面向21世纪高职高专教材

高等数学
学习指导

赵红革 主编

经济日报出版社

面向21世纪高职高专教材

高等数学学习指导

主　编：赵红革

副主编：宋振新　高　华

编　委：满常顺　胡文英　彭　刚
王艳梅　任士宏　杨雪宏

经济日报出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/田文秋　宋振新　赵红革主编
北京:经济日报出版社，2003.6
ISBN 7-80180-177-6

Ⅰ.高…
Ⅱ.①田…②宋…③赵…
Ⅲ.①高等数学-高等学校:技术学校-教材
Ⅳ.G·013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 036455 号

高等数学

主　　编	田文秋　宋振新　赵红革
责任编辑	刘之光
责任校对	史鸿飞
出版发行	经济日报出版社
地　　址	北京市宣武区白纸坊东街 2 号(邮政编码:100054)
销售电话	010-63582221
网　　址	edp ced com.cn
E-mail	edp @ ced com cn
经　　销	全国新华书店
印　　刷	北京振兴源印务有限公司
开　　本	850mm×1168mm 1/32
总 印 张	29 00
总 字 数	700 千字
版　　次	2003 年 6 月第一版　2004 年 8 月第一次修订
印　　次	2004年 8 月第二次印刷
书　　号	ISBN 7-80180-177-6/G·034
总 定 价	45 80 元(全套)

前　言

在我国大力发展高等教育、扩大高校招生的形势下，为了帮助高职高专学校学生学习高等数学课程，为专科升(接)本科考试打好教学基础，特编写此书。

参加本书编写的教师多年从事高等数学的教学工作，积累了丰富的教学经验。本书内容紧扣教育部关于《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，突出教学重点，注重强化读者对基本概念的理解和定理、公式的应用。

考虑到部分学生数学基础薄弱，书中所选例题类型全面，分析透彻，解答详尽，疑难之处予以注释。章后编有自测题并附有教材和自测题的答案。同时，本书最后提供了2套高等数学专升(接)本模拟试题及答案。

本书第1~3章由山东水利职业学院赵红革编写；第4章由浙江工业职业技术学院高华编写；第5章由山东省日照铁路实验学校满常顺编写；第6~7章由河北能源职业技术学院宋振新编写；第8章由河北能源职业技术学院王艳梅编写；第9章由河北能源职业技术学院杨雪宏编写；第10章由岭南职业技术学院彭刚编写；第11~13章由辽阳职业技术学院任士宏编写。

目　录

第1章　函数、极限与连续

一、知识网络

(一) 基本概念

极限、无穷小量与无穷大量、连续.

(二) 几种关系

1. 极限与左、右极限的关系

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

2. 无穷小量与无穷大量的关系

无穷大量的倒数为无穷小量.

3. 极限与无穷小量的关系

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=A \Longleftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$,其中 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\alpha(x)=0$.

4. 有界函数与极限

若在某一变化过程中 $f(x)$ 有极限,则 $f(x)$ 必定是有界函数;反之,有界函数未必有极限.例如, $x_n=\dfrac{1+(-1)^n}{2}$,显然 $|x_n|\leqslant 1$, x_n 有界,但 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 不存在 .

5. 极限与连续

$f(x)$ 在 x_0 点连续,则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 必存在且等于 $f(x_0)$,反之,若 $f(x)$ 在 x_0

点处有极限，但在 x_0 点处不一定连续.

(三)求极限的方法

1. 利用函数的连续性求极限

2. 利用四则运算法则求极限

3. 利用无穷小量的性质求极限

利用重要结论：若 $x \to x_0$ 时，$f(x)$是无穷小量，而 $g(x)$是有界函数，则$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x)=0$.

4. 利用两个重要极限求极限

$$\lim_{x \to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x \to \infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$$

是两个求极限时很有用的公式.

5. 利用等价关系求极限

(四) 间断点及其分类

若$f(x)$在 x_0 点不连续，则称 x_0 是$f(x)$的间断点.

1. 第一类间断点：$f(x_0+0)$与 $f(x_0-0)$都存在，这种情况又可分为两种：

(1) $f(x_0+0)=f(x_0-0)$，即$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在，这时可能是$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$，也可能$f(x)$在 x_0 点无定义，这种情况下，只要改变 x_0 点的函数值或适当定义在 x_0 点的函数值，函数$f(x)$在 x_0 点就会连续，因此，这种间断点称为可去间断点；

(2) $f(x_0+0) \neq f(x_0-0)$，这时称 x_0 为$f(x)$的跳跃间断点.

2. 第二类间断点：$f(x_0-0)$，$f(x_0+0)$至少有一个不存在，其中无穷间断点便属于此类间断点.

(五) 连续函数的性质

1. 初等函数在其定义域内连续.这是一个非常重要的结论，因为我们常见的主要是初等函数，它们都是连续函数.

2. 闭区间上连续函数的性质

主要是连续函数可在闭区间上取得最大值和最小值以及根的存在性定理，这些定理在理论研究中有重要意义.

二、重点与难点

本章的重点是：

极限求法与函数连续性的判定. 求极限的方法有多种(上面已列举)，针对不同的函数形式，要正确选择适当的方法.必要时，要先对已知函数作适当的变形，而判定函数的连续性，首先应用“初等函数在其定义域内连续”这一结论，如果已知函数为初等函数，则求其定义域即可；如果已知函数为分段函数，则主要利用函数在一点处连续的定义，判定已知分段函数在分界点处的连续性.

本章的难点是：

1. 求极限.这是重点也是难点.由于极限的求法灵活多变，且许多函数需要进行适当的变形，使之成为符合要求的新函数，这一过程又无定则，致使求极限产生困难.只有观察已知函数，并将多种已知函数进行分类，逐步掌握变形技巧，才能通过多做多练突破难点.

2. 求分段函数在分界点处的连续性，此类问题应根据$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$来判定，而在求$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$时，分左、右极限两种情况，并且两种情况下的$f(x)$(由于$x_0$点是分界点)可能对应着不同的表达式，应注意正确选取.

三、知识点精析

[例 1] 求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+\sin x}{e^x\sqrt{1+x^3}}$;　　　(2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-x^3}-\dfrac{1}{1-x}\right)$;

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{x-1}$.

(1) **分析**　$\dfrac{x^2+\sin x}{e^x\sqrt{1+x^3}}$是初等函数,而 2 是其定义域内的一点,利用函数的连续性即可求出极限.

解: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+\sin x}{e^x\sqrt{1+x^3}}=\dfrac{2^2+\sin 2}{e^2\sqrt{1+2^3}}=\dfrac{4+\sin 2}{3e^2}$;

(2)**分析**　$\dfrac{3}{1-x^3}-\dfrac{1}{1-x}$ 当 $x\to 1$ 时,不满足运算法则条件的情况,应先通分,再消去分子分母中相同的无穷小量,然后进行计算.

解: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-x^3}-\dfrac{1}{1-x}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3-(1+x+x^2)}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(2+x)(1-x)}{(1-x)(1+x+x^2)}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2+x}{1+x+x^2}=1;$$

(3)**分析**　将$\dfrac{\sin(x^2-1)}{x-1}$化为重要极限的标准形式,再利用公式计算.

解:　$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{x^2-1}\cdot(x+1)$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x^2-1)}{x^2-1}\cdot\lim_{x\to 1}(x+1)$$

$$=1\times 2=2.$$

[例 2]　求下列函数的连续区间:

(1) $f(x)=\begin{cases} x, & x\neq 1, \\ \dfrac{1}{2}, & x=1; \end{cases}$　　　(2) $f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$.

分析　这两个函数一个为分段函数,应讨论它在分界点 $x=1$

处的连续性;另一个函数是初等函数,求其定义域即可.

解: (1) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1$, 即 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$. 但$f(1)=\dfrac{1}{2}$,

即$\lim\limits_{x\to 1} f(x)\neq f(1)$, $x=1$ 是$f(x)$的间断点,

故 $f(x)$的连续区间为$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

(2) 易知$f(x)$的定义域为$\{x|x\neq 0\}$.故$f(x)$的连续区间为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

[例 3] 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+1}{x+1}+ax+b=0$, 求 a ,b.

分析 这是极限的一种新形式,必须对已知函数进行变形,并在变形后,根据函数的极限值对函数作出正确判断.

解: 由 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+1}{x+1}+ax+b$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1+(ax+b)(x+1)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(2+a)x^2+(a+b)x+(b+1)}{x+1}=0$$

知上面函数的分子中 x^2 与 x 的系数都必须为 0,即有:

$2+a=0,\ a+b=0$

解得 $a=-2,\ b=2$.

[例 4] 试证方程 $x\cdot 2^x=1$ 至少有一个小于 1 的正根.

分析 此问题是闭区间上连续函数介值定理的应用.首先要构造函数$f(x)$及相应的闭区间.

证明 设$f(x)=x\cdot 2^x-1$,

则$f(x)$在$[0,1]$上连续,且 $f(0)=-1,\ f(1)=1$.

因为$f(0)\cdot f(1)<0$, 由介值定理

得 $f(x)$在$(0,1)$内至少存在一点 ξ,使得$f(\xi)=0$.

即 $\xi\cdot 2^\xi-1=0$.

故方程 $x\cdot 2^x=1$ 至少有一个小于 1 的正根.

[例 5]　试求函数 $y=\dfrac{\tan 2x}{x}$ 的间断点的类型.

分析　此函数为初等函数,故根据定义域即可找出间断点,再根据间断点的分类,进一步判断间断点的类型.

解: $y=\dfrac{\tan 2x}{x}$ 是初等函数,初等函数在其定义域内是连续函数,故 $y=\dfrac{\tan 2x}{x}$ 的间断点为 $x=0$ 和 $x=\dfrac{2k\pi+\pi}{4}$ $(k\in\mathbf{Z})$.

又 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{x}=2$,

故 $x=0$ 是此函数的第一类间断点,且是可去间断点.

又当 $x=\dfrac{2k\pi+\pi}{4}$ $(k\in\mathbf{Z})$ 时,函数极限不存在,故为第二类间断点 .

[例 6]　设 $f(x)=\begin{cases} e^x+1, & x>0, \\ x+a, & x\leqslant 0, \end{cases}$ 问 a 取何值时, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在.

分析　此问题是求分段函数在分界点处的极限,应计算左、右极限,并注意此过程中 $f(x)$ 的表达式不同.

解: $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^x+1=2$;

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} x+a=a$,

故 当 $a=2$ 时, $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$,

即 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在.

[例 7]　设 $f(x)=\begin{cases} -x, & x\leqslant 1, \\ 3+x, & x>1, \end{cases}$ $g(x)=\begin{cases} x^3, & x\leqslant 1, \\ 2x-1, & x>1. \end{cases}$

试讨论 $f[g(x)]$ 的连续性 .

分析　此问题是讨论复合函数 $f[g(x)]$ 的连续性,先求出 $f[g(x)]$ 的表达式,即将问题转化为求分段函数的连续性.

解: $f[g(x)]=\begin{cases}-x^3, & x\leqslant 1,\\ 3+(2x-1), & x>1.\end{cases}$

即 $f[g(x)]=\begin{cases}-x^3, & x\leqslant 1,\\ 2x+2, & x>1.\end{cases}$

此函数为分段函数,在 $x<1$,$x>1$ 范围内均为连续的,现在考查在 $x=1$ 的情况:

$\lim\limits_{x\to 1^-}f[g(x)]=\lim\limits_{x\to 1^-}(-x^3)=-1$;

$\lim\limits_{x\to 1^+}f[g(x)]=\lim\limits_{x\to 1^+}(2x+2)=4$.

即 $f[g(1^+)]\neq f[g(1^-)]$,故函数 $f[g(x)]$ 在点 $x=1$ 处间断,在其他点处连续.

四、自测题

(时间 :100 分钟,满分:100 分)

(一)判断题 (正确的画"√",否则画"×".每小题 2 分,共 10 分)

1. 无穷小是一个很小很小的数. ( )
2. 若 $f(x)$ 在 x_0 点无定义,则 $f(x)$ 在 x_0 点无极限. ( )
3. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在,则 $\lim\limits_{x\to x_0}f^2(x)$ 也一定不存在. ( )
4. 方程 $x=\cos x$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内至少有一实根. ( )
5. $x=0$ 是 $e^{\frac{1}{x}}$ 的第二类间断点. ( )

(二)选择题 (每小题 3 分,共 30 分)

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2n+3\cos n^2}{n}=$ ( )

A. ∞ B. 2 C. 3 D. 不存在

2. 当 $x\to 0$ 时,变量 ( )是无穷小量.

A. $\frac{\sin x}{x}$　　B. $\ln(2+x^2)$　　C. $2x-2$　　D. $e^{2x}-1$

3. 若$f(x)$在x_0点有极限,则$f(x)$在x_0处(　　)

A. 左极限存在　　B. 一定有定义

C. 一定无定义　　D. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

4. 若$f(x)=\begin{cases}e^x, & x\leqslant 0,\\ ax+b, & x>0\end{cases}$ 在点$x=0$处连续,则$b=$(　　)

A. 1　　B. -1　　C. 0　　D. 任意实数

5. 下面解法中,(　　)是正确的.

A. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^{x+1}=e^2\cdot e=e^3$　　B. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^{x+1}=e^2$

C. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^{x+1}=1^\infty=1$　　D. 以上解法都不对

6. -1是$\sin\frac{1}{x+1}$的(　　)

A. 连续点　　B. 可去间断点

C. 第二类间断点　　D. 跳跃间断点

7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}=$(　　)

A. 1　　B. 0　　C. -1　　D. 不存在

8. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4}=$(　　)

A. 3　　B. 2　　C. 0　　D. 不存在

9. $\lim\limits_{x\to\pi^+}\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}=$(　　)

A. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. 0　　D. ∞

10. 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$,则(　　)

A. $f(x)=g(x)$　　B. $f(x)\leqslant g(x)$

C. $f(x) \geqslant g(x)$ D. 以上答案都不对

(三)填空题 (每小题 4 分,共 20 分)

1. $y=\arccos^2(x+1)^3$ 的复合过程是________.

2. $f(x)=\begin{cases}2x+5, & x<-1,\\ \dfrac{1}{x}, & x\geqslant -1\end{cases}$ 的间断点是________.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)}{n^2+1}=$________.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}=$________.

5. 当 $x\to 0$ 时, $\sqrt[3]{1+x}-1$ 与 $\dfrac{1}{3}x$ 为 ________ 无穷小.

(四)证明题 (每小题 10 分,共 20 分)

1. 证明当 $x\to 0$ 时, $\tan x-\sin x$ 是比 x^2 高阶的无穷小.

2. 试证任何一元三次方程 $x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$ 至少有一实根.

(五)解答题 (每小题 10 分,共 20 分)

1. 若 $f(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x+1, & x<1,\\ x, & x\geqslant 1.\end{cases}$

讨论 $f(x)+g(x)$ 的连续性.

2. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^x=4$, 求 c.

五、教材习题参考答案与自测题参考答案

习题 1–1

1. 7, 27, 9, $2a^2-3a+7$, $2x^2+x+6$

2. -1, 0, 1, 2, 4

3. $a=\dfrac{7}{3}$, $b=-2$