基础拓扑学

M.A.Armstrong著

孙以丰 译 李同孚 校

北京大学出版社

础拓扑学

M. A. Armstrong 著
孙 以 丰 译
李 同 孚 校

北京大学出版社

新登 （京）159号

基 础 拓 扑 学

北京大学出版社出版
（北京大学校内）
中国科学技术情报所印刷厂印刷
北京新华书店发行所发行
850×1168毫米 32开本 9.5印张 238千字
1983年1月第一版 1991年12月第三次印刷
印数：26500—29500册

ISBN 7-301-00216-5/0·47 定价：5.35元

內容简介

这是一本拓扑学的入门书籍。本书的特点是：1. 注重培养学生的几何直观能力；2. 对于单纯同调的处理重点比较突出，使主要线索不致于被复杂的细节所掩盖；3. 注意使抽象理论与具体应用保持平衡。

全书内容包括：引言，连续性，紧致性与连通性，粘合空间，基本群，单纯剖分，曲面，单纯同调，映射度与 Leschetz 数，纽结与复迭空间。

读者对象为大学数学系学生、研究生，以及需要拓扑学知识的科技人员、教师等。

译 者 前 言

近年来国外出版了许多种拓扑学入门书籍，本书就是其中之一。它的一部分内容曾经作为教材在吉林大学试用过。我们认为，对于我国学习拓扑学课程的大学高年级学生来说，这本书还是一本程度适当，值得推荐的参考读物。

本书作者很注意数学的美。原文在第一章开头引了一条语录，是英国数学家G.H.Hardy的一句名言。大意是说，只有令人产生美感的那一部分数学才可能长久流传。这大概是作者在本书的取材和表述方面为自己立下的一条标准吧。

作者强调几何直观。拓扑学里严谨而形式化的表述方式往往使本质的几何思想被冲淡或被掩盖。这是作者所不欣赏的。在第十章的第二节中虚拟的一段代数学家与几何学家的对话，反映了作者的看法。

在拓扑学里，特别是涉及同调群的那一部分，从引进概念到主要定理的证明，中间有一个较长的，动机不明显，而又容易使人感到‘太抽象’的准备阶段。这个过程往往使初学者扫兴。不过基础一旦建成，就能引出多方面具体而生动的应用。作者则力求使二者取得平衡；使形式化的、抽象的论述与直观性强的内容、具体应用方面的内容有机地穿插在一起。

如果读这本书时果真令人产生某种舒畅的感觉，那或许是原作者按这些想法进行的编排取得了成效。

孙以丰

1981年11月

原 序

这是一本为大学生写的拓扑学。我抱定两个目的来写它：是使学生能接触到点集、几何与代数拓扑学的一些技巧与应用，而又不过分深入其中任何一个领域；二是增进学生的几何想像力，拓扑学究竟是几何学的一个分支。

阅读这本书所需要的预备知识不多：有比较扎实的(按通常理解的)实分析初步、初等群论与线性代数的知识就已足够。不过，在数学上适当程度的'成熟性'却比任何先于拓扑学的预备知识更为重要。

本书总共十章：第一章不妨看作是对拓扑学的一个启发报告。其它九章各有专题：粘合空间、基本群、单纯剖分概念、曲面、单纯同调、纽结与复迭空间等各有一章专门讨论。

在一些地方说明来龙去脉是必需。我认为像这样水平的拓扑书一开始就理所当然似的给拓扑空间来一组公理，是注定要失败的。另一方面，拓扑学也不应写成如同一串供人消遣的杂耍节目(如纽结与地图的染色，住宅到公用设施之间通道的布线，以及观看苍蝇从Klein瓶里逸出等等)。这些东西都各有它们的地位，但必需有机地融合在一个完整的数学理论当中，它们本身并不是最后目的。正因为这个缘故，纽结出现在书的最末一章而不是在一开头。在这里纽结之所以被看中，与其说由于它非常有趣，还不如说由于必需用多种多样的工具与技巧来对付它。

第一章从关于多面体的 Euler 定理开始，本书的要旨着重于探索拓扑不变量及其计算技巧。有些按其本性来说，显见是拓扑不变的数量或性质往往很难计算，反之，一些简单的数量，如同 Euler 示性数等的拓扑不变性，证明起来又极费事。这就使得拓扑学错综复杂。

取材尽量使理论与其应用受到同等重视而保持平衡。比如，同调论的建立是相当麻烦的事(用了整整一章)，于是有必要显示值得花这么多力气(有一整章的篇幅讲同调论的应用)。下笔时贪多的倾向时常难以克制，每写到一个论题总舍不得适可而止。但为了不使篇幅过大，有些内容必需割爱。这里我要特别提到本书没有包含任何计算同调群的比较系统的方法。定义与证明并不总是选取那最简捷的。因为用起来最方便的定义与结果，在初次接触时往往并不那么显得很自然，而本书究竟是一本入门读物，应该注意使初学者容易接受。

对于(英国制)大学三年级程度的学生，一个一学年的课程可以讲完本书的大部分内容。也可有种种方式从本书选一些论题而构成较短的课程，而本书前半部的许多内容甚至可以给二年级讲授。每节末尾附有习题，书末附有简短的文献介绍，并指出那些可以与本书平行阅读，那些可供进一步深入之用。

本书所包含的材料可说都是很基本的，绝大部分在别处也可见到。如果说我作了什么贡献的话，只不过是在取材与表述方面。

有两个论题值得特别提一下。我从 J.F.P.Hudson 那里初次学到Alexander多项式；E.C.Zeeman告诉我怎样对曲面作剜补运算。对他们两人，特别是对Christopher Zeeman教我拓扑学时的耐心，我衷心地表示感谢。

还应同样感谢R.S.Roberts和L.M.Woodward 的多次有益磋商，J.Gibson夫人制备原稿的精湛手艺，以及剑桥大学出版社，允许我从该社出版的 G.H.Hardy 著《一个数学家的自白》一书中采取一句语录置于第一章正文之前。最后，对我的妻子 Anne Marie给予我的不断鼓励专诚致谢。

M.A.A. 于Durham，1978年7月

目　录

1. 引　　论

Beauty is the first test: there is no permanent place in the world for ugly mathematics.

G.H.Hardy

1.1 Euler 定理

一开始，我们来证明一条优美的关于多面体的 Euler 定理。以后将看到这个定理的陈述与证明是拓扑学中很多想法的根源。

图 1.1 中给了四个多面体，看起来各不相同，但是如果我们将顶点数(v)减去棱数(e)，再加上面的数目(f)，则对于这四个

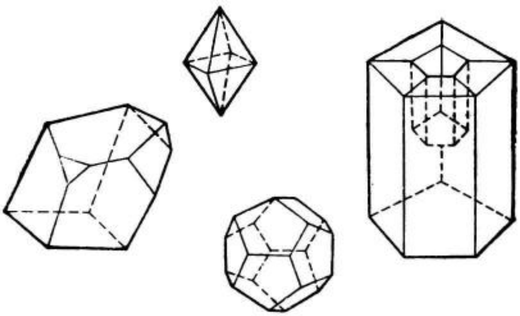
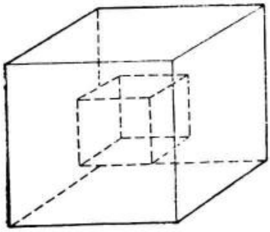


图　1.1

多面体所得到的都是 2。是不是公式$v-e+f=2$对于所有的多面体都对呢？答案是，不；但是对于一大类有趣的多面体，这个结果总是成立的。

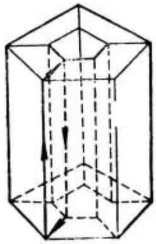
开始也许我们会倾向于只考虑正多面体，甚至凸多面体，对它们来说 $v-e+f$ 确实等于 2。但是，上面所举的例子当中有一个不是凸的，却也满足这个公式，而我们又不愿把它忽略。如果

对图 1.2 与 1.3 进行计算就将分别得到 $v-e+f=4$ 以及 $v-e+f=0$。什么地方出了问题呢？第一个图中多面体的表面分开成两



空心方体

图 1.2



穿孔棱柱

图 1.3

块；用专门一些的语言来说就是这个表面不连通。有理由把这种情形排除在外，因为这两块中的每一块都将使 $v-e+f$ 产生等于 2 的值。但即使是这样，也不能说明图 1.3 的情况，这时多面体的表面只有一整块。不过这个表面有一个重要之点与前面考虑过的例子不同。我们可以在这个表面上找到一个不分割表面为两部分的圈；换句话说，若设想用剪刀沿着这个圈将曲面剪开，则不致于使曲面分成两块。在图 1.3 中用箭头标出了具有这种性质的一个圈。我们将要证明，如果不具有如图1.2与图1.3所列举的缺陷，则多面体必定满足关系 $v-e+f=2$。

作进一步探讨之前，有必要把话说的精确一些。到现在为止(除了谈到多面体的凸性)，实际上只涉及多面体的表面。因此，'多面体'这个辞将用来表示所说的表面，而不是指那些实心的立体。因此，一个多面体是指按下述意义很好地拼凑在一起的有限多个平面多边形。若两个多边形相交，则它们交于一条公共边；多边形的每一条边，恰好还是另一个，并且只有一个多边形的边。不仅如此，还要求对于每个顶点，那些含有它的多边形可以排列成 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_k$，使得 Q_i 与 Q_{i+1} 有一个公共边，$1\leqslant i<k$，

使 Q_k 与 Q_1 有一个公共边。换句话说，这些多边形拼成面上围绕着该顶点的一块区域（多边形的数目 k 则可以随顶点的不同而变动）。这最后一个条件就使两个方体只在一个公共顶点相衔接的情形排除在外。

(1.1)Euler**定理** 设 P 为满足下列条件的多面体：

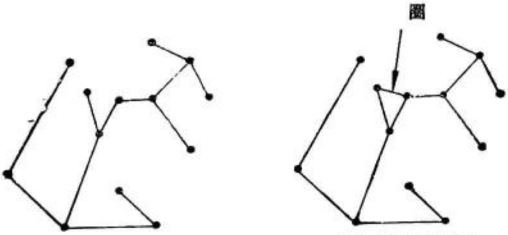
(a) P 的任何两个顶点可以用一串棱相连接；

(b) P 上任何由直线段（不一定非是 P 的棱不可）构成的圈，使 P 分割成两片。则对于 P 来说，$v-e+f=2$。

公式 $v-e+f=2$ 有一段历史。首先，出现在1750年 Euler 给 Goldbach的一封信里。但Euler对所考虑的多面体没加任何限制，他的论证只适用于凸多面体的情形。直到六十多年以后，Lhuilier（于1813年）才注意到如我们在图1.2与1.3中的多面体所产生的问题。定理(1.1)像现在这样的陈述方式以及下面大略给出的证明是von Staudt 于1847年发表的。

证明提要 P 的一组连通的顶点与棱叫作一个图，连通的意思就是任意两个顶点可以用图中的一串棱连结。更一般些，我们将用图这个字来表示三维空间内任何一组如图 1.4 那样很好地衔接起来的有限多个直线段（若两个线段相交，则交于公共顶点）。不包含任何圈的图叫作树形。注意，对于一个树形来说，顶点数减去棱数等于 1。若以 T 来记树形，则可以写成公式

$$v(T)-e(T)=1.$$



(a) 树形　　(b) 非树形的图

图 1.4

按假设(a)，P 的全体顶点与棱构成一个图。不难证明，在任何图中可以找到含有全体顶点的树形子图。于是，我们选择一个树形 T，它包含 P 的某些棱，但包含 P 的全体顶点（图 1.4(a) 对于图1.1所画的多面体之一给出了这样一个树形）。

然后构作 T 的一种'对偶'。这个对偶是按下述方式定义的一个图Γ。相应于 P 的每个面 A 上给出Γ的一个顶点 $\hat{A}$。Γ的两个顶点 $\hat{A}$ 与 $\hat{B}$ 有一条棱相连，当而且仅当它们相应的面 A 与 B 在 P 內有一条不属于 T 的棱公共。人们甚至可以将Γ 在 P 上表示出来，使得它与 T 不相交（顶点 $\hat{A}$ 相当于 A 的一个內点），当然这时要允许它的棱可以有一个曲折点。图1.5显示了作法。

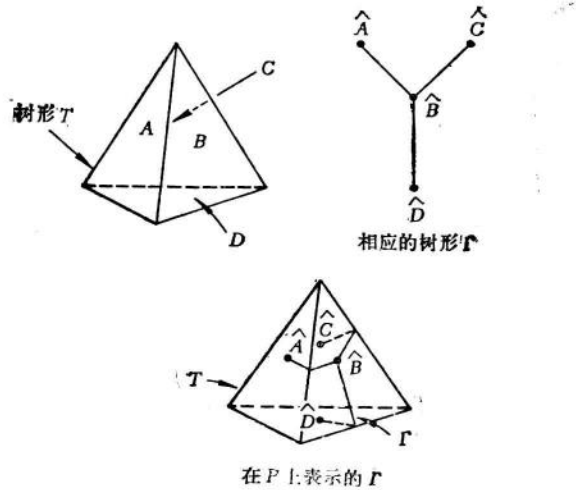


图 1.5

读者不难信服对偶 Γ是连通的，从而是一个图。直观地看，如果 Γ的某两个顶点不能用 Γ 內的一串棱相连结，则它们必然被 T 內的一个圈分开（这需要证一下，我们将在第 7 章给出详细证明）。由于T 不包含任何圈，可以推断 Γ必然连通。

事实上，Γ 是树形。若 Γ 内有圈，则按假设(b)，这个圈将把 P 分成两块，每一块将含有 T 的至少一个顶点。任何想把 T 的分别属于这两块的两个顶点用一串棱相连的尝试，都不可避免地要碰上那个隔离圈，因此，这一串棱不能全在 T 内。这就与 T 的连通性矛盾。因此知道 Γ 是树形(对于像图 1.3 所示的多面体，这个证明就不灵了，因为对偶图 Γ 必定含有圈)。

由于任何树形的顶点数比棱数多1，我们有 $v(T)-e(T)=1$，以及 $v(\Gamma)-e(\Gamma)=1$。
于是

$$v(T)-[e(T)+e(\Gamma)]+v(\Gamma)=2.$$

但根据构造方式

$$v(T)=v,\ e(T)+e(\Gamma)=e,\ v(\Gamma)=f.$$

这就完成了 Euler 定理的证明。

1.2 拓扑等价

Euler 定理有好几个证明。有两点理由使我们选择了上面这个证明。首先是这个证明很精致；其它大多数的证明是对于 P 的面数用归纳法。其次，它给出了比 Euler 公式更多的东西。只要稍微再多费点力气就可证明，P 是由两个盘形沿着它们的边界粘合而得到的。为了看出这一点，将 T 与 Γ 在 P 上略微增厚(图1.6)，得到两个不相交的盘子(将树形增厚总是得到盘形，将有圈的图增厚则得到有空洞的空间)。使这两个盘子逐步扩大直到它们的边界完全重合。这时多面体 P 就由两个具有公共边界的盘形构成。当然这些盘子可以是奇形怪状的，但可以把它们

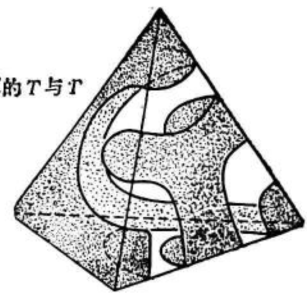


图 1.6

变形，逐步变成又圆又平的圆盘。再回想起球面是由两个盘形，即南半球与北半球沿着公共边界，即赤道，缝合而得的(图1.7)。换句话说，Euler 定理的假设告诉我们，P 看起来在某种意义下就像是变了形的球面。

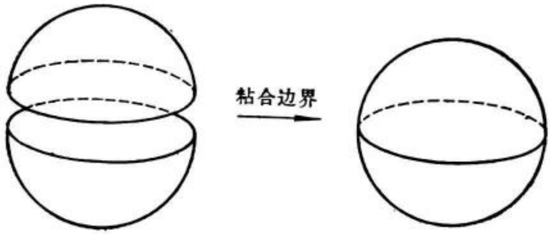


图 1.7

对于特殊的多面体，当然可以很容易地建立它的点与球面的点之间明显的对应关系。例如，对于正四面体 T，可以从 T 的重心 $\hat{T}$ 作向径投影，把 T 映满以 $\hat{T}$ 为中心的某个球面。T 的各个面映为球面上的弯曲三角形，如图1.8所示。事实上 Legendre 正是用这个手段(在1794)对于凸多面体来证 Euler 定理的；后面我们还将叙述 Legendre 的论证。

图 1.1 右边的多面体并不是凸的，上面的论证对它不适用。但如果我们设想它是用橡皮做的，则不难想像怎样把它形变成为一个普通的圆球。在形变过程中可以把多面体任意拉伸、弯曲，*但不允许撕裂，不允许把不同的点粘在一起*。这样所得多面体的点与球面的点之间的对应就是所谓**拓扑等价**，或**同胚**的一个例子。确切地说，就是一对一的连续满映射，并且逆映射也连

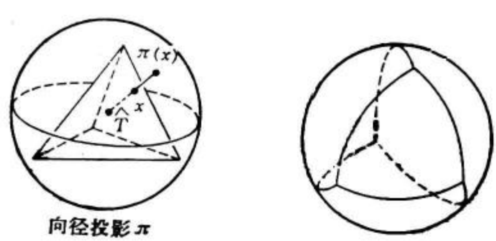


图 1.8

续。

在1.4节中我们将详细地给出同胚的定义，目前为了使得对这个概念的理解比较具体，下面举出四个互相同胚的空间（见图1.9）：

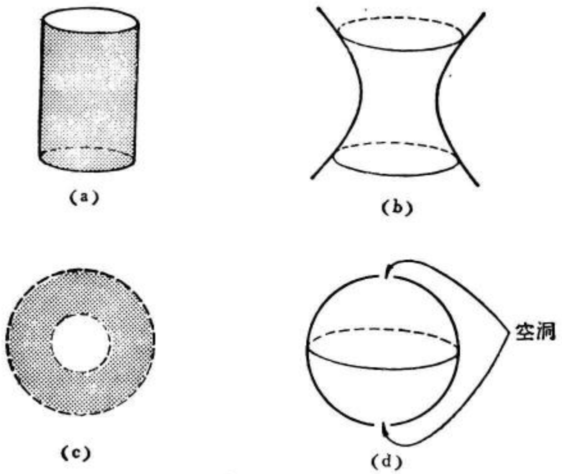


图 1.9

(a) 有限高度的圆柱面，去掉两端的圆周；

(b) 由方程 $x^2+y^2-z^2=1$ 给出的单叶双曲面；

(c) 复平面上由 $1<|z|<3$ 确定的开环形域；

(d) 除去南极与北极的球面。

我们在这里给出空间(b)到空间(c)的一个具体的同胚（连续一对一，满映射，并且逆映射也连续）。将(b)的点用圆柱坐标 (r,θ,z) 来刻画最方便，对于空间(c)，则用平面极坐标来描述。在(b)内当 $\theta=0$ 时，我们得到双曲线 $x^2-z^2=1$ 的一支，设法把它好好地送到环形区域内相应的一段，即射线段 $\{(x,y)\mid 1<x<3,\ y=0\}$。如果能对于每个 θ 都这样作，并且当 θ 从0变到 2π 时所作出的结果连续地依赖于 θ，则将得到所需要的同胚。如以 $f(x)=x/(1+|x|)+2$ 来定义 $f:(-\infty,\infty)\to(1,3)$，则 f 是一对一连续