模块教材

高中新课标

数学

总主编：毛文凤 / 本册编著：孙志人 张丽丽

组合与图论初步

中国大百科全书出版社

新课标高中数学模块教材

组合与图论初步

本册编著：孙志人（南京师范大学数科院副教授，理学博士）

张丽丽（河海大学讲师，理学博士）

中国大百科全书出版社

总编辑:徐惟诚　　　社　长:田胜立

图书在版编目(CIP)数据
组合与图论初步/毛文凤主编.-北京:中国大百科
全书出版社,2005
新课标高中数学模块教材
ISBN 7-5000-7218-X
Ⅰ.组… Ⅱ.毛… Ⅲ.代数课—高中—教学参考资料
Ⅳ.G634.603
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 142245 号

策划设计:可一图书　(http://www.keyibook.com)
责任编辑:简菊玲

新课标高中数学模块教材
组合与图论初步
* * *
中国大百科全书出版社出版
全国新华书店经销
http://www.ecph.com.cn
北京阜成门北大街 17 号　邮编:100037　电话:010-88390797
山东省沂源县教育印刷厂
* * *
2005 年 7 月第 1 版　2005 年 7 月第 1 次印刷
890×1240 毫米　32 开本　8.5 印张　154 千字
ISBN 7-5000-7218-X/G·816
定　价:12.00 元

序

李君华

普通中学数学课程标准的颁布引发了一场教学内容的大改革。与时俱进地审视数学课程教学的内涵，已成为人们关注的问题。人们开始正视传统的教材构成、传统的教学模式、传统的评价标准所产生的负面影响——学生缺乏学习数学的兴趣。

本模块教材系列的编写其旨意就是要在纷繁杂乱的数学读物中，编出一套能体现数学独特的知识和能力、历史和人文、情感和价值观的数学用书，从而最大限度地调动学生对数学的兴趣。数学作为一门科学，应注重概念清晰、计算正确、论证有据；数学作为一种文化，应让人在数学读物中体会到它的文化价值。因此适当地介绍数学文化的演绎过程及它对推动社会发展的作用与展望它的发展趋势是十分必要的，是符合新课标理念的。当然，归根结底，针对中学生的任一数学读物都是有着教育功能的，在这套模块教材中我们特别着重做到三个结合：适度的形式化与启发兴趣形式相结合，发展学生的思维能力与增强数学的应用能力相结合，掌握扎实的基础知识与拓展数学视野、培养创新精神相结合。

纵观每一分册的写作均分三个层次：第一层次为引论，背景资料、数学史话、名人轶事或自撰小品等简洁地勾画出通往所述数学模块专题内容的千年路径或近代畅想，使读者产生“登高望远”的感觉或“源远流长”的体会。第二层次为主体构架，与新课程相伴，通过解惑的方式，深入浅出地讲解数学，着重思维训练、方法积累与能力提高。第三层次为提高延伸部分，与新课标的选修内容（指高中）相配合，这是特地为对数学有浓厚兴趣的青少年朋友安排的，希望同学们能喜欢它。

这三个层次，在本系列丛书不同的模块分册中，有的是以章节为标志，层次分明、一目了然，有的则是溶于章节之中相互渗透、各显特色。

这次参与丛书编写的作者，集中了目前数学普通教育的一些著名专家教授和教学一线的顶尖教师，尽管他们的认真负责精神和专业能力是毋庸置疑的，但由于编写时间仓促及作者对数学新课标的认识和实践水平有限，丛书在编写过程中难免有不足和疏漏之处，恳请广大读者批评指正。

（作者系南京师范大学数科院教授）

前　言

组合数学是一个古老而又年轻的数学分支。

据传说，大禹在4000多年前就观察到神龟背上的幻方……

众所周知，组合数学是一个迷人的数学分支。它主要研究一组离散对象满足一定条件的安排的存在性以及这种安排的构造、枚举个数及优化问题。它是整个离散数学的一个重要组成部分。

组合数学的蓬勃发展则是在计算机问世和普遍应用之后。由于组合数学涉及面广，内容庞杂，并且仍在很快地发展着，因而还没有一个统一而有效的理论体系。这与数学分析形成了对照。

随着计算机科学、数字通讯理论、规划论和实验设计等近代科学技术的发展，组合分析已成为很多前沿学科的基础。特别是计算机科学的飞速发展，给组合数学注入了新的生机与活力。组合数学的离散性及算法与计算机的联姻在现代科学技术中正发挥着愈来愈大的作用，并且在计算机科学、管理科学、电子工程、数字通讯等诸多领域有着极为广泛的应用。

本书共分为两篇九章。第一篇介绍了形形色色的组

合问题。其中第一章介绍排列与组合，第二章介绍抽屉原理，第三章介绍容斥原理，第四章介绍递推关系，第五章介绍幻方，另外鉴于对古老的课题——幻方有兴趣的人颇多，我们编述了有关幻方的内容，并且对各种构造方法给出严谨的证明。第二篇为图论部分。通过学习，学生可以认识到图和网络是许多实际问题的重要数学模型，并且认识到研究它们的重要性。第六章介绍图的基本概念，第七章介绍树与二部图，第八章介绍拉姆齐(Ramsey)问题，第九章介绍欧拉(Euler)问题与哈密顿(Hamilton)问题。为了可以更好地理解知识，每节与每章后都附有一定数量的练习题，供读者练习与进一步思考。

按照新课程标准，本书倡导学生学习的积极主动、勇于探索，力求激发学生的学习兴趣，提高学生的数学思维能力，发展学生运用数学知识的能力，通过收集大量数学奥林匹克竞赛试题，强化学生的数学应用能力。本书内容丰富，有新意，方法灵活，趣味性与技巧性强，同时也注意到各章之间的相互渗透。我们希望本书能激发读者对组合数学、图论初步等的求知欲以及运用组合、图论技巧和思想解决实际问题的强烈意识，同时也希望能有益于各类数学竞赛。

编者

目　录

引论　组合与图论趣引

数学作为人类智慧的一种表达形式，反映生动活泼的意念，深入细致的思考以及完美和谐的愿望. 它的基础是逻辑和直觉，分析和推理，共性和个性. 毫无疑问，数学的一切进展都不同程度地根植于实际的需要，而且数学现在已经发展成为分支众多的庞大系统. 正如其他学科一样，数学也反映了物质的实际规律，并成为理解自然和征服自然的有力武器. 但是，由于数学本身的高度抽象性，致使它的某些新的分支比较难为非专业的人所理解.

特别值得一提的是，组合数学正是这样一个新的分支. G · C · Rota 在给 C · Berge 的《组合学原理》作序时写道，"当今，面临要作组合思考的论题的大多数数学家，都以下面两个习惯语句中的一句来应付：(a)这是一个纯粹的组合问题，(b)这是一个困难的组合论题. 像施行催眠那样地反复念诵着这两句箴言中的一句，对于念它的人仿佛都能起到安慰作用：能使他不受一切良心上的责备而推卸责任，并把工作任务转嫁到别人的肩上."

一、神龟背上的奇怪发现

相传在公元前 2200 年大禹治水时代，在洛水中曾发现一只神龟，

它的背上有如图 1 所示的图案，这就是闻名中外的“洛书”. 用阿拉伯数字表示，它是一个 3 阶幻方，即，由数字 1 到 9 排成的 3 行 3 列数阵，使得每行每列以及两条对角线上三数之和都相等，这就是组合数学的渊源. 在我国古代的《易经》中，就记载着“河图”和“洛书”. 我国南宋时代的数学家杨辉将这种数阵称为“纵横图”，而今日数学界正式命名为幻方. 它是国际上公认的组合数学的最早起源.

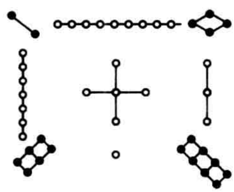

图 1

早期的组合数学经常与宗教迷信以及数学游戏联系在一起. “洛书”在历史上被看作能治病辟邪. 中外历史上许多著名的数学游戏构成组合数学古典部分中的主要内容. 例如，18 世纪提出的 Euler 36 名军官问题和 Kirkman 15 名女生问题. 之后，由于缺乏生产实践和科学技术的刺激，长期以来组合数学发展缓慢. 直到 20 世纪 50 年代，由于许多新兴的应用和理论科学，如计算机科学、通讯网络、信息编码、运筹学、试验设计等的推动，组合数学才迅猛发展起来. 如上所述，目前的组合数学已成为非常活跃的数学分支.

二、哥尼斯堡(Königsberg)七桥背后的故事

哥尼斯堡(Königsberg)七桥位于前苏联的加里宁格勒，历史上曾

是德国东普鲁士省的省会，霹雷格尔横穿城堡，河中有两个小岛 B 与 C，并有七座桥连接岛与河岸及岛与岛(见图 2). 是否存在一种走法，从四块陆地中的任意一块开始，通过每一座桥恰好一次再回到起点. 这就是著名的哥尼斯堡(Königsberg)七桥问题，即一笔画问题；也是图论的起源.

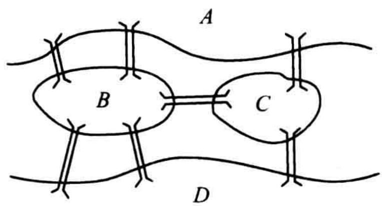

图 2

图论是组合数学的一个分支，也是近几十年来最活跃的数学分支之一. 到目前为止，它已有 260 多年的发展历史. 图论的发展历史大体可以分为三个阶段：第一阶段是图论的萌芽阶段，它从 18 世纪中叶到 19 世纪中叶. 这时，图论的多数问题是围绕游戏而产生的，其代表性的工作就是上面提到的哥尼斯堡(Königsberg)七桥问题. 1736 年 L. Euler 发表了他著名的哥尼斯堡(Königsberg)七桥问题的论文，这是图论的第一篇文章. 第二阶段是图论问题不断涌现、理论逐步建立阶段，它从 19 世纪中叶到 20 世纪中叶. 在这个阶段，图论问题大量出现. 如著名的四色问题、Hamilton 问题以及图的可平面问题等. 在第二阶段还应该特别提到 Cayley 把树应用于化学领域，Kirchhoff 用树去研究电网络的分析问题. 在漫长的 300 年中，图论几乎停留在数学游戏阶段. 虽然这阶段里年仅 21 岁的 G · Kirchhoff 在 1847 年从电网络问

题、A·Cayley 在 1857 年从计算有机化学的同分异构等不止一次地建立起图论的基本概念，但是直到 1936 年 D·König 发表的经典著作《有限图与无限图理论》才有了图论的第一本专著. 20 世纪中叶以后是图论发展的第三阶段，即图论的应用阶段. 由于生产管理、军事、交通运输、计算机网络、计算机科学、数字通讯、线性规划、运筹学等方面提出的实际问题的需要，特别是许多离散性问题的出现、刺激和推动，以及由于有了大型电子计算机，而使大规模问题的求解成为可能，图论及其应用的研究得到了飞速的发展. 这个阶段的开创性工作是以 Ford 和 Fulkerson 建立的网络流理论为代表的. 图论与其他学科的相互渗透，以及图论在生产实际中广泛的应用，都使图论的发展更加充满活力.

三、几个有趣的实例

牛顿曾经说过："在数学中，例子比法则更重要."

1. 多米诺完全覆盖

考虑一个普通的国际象棋棋盘，它有 8 行 8 列，总共分成 64 个方格. 假定有一批形状相同的多米诺骨牌，每块骨牌恰好覆盖棋盘上两个相邻的方格. 在棋盘上放置 32 块多米诺骨牌，使得任意两块多米诺骨牌都不重叠，每块骨牌都覆盖两个方格，能不能把棋盘的所有方格都覆盖住呢？

这种放置称为多米诺完全覆盖. 当然，这是一个非常容易的安排问题，读者可以给出许多不同的完全覆盖. 我们的问题是究竟有多少

个不同的完全覆盖呢?

对于一个更一般的 $m\times n$ 棋盘,它有 m 行 n 列,共有 mn 个方格.显然,对于一个 3×3 的棋盘就不存在完全覆盖.于是,一般的 $m\times n$ 棋盘的完全覆盖不一定存在.那么,对于 m 和 n 的哪些值,$m\times n$ 的棋盘有完全覆盖呢?

更进一步,用剪刀剪掉一个 8×8 棋盘的对角两个方格,能不能用 31 块多米诺骨牌将其完全覆盖?对于任意一个残缺棋盘,该棋盘存在完全覆盖的充分条件是什么?

2. 四色问题

为了能够迅速地区分一个平面地图或球面地图上的各个国家(假设这些国家在地图上都是连通的),需要用若干种颜色对这些国家着色,使得具有公共边界的两个国家涂染不同的颜色.那么,要保证每张地图都能如此着色,最少需要多少种颜色?这个问题是 1850 年被一名刚毕业的大学生 Francis Guthrie 首先提出的,直到 1976 年,四色问题被美国 Illionis 大学的 K · Appel 和 W · Haken 用计算机证明是正确的,这个证明令数学界震惊,它用了 1 200 多小时,作出 100 亿个独立的逻辑判断.尽管有了这个机器证明,但它仍然是数学上最重要的问题之一.

3. 36 名军官问题

设有来自 6 个军团的 36 名军官,每个军团的 6 名军官又分别具有 6 种军衔,能否将他们排成一个方阵,使得每行每列里的 6 名军官具有不同的军衔,来自 6 个不同的军团.这个问题正是 18 世纪的瑞士

数学家 Euler(历史上最多产数学家之一)提出的一个趣味问题. 这在统计学,尤其是实验设计中有重要的影响.

我们用一个有序偶(i,j)表示一名来自第 i 军团的具有军衔 j 的军官,$i=1,2,\cdots,6$, $j=1,2,\cdots 6$. 36 名军官问题相当于将有序偶$(i,j)(i=1,2,\cdots,6,\ j=1,2,\cdots,6)$排成 6×6 阵列,使得整数 $1,2,\cdots,6$ 在每行每列按照某种次序在第一个位置以及第二位置出现. 于是,问题可以叙述成:是否存在两个 6×6 阵列,其元素取自 $1,2,\cdots,6$,使得这两个阵列的每一行每一列都包含整数 $1,2,\cdots,6$,且当这两个阵列并置时,全部 36 个有序数偶都出现? 为了使这个问题更具体,我们讨论具有 3 种军衔的来自 3 个军团的 9 名军官问题,下面是满足要求的一个解答.

$$\underset{\text{军衔}}{\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{pmatrix}}\quad \underset{\text{军团}}{\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{pmatrix}}\quad\rightarrow\quad \underset{\text{并置阵列}}{\begin{pmatrix}(1,1)&(2,2)&(3,3)\\(3,2)&(1,3)&(2,1)\\(2,3)&(3,1)&(1,2)\end{pmatrix}}$$

上面的军衔和军团阵列都是所谓的 3 阶拉丁方,即每一行每一列上的元素都不同的阵列. 并且这两个 3 阶拉丁方是正交的拉丁方,因为它们的并置给出了全部 9 个有序偶. 据此,我们可以重新叙述 Euler 问题:是否存在两个正交的 6 阶拉丁方? Euler 研究了两个正交的 n 阶拉丁方问题. 不难验证,不存在两个正交的 2 阶拉丁方. Euler 给出了构造两个正交的奇数阶或 4 的倍数阶拉丁方的方法,并根据多次试验,他大胆地断言,不存在两个正交的 $4k+2$ 阶拉丁方. 直到 1901 年,

G・Tarry 用枚举法证明了不存在两个正交的 6 阶拉丁方，即 Euler 猜想在 $k=1$ 时是成立的. 1960 年，三位统计学家R・C・Rose, E・P・Parker 与 S・S・Shrihande 终于证明了对于 $k>1$ 时，Euler 猜想并不成立. 也就是说，对于 $n=4k+2$, $k\geqslant 2$ 时，他们给出了如何构造两个正交 n 阶拉丁方的方法，这是一个重要成就，它最终解决了 Euler 猜想.

第一篇　形形色色的组合问题

组合数学的特点之一就是趣味性强.当代一位著名数学家曾评论说,"组合数学的发展源于数学消遣和游戏.无论是为了消遣还是由于它的美学兴趣,过去所研究过的许多问题对于当代的纯粹科学和应用科学都是非常重要的."本篇的立足点和出发点恰在于此,我们将从这些趣味盎然、形形色色的组合问题出发,深入浅出地、形式活泼地展示组合数学的若干方面,着重于读者的思维训练与方法积累,使读者对组合数学这门数学分支有一些初步的认识和了解.