



普通高等院校“十二五”规划教材



随书附光盘一张

有限元法

——原理、建模及应用

(第2版)

杜平安 于亚婷 刘建涛 编著



国防工业出版社
National Defense Industry Press

普通高等院校“十二五”规划教材

有限元法

——原理、建模及应用

(第2版)

杜平安 于亚婷 刘建涛 编著

国防工业出版社

·北京·

内 容 简 介

本书介绍有限元法的原理、建模及应用。全书共分3篇28章。第1篇介绍有限元法的基本原理,包括平面问题、轴对称问题、杆件系统、空间问题、薄板弯曲问题、动态分析、热分析、电磁场分析、非线性问题以及多物理场耦合问题的有限元法;第2篇介绍有限元建模方法,内容包括建模概述、建模基本原则、几何模型建立、单元类型及特性定义、网格划分、模型检查与处理、边界条件建立等;第3篇介绍有限元分析软件 ANSYS,包括 ANSYS 的特点、组成、功能、几何建模、单元类型、网格划分、求解设置、后处理以及二次开发技术等内容,并给出了分析实例。

考虑到工科学生的特点,本书在原理介绍时尽量做到简练易懂,力求避免复杂繁琐的数学推导,以使读者易于理解复杂的原理;在介绍建模方法时,列举了大量实例,并尽量采用图示说明,以增加内容的直观性和可读性;在介绍软件应用时,注重有限元分析系统共性功能和特点的介绍,以便读者举一反三。在内容方面,强调有限元法涉及的理论、建模方法和软件应用的集成,注重有限元法应用的知识体系建立,旨在将理论和应用相结合,既加强学生理论基础的学习,更注重培养学生解决实际问题的能力。

本书可用作工科类研究生、本科生的学习教材,也可作为工程技术人员的参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

有限元法:原理、建模及应用 / 杜平安,于亚婷,刘建涛
编著. —2 版. —北京:国防工业出版社,2011. 8
普通高等院校“十二五”规划教材
ISBN 978 - 7 - 118 - 07563 - 2

I. ①有... II. ①杜... ②于... ③刘... III. ①有
限元法 - 高等学校 - 教材 IV. ①0241. 82

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 155449 号

※

国防工业出版社 出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售

开本 787 × 1092 1/16 印张 25 字数 571 千字

2011 年 8 月第 2 版第 1 次印刷 印数 1—4000 册 定价 42.00 元(含光盘)

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)68428422

发行邮购:(010)68414474

发行传真:(010)68411535

发行业务:(010)68472764

前 言

有限元法是根据变分原理求解数学物理问题的一种数值方法。自 20 世纪 50 年代提出以来,随着矩阵理论、数值分析方法、特别是计算机技术的发展,有限元法无论是在基础理论还是在实现技术研究上都取得了巨大进步。它从最初的固体力学领域拓展到传热学、电磁学、流体力学以及声学等其他物理场,从简单的静力分析发展到动态、非线性、多场耦合等复杂问题的计算。有限元法是目前最有效的数值计算方法之一,广泛用于机械、电子、航空航天、汽车、船舶、建筑以及石油化工等领域。

本书是在国防工业出版社 2004 年出版的《有限元法——原理、建模及应用》一书的基础上通过修订、扩充、完善形成的。全书共分 3 篇 28 章。第 1 篇介绍有限元法的基本原理,共包括 11 章,分别介绍平面问题、轴对称问题、杆件系统、空间问题、薄板弯曲问题、动态分析、热分析、电磁场分析、非线性问题以及多物理场耦合问题的有限元法。本篇目的是使读者了解有限元法的基本概念、思想和原理,形成有限元理论的一个主体框架;第 2 篇介绍有限元建模方法,内容包括 7 章,分别介绍建模概述、建模基本原则、几何模型建立、单元类型及特性定义、网格划分、模型检查与处理、边界条件建立等 7 章内容。该篇是使读者了解建立有限元模型的基本过程、原则和方法,其内容是应用有限元法的基础和关键;第 3 篇为有限元法的应用,介绍目前常用的有限元分析软件 ANSYS。该篇包括 10 章内容,分别介绍 ANSYS 的特点、组成、功能、几何建模、单元类型、网格划分、求解设置、后处理以及二次开发技术等内容,并给出了 ANSYS 分析实例。该篇目的是期望读者掌握有限元方法的应用手段,并能对前面的原理和建模方法进行实践和体会,形成有限元方法的初步应用能力。

考虑到工科学生的特点,本书在原理介绍时尽量做到简练易懂,力求避免复杂繁琐的数学推导;在介绍建模方法时,列举了大量实例,并尽量采用图示说明,以增加内容的直观性和可读性;在介绍软件应用时,注重有限元分析系统共性功能和特点的介绍,以便读者举一反三。在内容方面,强调有限元法涉及的理论、建模和软件应用的集成,注重应用有限元法的完整知识体系的建立,旨在将理论和应用相结合,既加强学生理论基础的学习,更注重培养学生解决实际问题的能力。

本书由杜平安、于亚婷、刘建涛编著,由杜平安担任主编并进行统稿。其中第 1 章、第 2 章、第 7 章、第 12 章~第 18 章由杜平安编写,第 3 章~第 6 章、第 8 章~第 11 章由于亚婷编写,第 19 章~第 28 章由刘建涛编写。

由于编著者水平有限,书中难免有不妥之处,诚恳希望读者指正!

编著者
2011 年 5 月

目 录

第1篇 有限元法的基本原理

第1章 绪论	1
1.1 有限元法的产生与基本思想	1
1.1.1 差分法	2
1.1.2 变分法	3
1.1.3 有限元法	4
1.2 有限元法的应用特点	6
1.2.1 能够分析形状复杂的结构	6
1.2.2 能够处理复杂的边界条件	7
1.2.3 能够保证规定的工程精度	7
1.2.4 能够处理不同类型的材料	7
1.3 有限元法的应用	7
1.3.1 结构分析	7
1.3.2 热分析	9
1.3.3 流场分析.....	10
1.3.4 电磁场分析.....	11
1.3.5 声场分析.....	12
1.4 有限元法在产品开发中的作用.....	12
1.5 本书编写说明.....	12
第2章 有限元法的基本原理——平面问题有限元法	15
2.1 弹性力学有关知识.....	15
2.1.1 弹性力学的物理量.....	15
2.1.2 弹性力学基本方程.....	17
2.1.3 虚位移原理.....	20
2.1.4 平面问题定义.....	22
2.2 平面问题有限元法.....	25
2.2.1 结构离散.....	25
2.2.2 单元分析.....	26
2.2.3 总刚集成.....	34
2.2.4 载荷移置.....	37
2.2.5 约束处理.....	39

2.2.6	求解线性方程组	40
2.2.7	计算其他物理量	41
2.2.8	计算结果处理	41
2.2.9	结果显示、打印、分析	41
第3章	轴对称问题有限元法	43
3.1	轴对称问题的定义和特点	43
3.1.1	轴对称问题的定义	43
3.1.2	轴对称问题的应力应变特点	43
3.2	轴对称问题有限元法	44
3.2.1	结构离散	44
3.2.2	单元分析	45
3.2.3	单元刚度矩阵	46
3.2.4	总刚集成	48
3.2.5	等效节点载荷的计算	48
3.2.6	约束处理和求解线性方程组	51
第4章	杆件系统有限元法	52
4.1	引言	52
4.2	平面桁架有限元法	53
4.2.1	结构离散	53
4.2.2	单元分析	53
4.2.3	坐标变换	55
4.2.4	总刚矩阵集成	56
4.2.5	节点载荷列阵	56
4.2.6	约束处理和求解线性方程组	56
4.3	平面刚架有限元法	57
4.3.1	结构离散	57
4.3.2	单元分析	57
4.3.3	坐标变换	62
4.3.4	总刚矩阵集成	63
4.3.5	节点载荷列阵	63
4.3.6	约束处理和求解线性方程组	63
第5章	空间问题有限元法	64
5.1	引言	64
5.2	空间问题有限元法	64
5.2.1	结构离散	64
5.2.2	单元分析	64
5.2.3	总刚矩阵集成	68

5.2.4	载荷移置	68
5.2.5	约束处理和求解线性方程组	69
第6章	薄板弯曲问题有限元法	70
6.1	引言	70
6.2	弹性薄板弯曲的能量泛函和微分方程式	72
6.2.1	位移矢量	72
6.2.2	广义应变分量和曲率	73
6.2.3	应力—应变关系	73
6.2.4	广义应力	74
6.2.5	能量泛函和微分方程式	74
6.3	薄板弯曲问题有限元法	75
6.3.1	结构离散	75
6.3.2	单元分析	75
6.3.3	总刚矩阵集成	78
6.3.4	载荷移置	78
6.3.5	边界条件处理	78
6.3.6	求解线性方程组	78
6.4	三角形板单元	78
6.4.1	面积坐标	79
6.4.2	位移函数	80
6.4.3	单元刚度矩阵	81
6.4.4	单元载荷矢量	81
第7章	动态分析有限元法	83
7.1	动态分析有限元法的特点	83
7.2	动态分析有限元法的一般步骤	84
7.2.1	结构离散	84
7.2.2	单元分析	84
7.2.3	总体矩阵集成	86
7.2.4	固有特性分析	86
7.2.5	响应分析	88
7.2.6	结果处理和显示	89
第8章	热分析有限元法	91
8.1	热传导方程及热边界条件	91
8.1.1	热传导方程	91
8.1.2	热边界条件	92
8.2	热分析有限元法的一般步骤	93
8.2.1	结构离散	93

8.2.2	单元分析	93
8.2.3	总刚集成	95
8.2.4	求解温度方程	95
8.2.5	结果显示、分析	95
8.3	热应力的有限元分析	95
第9章	电磁场问题有限元法	99
9.1	引言	99
9.2	电磁场微分方程	99
9.2.1	麦克斯韦微分方程	99
9.2.2	势函数的微分方程	100
9.3	势函数的边界条件和边值问题	101
9.3.1	狄利克莱(Dirichlet)边界条件	102
9.3.2	诺依曼(Neumann)边界条件	102
9.3.3	齐次边界条件	103
9.3.4	势函数的边值问题	103
9.4	平面电磁场问题有限元法	103
9.4.1	结构离散	104
9.4.2	单元分析	104
9.4.3	总刚集成	107
9.4.4	载荷移置	107
9.4.5	边界条件处理	107
9.4.6	求解线性方程组	108
第10章	非线性问题有限元法	109
10.1	引言	109
10.2	非线性方程组的数值解法	109
10.2.1	直接迭代法	110
10.2.2	牛顿法	110
10.2.3	修正的牛顿法	111
10.2.4	增量法	111
10.3	材料非线性问题增量法基本方程和求解过程	112
10.3.1	材料非线性问题增量法基本方程	112
10.3.2	材料非线性问题增量法求解步骤	117
10.4	几何非线性问题的增量法有限元表达格式	117
10.4.1	完全拉格朗日格式——TL	118
10.4.2	修正拉格朗日格式——UL	120
第11章	多物理场耦合问题的有限元法	122
11.1	多物理场耦合问题的定义和分类	122

11.2	流体流动问题的有限元法	123
11.2.1	流体流动的运动方程	123
11.2.2	流体流动的有限元法求解的一般步骤	125
11.3	流—固耦合系统的有限元离散	126
11.3.1	流—固耦合系统的控制方程和边界条件	126
11.3.2	流—固耦合系统控制方程和变分原理	128
11.3.3	耦合系统的离散形式	129
11.4	岩土渗流—结构的耦合系统(域内耦合系统)	130
11.4.1	渗流—应力耦合的基本方程	130
11.4.2	渗流—应力耦合系统的有限元离散	133

第2篇 有限元建模方法

第12章	有限元建模概述	137
12.1	有限元分析过程	137
12.1.1	前处理	137
12.1.2	求解	137
12.1.3	后处理	138
12.2	有限元建模的重要性	139
12.3	有限元模型的定义	139
12.3.1	节点数据	140
12.3.2	单元数据	140
12.3.3	边界条件数据	141
12.4	建模的一般步骤	141
12.4.1	问题定义	142
12.4.2	几何模型建立	143
12.4.3	单元选择	144
12.4.4	单元特性定义	144
12.4.5	网格划分	144
12.4.6	模型检查和处理	144
12.4.7	边界条件定义	144
第13章	有限元建模的基本原则	147
13.1	保证精度原则	147
13.1.1	误差分析	147
13.1.2	提高精度的措施	152
13.2	控制规模原则	153
13.2.1	规模对计算过程的影响	153
13.2.2	降低模型规模的措施	154

第 14 章 几何模型的建立	155
14.1 几何模型的定义和型式	155
14.1.1 几何模型的定义	155
14.1.2 几何模型的型式	155
14.2 形状处理方法	157
14.2.1 降维处理	157
14.2.2 细节简化	158
14.2.3 形式变换	159
14.2.4 局部结构	161
14.2.5 对称性的利用	162
第 15 章 单元类型及特性定义	168
15.1 单元分类	168
15.1.1 一维、二维和三维单元	169
15.1.2 线性、二次和三次单元	169
15.1.3 传弯单元与非传弯单元	170
15.1.4 位移单元和温度单元	171
15.2 单元特性定义	171
15.2.1 材料特性	172
15.2.2 物理特性	172
15.2.3 截面特性	173
15.2.4 单元相关几何数据	176
15.3 常见单元类型	176
15.3.1 平面单元	176
15.3.2 实体单元	177
15.3.3 轴对称实体单元	178
15.3.4 杆单元	178
15.3.5 梁单元	179
15.3.6 板单元	181
15.3.7 薄壳单元	181
15.3.8 轴对称薄壳单元	182
15.3.9 弹簧单元	183
15.3.10 集中质量单元	183
第 16 章 网格划分方法	186
16.1 网格划分原则	186
16.1.1 网格数量	186
16.1.2 网格疏密	188
16.1.3 单元阶次	190

16.1.4	网格质量	191
16.1.5	网格分界面和分界点	192
16.1.6	位移协调性	193
16.1.7	网格布局	193
16.2	网格划分方法	194
16.2.1	半自动分网方法	194
16.2.2	自动分网方法	197
16.2.3	自适应分网	202
第 17 章	模型检查与处理	204
17.1	网格质量检查	204
17.1.1	细长比	204
17.1.2	锥度比	205
17.1.3	网格内角	205
17.1.4	翘曲量	205
17.1.5	拉伸值	206
17.1.6	边节点位置	207
17.2	重合节点检查	208
17.3	重合与遗漏单元检查	209
17.4	带宽优化	209
第 18 章	边界条件的建立	211
18.1	位移约束条件	211
18.1.1	位移约束的必要性	211
18.1.2	约束不足的处理方法	213
18.1.3	位移坐标系	215
18.1.4	绝对位移约束	216
18.1.5	相关位移约束	217
18.2	热边界条件	220
18.2.1	节点温度	220
18.2.2	单元热流	220
18.2.3	单元对流换热	221
18.2.4	单元辐射换热	222
18.2.5	单元和节点热源	223
18.2.6	绝热条件	223
18.3	载荷条件	223
18.3.1	集中载荷	224

18.3.2	分布载荷	225
18.3.3	体积力	226
18.3.4	温度载荷	226

第3篇 有限元法应用——ANSYS 软件介绍

第19章	有限元分析系统概述	228
19.1	有限元分析系统的发展	228
19.2	有限元分析系统的组成及其主要功能	229
19.2.1	前处理模块	229
19.2.2	计算模块	230
19.2.3	后处理模块	230
19.2.4	图形及数据可视化支撑系统	230
19.2.5	数据库支撑系统	231
第20章	ANSYS 概述	232
20.1	ANSYS 技术特点	232
20.2	ANSYS 用户界面	233
20.3	ANSYS 文件格式	235
20.3.1	文件格式	235
20.3.2	文件管理	235
20.4	ANSYS 的组成及其主要功能模块	237
20.4.1	前处理模块(PREP7)	238
20.4.2	求解模块(SOLUTION)	239
20.4.3	后处理模块(POST1 和 POST26)	240
20.5	ANSYS 常用菜单及其功能	240
20.5.1	实用菜单及其功能	240
20.5.2	标准工具条及其功能	247
20.5.3	自定义工具条及其功能	247
20.5.4	主菜单及其功能	247
20.5.5	视图工具条及其功能	249
20.6	ANSYS 分析流程	250
第21章	ANSYS 几何建模方法	256
21.1	几何模型导入方法及实现过程	256
21.1.1	标准格式数据模型文件导入方法	256

21.1.2	CAD 软件模型直接导入方法	258
21.1.3	模型信息检查和修补	260
21.2	ANSYS 几何建模方法	261
21.2.1	自底向上建模方法	261
21.2.2	自顶向下建模方法	268
第 22 章	ANSYS 单元类型和参数设置方法	274
22.1	ANSYS 单元类型及常用单元简介	274
22.2	ANSYS 常用单元的特性参数设置	276
22.2.1	梁单元参数设置	276
22.2.2	壳单元参数设置	278
22.2.3	实体单元参数设置	279
第 23 章	ANSYS 网格划分及模型检查	281
23.1	ANSYS 自由分网方法	281
23.2	ANSYS 映射分网方法	284
23.2.1	面模型采用 ANSYS 映射分网方法的实现过程	284
23.2.2	实体模型采用 ANSYS 映射分网方法的实现过程	286
23.3	ANSYS 扫掠分网方法	289
23.4	ANSYS 单元形状和网格有效性检查	292
23.4.1	单元检查信息输出方式设置	292
23.4.2	单元形状和连接有效性检查	293
23.5	ANSYS 网格修改和重新生成	294
23.5.1	ANSYS 网格局部细化	294
23.5.2	ANSYS 网格改进和清除	295
第 24 章	ANSYS 加载设置和求解技术	296
24.1	ANSYS 软件常用边界条件和施加方法	296
24.1.1	施加自由度约束	296
24.1.2	施加外载荷	299
24.2	ANSYS 求解方法选择和参数设置	301
24.2.1	ANSYS 分析类型选择和参数设置	301
24.2.2	ANSYS 求解器分类和选择方法	304
24.2.3	ANSYS 求解方式	305
第 25 章	ANSYS 后处理及图形显示技术	308
25.1	通用后处理器	308
25.1.1	读入结果数据	309

25.1.2	图形方式显示结果	309
25.1.3	列表方式显示结果	314
25.1.4	路径方式显示结果	316
25.1.5	动画方式显示结果	318
25.1.6	结果数据查询	319
25.1.7	误差估计和显示	320
25.2	时间后处理器	322
25.2.1	时间历程变量观察器	323
25.2.2	定义变量	324
25.2.3	变量运算	325
25.2.4	图形方式显示结果	325
25.2.5	列表方式显示结果	326
25.2.6	变量格式设置	326
25.2.7	动画方式显示结果	327
第 26 章	ANSYS 分析实例	328
26.1	ANSYS 静力分析实例	328
26.1.1	问题描述	328
26.1.2	模型特点分析	328
26.1.3	定义工作文件名和分析标题	328
26.1.4	建立几何模型	329
26.1.5	定义材料属性	330
26.1.6	定义单元类型	330
26.1.7	划分网格	331
26.1.8	设置边界条件	333
26.1.9	求解设置和加载	334
26.1.10	结果查看和分析	335
26.2	ANSYS 模态分析实例	336
26.2.1	问题描述	336
26.2.2	定义文件名和工作标题	336
26.2.3	建立几何模型	337
26.2.4	材料属性定义	337
26.2.5	定义单元类型	337
26.2.6	划分网格	337
26.2.7	设置边界条件	337

26.2.8	求解设置和加载	337
26.2.9	结果查看和分析	339
第 27 章	基于 MATLAB 的有限元分析实现方法	341
27.1	基于 MATLAB 的静力问题有限元分析程序	341
27.1.1	有限元编程的关键技术	341
27.1.2	程序原理及实现	344
27.1.3	计算结果及分析	348
27.2	基于 MATLAB 的模态问题有限元分析程序	349
27.2.1	模态分析求解方程	349
27.2.2	程序原理及实现	349
27.2.3	计算结果及分析	353
第 28 章	ANSYS 参数化编程和二次开发技术	355
28.1	ANSYS 参数化编程概述	355
28.2	APDL 语言	355
28.2.1	APDL 文件生成和运行	355
28.2.2	APDL 的变量参数	357
28.2.3	APDL 的数组参数	359
28.2.4	APDL 的循环与控制	362
28.2.5	宏命令定义和使用	365
28.3	基于 UIDL 的常用功能模块和专用系统开发方法	366
28.3.1	单行参数输入	366
28.3.2	多行参数输入	368
28.3.3	生成信息提示框	369
28.3.4	ANSYS 工具按钮添加方法	371
28.3.5	基于 UIDL 的专用程序开发实例	372
28.4	基于 VC 语言的专用软件开发方法	376
28.4.1	VC 封装 ANSYS 二次开发实现流程	377
28.4.2	VC 封装 ANSYS 二次开发的关键技术	377
28.4.3	分析实例	381
	参考文献	385

第 1 篇 有限元法的基本原理

第 1 章 绪 论

1.1 有限元法的产生与基本思想

工程中的许多问题都可用微分方程和相应的边界条件来描述。例如图 1-1 中的等截面悬臂梁,当自由端受集中力 F 作用时,其变形后的挠度 y 满足微分方程

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{F}{EI}(l-x)$$

和边界条件

$$y|_{x=0} = 0 \quad (1-1)$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 0$$

式中: E 为梁材料的弹性模量; I 为梁截面对中性轴 z 的惯矩; l 为悬臂梁长度。

再如,对于图 1-2 所示结构,其内部温度分布满足微分方程

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

和边界条件

$$\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_{\Gamma} + \alpha(T - T_m) = 0 \quad (1-2)$$

式中: λ 为热传导系数; α 为换热系数; T_m 为介质温度; Γ 为结构边界。

式(1-1)和式(1-2)是对物理问题的数学描述,称为数学模型。这种由微分方程和相应边界条件构成的数学问题称为微分方程边值问题。

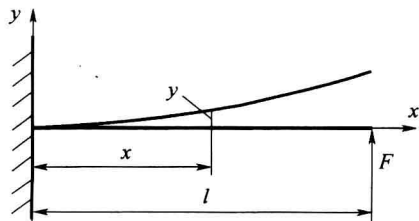


图 1-1 受集中载荷的悬臂梁

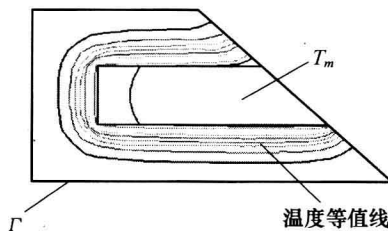


图 1-2 结构温度场

求解物理问题的数学模型,通过所得到的解便可获知物理规律。例如求解式(1-1),可求得悬臂梁的弯曲变形挠度为

$$y = \frac{F}{EI} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right)$$

从上式可知,梁变形后其质心轴为一条三次曲线。在梁的自由端($x=l$ 处),梁的变形挠度最大,为 $Fl^3/3EI$ 。求解物理问题的基本思路可用图1-3表示。

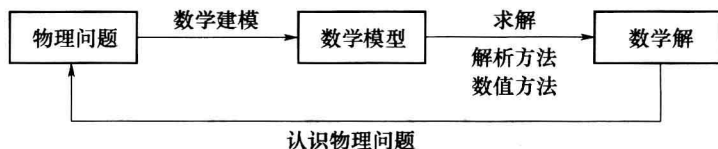


图1-3 求解物理问题的基本思路

求解数学模型通常有两种方法:一种是解析法,它通过严格的数学推导出问题的精确解,或称解析解;另一种是数值法,它通过一定的算法和程序,利用计算机计算出问题的近似解,又称数值解。

在实际工程问题中,由于物理对象几何形状、材料特性和边界条件的复杂性,使得边值问题的求解非常困难。通常除少数简单问题可用解析法求出精确解外,一般都只能通过数值方法求其近似解。

常见的数值方法主要有以下几种。

1.1.1 差分法

差分法的基本思想是用均匀的网格离散求解域,用离散点的差分代替微分,从而将连续的微分方程和边界条件转换为网格节点处的差分方程,并用差分方程的解作为边值问题的近似解。由于差分方程是一组线性代数方程,因而容易求解。

下面用图1-4中的一维问题来说明差分法原理。设未知函数 $y(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上,边值问题为

$$\begin{cases} y''(x) - y'(x) + y(x) = f(x) & (a < x < b) \\ y(a) = d_1 & y(b) = d_2 \end{cases}$$

(1-3)

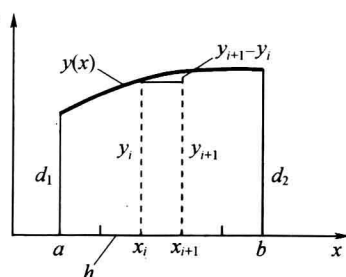


图1-4 一维问题差分法

式中: $f(x)$ 为已知函数; d_1, d_2 为未知函数 $y(x)$ 在边界 a, b 处的值,即边界条件。

首先将区间 $[a, b]$ 划分为 n 等分,即将连续区域 $[a, b]$ 划分为 n 个均匀的直线网格,该过程称为离散。离散形成的 $(n-1)$ 个等分点以及两个端点称为节点,共 $(n+1)$ 个,设为 $x_i (i=0, 1, \dots, n)$ 。相邻两节点之间的距离 h 称为步长, $h = (b-a)/n$ 。

对于每个内节点 $x_i (i=1, 2, \dots, n-1)$,若用节点处的差分近似代替微分,有

$$y'(x_i) \approx \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h}$$

将 $y(x_{i+1}), y(x_i), y'(x_i)$ 简记为 y_{i+1}, y_i, y'_i (以下类似),则上式为