\overline{\mathrm{co}}A\subseteq Q$.

下面不加证明地给出如下的结论.

命题2.1.10[127] 对于 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集 A, 任意点 $x\in\mathrm{co}A$ 都可以表示成 A 中的点 $x_i, i=0,1,\cdots,k$ 的凸组合, 这里 $k\leqslant n$.

根据命题 2.1.10, 可以得到下面的推论.

推论2.1.1 如果 A 是一个有界闭集, 那么 $\mathrm{co}A=\overline{\mathrm{co}}A$.

定义2.1.3 对常数 $\varepsilon>0$, 集合 M 的闭 ε 邻域 M^ε 意指所有与 M 的距离不超过 ε 的点的集合, 即 $M^\varepsilon=\{x\mid\rho(x,M)\leqslant\varepsilon\}$.

显然, M^ε 是一个闭集. 对任意的 $a\notin M^\varepsilon$, 有 $\rho(a,M^\varepsilon)=\rho(a,M)-\varepsilon$.