Baoxianfengxian Lilunmoxing

保险风险理论模型

■ 龚日朝／著 ■

中国经济出版社
CHINA ECONOMIC PUBLISHING HOUSE

湖南科技大学出版基金资助
湖南省软科学重点项目（2008ZK2002）资助
教育部人文社科基金项目（07JA790084）资助

保险风险理论模型

龚日朝 著

中国经济出版社
CHINA ECONOMIC PUBLISHING HOUSE
北京

图书在版编目（CIP）数据

保险风险理论模型/龚日朝著

北京：中国经济出版社，2011.2

ISBN 978－7－5136－0221－1

Ⅰ.①保… Ⅱ.①龚… Ⅲ.①保险业—风险管理 Ⅳ.①F840

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 179761 号

责任编辑　刘一玲

责任审读　霍宏涛

责任印制　石星岳

封面设计　白朝文

出版发行　中国经济出版社

印 刷 者　北京市人民文学印刷厂

经 销 者　各地新华书店

开　　本　880mm×1230mm　1/32

印　　张　10.875

字　　数　230 千字

版　　次　2011 年 2 月第 1 版

印　　次　2011 年 2 月第 1 次

书　　号　ISBN 978－7－5136－0221－1/F·8547

定　　价　28.00 元

中国经济出版社 **网址** www.economyph.com **社址** 北京市西城区百万庄北街 3 号 **邮编** 100037

本版图书如存在印装质量问题，请与本社发行中心联系调换（联系电话：010－68319116）

序

风险论已经发展了百余年，对其作出开创性贡献的有 Edmund Halley 和 Daniel Bernoulli。前者构造了世界上第一张生命表，后者提出了以极大效用原理作为决策法则的思想。20 世纪初 Harald Cramér 和 Filip Lundberg 建立了风险论与一般随机过程研究之间的联系，将风险理论奠定在坚实的数学基础上，运用随机过程理论建立保险数学模型，刻画保险公司经营与决策过程，以定量分析的方法度量保险公司破产概率，并为保险公司经营决策提供理论依据。经过百余年无数学者的不懈努力，保险理论得到了飞速发展，如今已形成了一门非常重要的学科。

保险数学模型主要是将保险公司经营过程刻画成一个随机过程，主要由保费收取过程、保险事故发生次数计数过程，以及赔付过程等组成。保险数学模型的研究成为保险理论研究的主体，其主要任务是在研究风险损失（或者叫索赔量）的概率特征分布的同时研究保险公司的破产概率或生存概率和有限时间内的破产概率，以及破产即刻前盈余和破产时刻的赤字等特征量的分布问题。通过这些特征量的刻画，为保险经营过程中的风险评估与预测提供理论工具。

本书作者从 20 世纪 90 年代初开始一直致力于保险理论的研究，取得了非常多的研究成果，特别是在研究复合二项风险

模型理论方面，成果更为突出，不仅解决了完全离散情形的复合二项风险模型破产概率、有限时间内生存概率的显示解问题，而且对一般情形的复合二项风险模型的性质作了深入研究，并得出了其破产概率公式。在 Poisson 风险模型研究方面最突出的成果是最先提出了双 Poisson 风险模型，利用鞅的方法得到了在调节系数存在的假设下破产概率公式和赔付服从指数分布时破产概率的显示表达式，以及有限时间内的生存概率表达式。最近几年，侧重研究巨灾风险，研究巨灾损失重尾分布特征与性质，以及当索赔分布服从重尾分布的条件下各类经典风险模型破产概率的局部解问题，得到了很多经典性的研究成果。这些成果很好地解决了破产概率的计算难题，为保险公司提出了可行的破产概率计算方法。

本书内容具有实用性，对经典风险模型不仅作了更细致的深入研究，而且进行了更符合实际的推广，所得的研究成果更能反映实际情况；不仅运用了概率统计、随机过程等理论和方法，而且运用了组合数学、矩阵理论、博弈论，以及经济学理论等分析方法；不仅包括了作者研究所取得的前沿研究成果，而且根据保险理论体系，收集并整理了国内外目前很多新成果。

本书不仅可作为保险公司在经营决策过程中进行理论分析的参考书籍，而且可作为从事经营保险理论研究的学者，以及高等院校金融和保险专业的硕士、博士研究生的参考书籍。

邹捷中

中南大学教授、博士生导师

2010 年 4 月

目 录

第一章 绪 论

破产论的研究溯源于瑞典精算师 Filip Lundberg 于 1903 年发表的博士论文[1]，至今已有百年历史，然而 Lundberg 最初的工作不符合现代数学的严格标准。于是，以 Harald Cramér 为首的瑞典学派将 Lundberg 的工作奠定在坚实的数学基础之上。现已公认，Lundberg 与 Cramér 的工作为经典破产理论奠定了基础，破产理论已成为使用数学模型来描述和研究保险公司面临风险的一门学科。

经过上百年的研究，保险理论已经得到了飞速的发展，取得了非常多的研究成果，建立了非常经典的保险数学模型。这种模型主要由三个基本的随机过程组成：① 保费收入过程 $\{U(t), t \geqslant 0\}$，通常为时间 t 的决定性函数；② 赔付（或叫索赔）计数过程 $\{N(t), t \geqslant 0\}$；③ 赔付额（或叫索赔额）随机序列 $\{X_i, i = 1,2,3,\cdots\}$。通常假设赔付额是独立同分布的（$i.i.d.$）随机变量，共同分布函数为 F，相应的密度函数为 f，有限数学期望为 μ，且假设 $\{X_i, i = 1,2,3,\cdots\}$ 与赔付计数过程 $\{N(t)\}$ 独立。此外，一般假设保险公司具有初始资本 x。于是，根据上述三个组成部分，保险公司的资本盈余过程为：

$$R(t) = x + U(t) - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \ t \geqslant 0$$

在当今的风险理论研究中，最基本的模型是规定保费收入过程 $U(t) = ct$，其中 $c > 0$ 为常数，表示单位时间内收取的保费，也就是如下经典模型：

$$R(t) = x + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \ t \geqslant 0$$

根据赔付计数过程的差异，上述经典模型可分为复合二项风险模型、复合 Poisson 风险模型和更新风险模型等。对于这些模型的定义以及性质的讨论，本书将在相关章节再给予详细的介绍和讨论。

在风险理论中，在研究风险损失（或者叫索赔量）的概率特征分布的同时，还要研究保险公司的破产概率或生存概率和有限时间内的破产概率，以及破产即刻前盈余和破产时刻的赤字等特征量的分布问题。通过这些特征量的刻画，为保险经营过程中的风险评估与预测提供理论工具。

下面，简单概括一下当今在保险理论方面的主要代表性的研究成果：

关于索赔随机变量的分布，根据其矩母函数大致分为两类：一类是轻尾分布，另一类是重尾分布。如果分布函数 F 满足矩母函数

$$M_F(r) = Ee^{rX} = \infty, \ \forall r > 0 \text{ 成立}$$

则称 X（或其分布 F）是重尾的。否则，如果存在 $r > 0$ 使得 $M_F(r)$ 存在，则是轻尾分布。一般将重尾分布全体记作 K。

关于重尾分布，文献［2］给出了一些非常重要的子类，

而且它们具有如下关系：

$$ERV(-\alpha, -\beta) \subset L \cap D \subset S, S^{*} \subset S \subset L \subset M$$

在此基础上，唐启鹤和苏淳（2001）又引入了 M 族、M^{*} 族，以及 c 族等三个重尾分布子类。王岳宝、成凤炀和杨洋（2005）对重尾分布的判定作了进一步的探讨，得到了一些好的结果[3]。关于它们的定义以及相关性质，可参阅本书第二章或相关文献。

对于轻尾分布，Asmussen S.（2001）P6－9 作了比较简单的介绍[4]。另外，在文献[2]P57 中定义 1.4.9 给出了一类分布族—$S(v)$，$v \geqslant 0$ 分布族。这类分布族当 $v > 0$ 时是属于轻尾分布族的，而当 $v = 0$，则就是重尾分布族中的次指数分布族[2]。在这类分布族的基础上，尹传存（2004）定义了一类子分布族 $S^{*}(v)$，$v \geqslant 0$，并给出了几个相关性质[5]。

关于复合二项风险模型的研究，目前主要是在完全离散情形下进行研究。Gerber（1988）运用鞅论证方法，在破产为盈余资本小于或等于 0 的定义下得到了破产概率的卷积公式[6]。Shiu（1989）在他的基础上，在本文破产定义的条件下，得到了类似的结果[7]。他们的这些结果是非常复杂的，基本上很难于实际计算。Willmot G. E.（1993）在他们的基础上，运用概率母函数的方法，通过研究有限时间内的生存概率，首先得到了其递推解，最后通过极限方法，得到了破产概率的概率母函数形式解[8]。成世学和伍彪（1999）研究了保险公司生存到固定时刻 n 并且在此时刻 n 的盈余为某数 $x(x \geqslant 0)$ 的概率的递推公式[9]。龚日朝与杨向群（2001）又在成世学和伍彪

(1999) 的基础上，进行更细致的考虑，研究了保险公司生存到固定时刻 n 并且在此时刻 n 恰好发生 k 次赔付且此时的盈余为某数 $x(x \geqslant 0)$ 的概率的递推公式，由此得到了有限时间内的生存概率[10]。另外，Shixue Cheng，Hans U. Gerber & Elias S. W. Shiu（2000）研究了在初始资本为 u 的条件下，破产即刻前的盈余为 $x(x \geqslant 0)$，而且破产时刻的亏损为 y 的概率[11]。最近几年，一些学者对模型进行了一些推广，Hélène Cossette, et al.（2004）在马氏环境下进行了研究，得到的依然也是递推解[12]。张茂军和南江霞（2005）对保费收取过程进行了推广，得到了破产概率的积分方程[13]。Jiyang Tan & Xiangqun Yang（2006）在具有随机决策红利的条件下，研究了破产概率以及 Gerber-Shiu 折现惩罚函数的渐进关系[14]。

对于一般情形的复合二项风险模型，柳向东和杨向群（2001）其这种模型进行了研究，分析了模型的基本性质，但是没有研究破产概率的问题[15]。龚日朝和杨向群（2001）运用概率核的方法研究了当赔付随机变量服从指数分布时有限时间内的生存概率，得到了其 Laplace 变换解[16]。同时龚日朝和杨向群（2001）运用鞅方法，在调节系数存在的条件下，得到了破产概率的一个表达式[17]。龚日朝和刘永清（2001）将复合二项风险模型的保费收入过程由单位时间内收取定常数推广为一个 Poisson 过程，即在单位时间内收取的保单数服从强度为 $\lambda > 0$ 的 Poisson 分布，假定每张保单的保费均为常数。然后研究了当赔付服从参数为的指数分布时，有限时间内的生存概率[18]。

关于经典 Poisson 风险模型，目前研究的文献非常多。在假设调节系数存在的情况下，人们已经取得了很多关于破产概率的经典性结果，可参见文献[2, 19, 20]。在调节系数不存在的情况下，近几年开始受到重视，但主要集中在赔付分布为重尾分布的情形。取得的一些非常经典的结论概括起来是：如果赔付分布 $F \in D$，或者 $F_e \in S$，其中 D 和 S 是重尾分布族中的两个重要的分布子族，则都有

$$\Psi(x) \sim \frac{1}{\rho}\overline{F}_e(x)$$

这一结果可见文献[2]P54 推论 1.4.5. 另外，唐启鹤（2002）给出了如果 $F \in S^*$，则对任意实数 $z > 0$，有局部渐进关系：[21]

$$R(x,x+z] \sim \frac{z}{\rho\mu}\overline{F}(x)$$

关于 Poisson 模型的推广问题，又主要是从三个方面入手，即保费收入过程、赔付过程和带干扰等三个方面。

关于保费收入过程的推广，戚懿、王静龙和汪荣明（1999）在经典的破产概率模型中，讨论了在保险公司先按某一固定常数 c 作为收取保费的费率，然后若公司的盈余超过某个上限时，则适当地减少保费率，若公司盈余低于某个下限时，则适当地增加保费率。首先引入了破产前盈余，破产时盈余及破产时刻的联合密度函数，并以此来讨论了当盈余首次低于初值时的一些情况，接着分别讨论了有上下限调整时如何求破产概率的问题和考虑同时有上下限调整时的破产概率问题[22]。另外，孙立娟、顾岚（1999、2000）在假设保费收入

依然是一个 Poisson 过程的情形下进行了研究，得到了破产概率的上界估计，并进行了随机模拟[23,24]。王黎明和金衍(2000)、龚日朝和李凤军（2001）利用鞅的方法，得到了在调节系数存在的假设下破产概率公式和赔付服从指数分布时破产概率的显示表达式[25,26]。龚日朝（2001）又得到了赔付服从指数分布时有限时间内的生存概率[27]。

关于赔付过程的推广，戚懿（1999）研究了广义复合 Poisson 风险模型，即在充分小的时间内发生事故的次数至多一次但在同一事故发生时刻可能发生多起赔付的情况，得到了其破产概率的一个表达式[28]。龚日朝和杨向群（2001）在戚懿（1999）的基础上，得到了破产概率的上下界估计式[29]。

当今，对考虑带干扰的经典 Poisson 风险模型的研究，有非常多的文献资料。一般模型定义如下：

$$\sigma(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i - ct - \alpha W(t), t \geqslant 0$$

其中 $\{W(t), t \geqslant 0\}$ 是一个标准的布朗运动。这一模型是 Gerber（1970）最先通过经典 Poisson 风险模型推广的[30]。Dufresne & Gerber（1991）研究了根据不同要素而引起的破产概率[31]。Cary Chi-Liang Tsai（2003）研究了现值期望问题[32]，Liu Taisheng（2000）给出了生存概率的表达式[33]：

$$R(x) = (1 - \lambda\mu)\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda\mu)^n E^{*(n+1)}(x) * F_e^{*n}(x)$$

Dufresne & Gerber（1991）在赔付分布为次指数分布的条件下，考虑了破产概率的问题[34]。

关于更新风险模型，任何一本风险理论的书籍中都有相关

的内容，目前对其研究最热的是当赔付服从重尾分布的情形。概括起来有如下基本结果：

在满足安全负荷条件下，对于普通更新模型（包括 Poisson 风险模型）、平衡更新模型、延迟更新模型，如果赔付分布 $F \in D$，或者 $F_e \in S$，则都有

$$\Psi(x) \sim \frac{1}{\rho}\overline{F}_e(x)$$

这些结果中，对于普通更新模型下的结果由唐启鹤和苏淳（2000）给出[35]，在平衡更新模型下的结果由孔繁超、曹龙以及唐启鹤等（2002）给出[36]。延迟更新模型下的结果苏淳、江涛和唐启鹤（2002）给出[37]。关于更新模型下生存概率的局部解问题，最近也有相关的研究，唐启鹤（2002）、江涛和陈宜清（2004）运用由 Kalashnikov 所引入的几何方法分别得到了 Poisson 风险模型和平衡更新风险模型下，当 $F \in S^*$ 时的结果，概括为[38,39]：对于 Cramér-Lundberg 风险模型和平衡更新风险模型，若 $F \in S^*$，则对任意 $z > 0$，都有

$$R(x, x+z] \sim \frac{z}{\rho\mu}\overline{F}(x)$$

另外，Gerber 和 Shiu 于 1988 年引入了 Gerber-Shiu 折现惩罚函数。通过这一函数，无数的学者对上述各种类型的模型的特征量进行了开创性的研究工作，取得了非常多的研究成果，这里就不再一一阐述。

纵观上述大致的研究现状，虽然理论上取得了非常多的研究成果，但是依然还存在很多的不完善之处。比如模型如何才能更贴近现实过程？模型的破产概率是否存在显示的表达式而

且便于计算？如果很难确定破产概率的显示表达式，能否对其进行估计，或者说给出近似结果或渐进结果？对于这些问题，我们在近十年的时间内一直在进行专门研究，也取得了一些非常好的研究成果。另外，目前我国还没有太多的专著系统地研究这些问题和总结最新的研究成果。基于以上的认识，出版该专著，希望能对研究保险模型的理论问题起到一定的参考价值。

本书是在作者近十年研究成果的基础上，特别是基于博士学位论文和硕士学位论文的基础上，并结合近几年所主持的课题成果而完成的。主要研究金融风险理论中保险模型，以及巨灾风险及保险管理问题，本书从内容上大致分为两部分：

第一部分主要是研究风险损失概率分布。该部分主要对风险损失进行分类，分为一般损失风险和巨灾损失风险。相应的，它们的概率分布分为轻尾分布和重尾分布。对此，本书给出这些分布的定义、性质，特别是分类的方法，其中对描述巨灾损失事件的重尾分布作了比较详细研究。最后给出了一些常见的具体分布。

第二部分主要研究金融保险数学模型。该部分分为三大块：第一块是离散风险模型中的复合二项风险模型理论问题；第二块是 Poisson 风险模型理论问题；第三块是更新风险模型理论问题。

对于这些模型主要的研究工作可以分为两个方面：一是对经典的模型进行研究，在前人研究成果的基础上，研究他们不完善的理论问题。具体主要集中在研究破产概率的显示表达式

或近似估计问题，这些问题都是前人研究成果中没有解决的问题。二是根据现实情况，进一步推广经典的风险模型，使得模型与实际更接近一步，然后对推广后的模型从性质开始到上述研究的方面内容进行研究。

本书可以概括出如下几个特色：一是理论具有前沿性。本书中保险模型的理论，不仅是作者近几年站在研究前沿开展研究所取得的前沿研究成果，而且是根据理论研究的体系，收集并整理了国内外目前研究的大部分主要研究新成果，其中还有一些内容是作者研究得到，但目前还没有正式发表的成果。二是方法具有多样性。本书在研究过程中，不仅运用了概率统计方法、随机过程的理论和方法，而且运用了组合数学、矩阵理论、博弈论以及经济学理论分析方法。在研究过程中运用随机过程理论建立保险随机模型，运用概率统计方法刻画风险损失以及识别和评估巨灾风险，运用组合数学方法研究离散模型的性质和破产概率等特征量，运用矩阵理论描述转移概率，表达破产概率的表达式等。三是内容具有实用性。本书的研究内容中，对经典风险模型进行了更符合实际的推广，所得的研究成果更能反映实际情况，因此，实用性比传统理论更好。另外，对巨灾风险问题进行研究，对我国开展巨灾保险具有非常现实的指导意义。

当然，该书还存在很多不足甚至可能存在一些错误，这些我们将继续开展研究，不断地对理论进行完善和补充。