大学生数学竞赛指南

Daxuesheng Shuxue Jingsai Zhinan

李晋明 主编

经济管理出版社
ECONOMY & MANAGEMENT PUBLISHING HOUSE

大学生数学竞赛指南

Daxuesheng Shuxue Jingsai Zhinan

李晋明 主编

经济管理出版社
ECONOMY & MANAGEMENT PUBLISHING HOUSE

图书在版编目（CIP）数据

大学生数学竞赛指南/李晋明主编. —北京：经济管理出版社，2011.5

ISBN 978-7-5096-1414-3

Ⅰ. ①大… Ⅱ. ①李… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 080276 号

出版发行：经济管理出版社

北京市海淀区北蜂窝 8 号中雅大厦 11 层

电话:(010)51915602　　邮编:100038

印刷：世界知识印刷厂　　经销：新华书店

组稿编辑：贾晓建　　责任编辑：曹　靖

责任印制：杨国强　　责任校对：陈　颖

880mm×1230mm/16　　20.5 印张　　536 千字

2011 年 8 月第 1 版　　2011 年 8 月第 1 次印刷

印数：1—5000 册　　定价：35.00 元

书号：ISBN 978-7-5096-1414-3

前 言

为了进一步推动高等院校数学课程的改革和建设，提高大学数学课程的教学水平，激励大学生学习数学的兴趣，培养学生分析问题、解决问题的能力，发现和选拔数学创新人才，更好地实现“中国大学生数学竞赛”的目标，特制订本大纲.

“中国大学生数学竞赛”的目的是：激励大学生学习数学的兴趣，进一步推动高等院校数学课程的改革和建设，提高大学数学课程的教学水平，发现和选拔数学创新人才.

“中国大学生数学竞赛”的参赛对象为大学本科二年级及二年级以上的在校大学生.

本书是专门为参加全国大学生数学竞赛（非数学专业类）的大学本科理工科专业的大学生而编写的一本参考书. 全书共分十章，内容涵盖了目前大学本科理工科专业《高等数学》课程的全部教学内容（即函数、极限与连续，一元函数微分学，一元函数积分学，常微分方程，向量代数和空间解析几何，多元函数微分学，多元函数积分学，无穷级数等）. 在每章中，都包含了以下三方面内容：

（1）基本要求. 主要是根据教育部高等院校非数学类专业数学基础课程教学指导委员会制定的工科类本科数学基础课程教学的基本要求，以及中国大学生数学竞赛（非数学专业类）大纲（初稿）的具体要求而提出.

（2）内容提要. 提纲挈领地将本章的主要内容（含基本概念、定理、公式、方法等）进行了归纳、总结.

（3）典型题型分析.

本书不仅可以作为大学生参加数学竞赛的参考教材，也可以作为本科生参加全国硕

士研究生数学入学统一考试的参考书，亦可作为大学本科数学教师的教学参考书.

本书的第一章、第四章不定积分部分、第五章、第六章由李晋明老师编写；第二章由周艳杰老师编写；第三章由施明存老师编写；第四章定积分部分由张君施老师编写；第七章由王雅玲老师编写；第八章由吴巧梅老师编写；第九章由沙峯老师编写；第十章由程村老师编写. 最后，全书由李晋明老师负责修改定稿和统纂.

本书作为《北京高校科技创新平台》项目（项目编号：201098）的资助课题，始终得到了北京工商大学理学院，尤其是曹显兵教授的鼎力支持，在此表示衷心的感谢.

鉴于作者的水平有限，加之时间比较仓促，书中难免有错误，其不妥之处，望各位专家、读者批评指正，以便于今后修改，并使之逐步趋于完善.

作　者

2011 年 6 月 8 日

目　录

第一章　函数、极限与连续　/ 1

第 1 节　基本要求　/ 1

第 2 节　内容提要　/ 1

第 3 节　典型题型分析　/ 6

第二章　一元函数微分学　/ 40

第 1 节　基本要求　/ 40

第 2 节　内容提要　/ 40

第 3 节　典型题型分析　/ 40

第三章　微分中值定理、不等式证明　/ 56

第 1 节　内容提要　/ 56

第 2 节　典型题型分析（一）　/ 57

第 3 节　典型题型分析（二）　/ 76

第四章　一元函数积分学　/ 87

第 1 节　基本要求　/ 87

第 2 节　内容提要（不定积分）/ 87

第 3 节　典型题型分析（不定积分）/ 89

第 4 节　内容提要（定积分）/ 102

第 5 节　典型题型分析（定积分）/ 107

第五章　常微分方程　/ 132

第 1 节　基本要求　/ 132

第 2 节　内容提要　/ 132

第 3 节　典型题型分析　/ 138

第六章　向量代数与空间解析几何　/ 160

第 1 节　基本要求　/ 160

第 2 节　内容提要　/ 160

第 3 节　典型题型分析　/ 166

第七章　多元函数微分学　/ 174

第 1 节　基本要求　/ 174

第 2 节　内容提要　/ 174

第 3 节　典型题型分析　/ 181

第八章　多元函数积分学——重积分　/ 215

第 1 节　基本要求　/ 215

第 2 节　内容提要　/ 215

第 3 节 典型题型分析 / 222

第九章 多元函数积分学——曲线积分、曲面积分 / 246

第 1 节 基本要求 / 246

第 2 节 内容提要 / 246

第 3 节 典型题型分析 / 258

第十章 无穷级数 / 275

第 1 节 基本要求 / 275

第 2 节 内容提要 / 276

第 3 节 典型题型分析 / 277

附录一 中国大学生数学竞赛（非数学专业类）大纲（初稿） / 304

附录二 首届全国大学生数学竞赛决赛试卷（非数学类，2010） / 307

附录三 首届全国大学生数学竞赛决赛试卷参考答案（非数学类，2010） / 309

附录四 第二届全国大学生数学竞赛决赛试卷（非数学类，2011） / 316

参考书目 / 318

第一章　函数、极限与连续

第1节　基本要求

本章的基本要求是：

1. 函数的概念及表示法、简单应用问题的函数关系的建立.
2. 函数的性质：有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 复合函数、反函数、分段函数和隐函数、基本初等函数的性质及其图形、初等函数.
4. 数列极限与函数极限的定义及其性质、函数的左极限与右极限.
5. 无穷小和无穷大的概念及其关系、无穷小的性质及无穷小的比较.
6. 极限的四则运算、极限存在的单调有界准则和夹逼准则、两个重要极限.
7. 函数的连续性（含左连续与右连续）、函数间断点的类型.
8. 连续函数的性质和初等函数的连续性.
9. 闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理).

第2节　内容提要

一、函数

1．函数

$$y=f(x),\quad x\in D(f),\quad y\in Z(f).$$

函数的本质主要是：定义域，对应法则．这里所说的函数，指的是**单值函数**.

2．函数的几种特性（特征）

讨论函数，就是要分析函数的主要特征：单调性、有界性、奇偶性、周期性.

3．复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 $D(f)$，$u=\varphi(x)$ 的值域为 $Z(\varphi)$，若 $D(f)\cap Z(\varphi)\neq\Phi$，则称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 为函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**，u 为中间变量.

复合函数的关键问题是：定义域，对应的法则.

4．反函数

设函数 $y=f(x)$ 的值域为 $Z(f)$，定义域为 $D(f)$，则对于每一个 $y\in Z(f)$，必存在 $x\in D(f)$，使得 $y=f(x)$．若将 y 作为自变量，x 作为因变量，使得一个函数 $x=f^{-1}(y)$，且 $f[f^{-1}(y)]=y$，

则称 $x=f^{-1}(y)$ 为 $y=f(x)$ 的**反函数**.

但习惯上把 $y=f(x)$ 的反函数记作 $y=f^{-1}(x)$． $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像是关于直线 $y=x$ 对称的.

5．隐函数：由方程 $F(x,y)=0$ 确定的一个隐函数 $y=y(x)$.

6．分段函数： $y=\begin{cases} f_1(x)\,, a<x<b \\ f_2(x)\,, c<x<d \end{cases}$.

7．基本初等函数与初等函数

（1）基本初等函数

基本初等函数由以下五类函数组成：

①**幂函数：** $y=x^{\alpha}$（$\alpha \in R^1$）;

②**指数函数：** $y=a^x$（$a>0$， $a\neq 1$）;

③**对数函数：** $y=\log_a x$（$a>0$， $a\neq 1$）;

④三角函数： $y=\sin x$， $y=\cos x$， $y=\tan x$， $y=\cot x$， $y=\sec x$， $y=\csc x$；

⑤反三角函数： $y=\arcsin x$， $y=\arccos x$， $y=\arctan x$， $y=\operatorname{arc}\cot x$.

（2）初等函数

由基本初等函数通过有限的四则运算和有限的复合而成，并且只能由一个解析式表示的函数，称为**初等函数**.

二、极限

1．函数的极限

（1） $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$

$\varepsilon-\delta$ 语言：任意 $\varepsilon>0$，存在正数 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立.

（2） $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$

① $\varepsilon-M$ 语言：任意 $\varepsilon>0$，存在正数 $M>0$，使得当 $|x|>M$ 时，有不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立.

特别地：当自变量 x 取正整数 n 时，就有相应的**数列的极限：** $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=A$.

②$\varepsilon - N$ 语言：任意$\varepsilon > 0$，存在自然数$N > 0$，使得当$n > N$时，有不等式$\left|y_n - A\right| < \varepsilon$成立.

2．左、右极限

（1）左极限：$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0 - 0)$；

（2）右极限：$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0 + 0)$.

左、右极限与函数极限之间的关系：$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$.

3．极限的性质

（1）自身的性质

①**唯一性**：设$\lim f(x) = A$，则极限值A是唯一的.

②**局部有界性**：设$\lim f(x) = A$，则在$0 < \left|x - x_0\right| < \delta$【或$|x| > M$】内，$|f(x)| \le M$.

③**局部保号性**：设$\lim f(x) = A$，$\lim g(x) = B$，则在$0 < \left|x - x_0\right| < \delta$【或$|x| > M$】内，

若$f(x) \ge (\le) g(x)$，则$A \ge (\le) B$；

若$A > (<) B$，则$f(x) > (<) g(x)$.

④**函数极限与数列极限的关系**：若$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$，则$\lim\limits_{n \to \infty} f(n) = A$.

若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，且$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$，则$\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$.

（2）运算的性质（四则运算）

设$\lim f(x) = A$、$\lim g(x) = B$，则

①$\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$；

②$\lim f(x)g(x) = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B$；

③$\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \dfrac{A}{B}$. 其中$B \ne 0$.

4．极限存在准则

（1）夹逼准则

设 $x \in \delta(x_0)$【或 $|x| > M$】，若 $h(x) \le f(x) \le g(x)$，且 $\lim h(x) = \lim g(x) = A$，则 $\lim f(x) = A$.

（2）单调有界数列必有极限

5．两个重要极限

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n=e$.

6．无穷小量与无穷大量

（1）定义

①无穷小量

若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=0$，则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的**无穷小量**.

特别地，若 $f(x)=0$，则称函数 $f(x)$ 为无穷小量.

②无穷大量

若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=\infty$，则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的**无穷大量**.

（2）性质

①无穷小量与有界变量的乘积，仍然是无穷小量.

②$\lim f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $\lim\alpha(x)=0$.

③若 $f(x)$ 是无穷大量，则 $f(x)$ 亦是无界变量．但反之却不一定成立.

④在同一趋势下，若 $f(x)$ 是无穷大量，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷小量；

若 $f(x)$ 是无穷小量，且 $f(x)\neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷大量.

7．无穷小量的阶的比较

设 $\lim\alpha(x)=\lim\beta(x)=0$，且 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A$，则

（1）若 $A=0$，则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的高阶无穷小量，并记成 $\alpha=o(\beta)$；

（2）若 $A=\infty$，则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的低阶无穷小量；

（3）若 $A\neq 0$、1、∞，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶无穷小量；

（4）若 $A=1$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小量，并记成 $\alpha\sim\beta$.

三、连续

1．函数的连续性

（1）概念

设函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的某一 $\delta(x_0)$ 邻域内有定义，若

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0，或：\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

则称函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ **处连续**.

若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0-0)=f(x_0)$，称函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ **处左连续**；

若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0+0)=f(x_0)$，称函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ **处右连续**.

左、右连续与函数连续之间的关系：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$.

若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内每一点处都连续，称函数 $f(x)$ **在开区间** (a,b) **内连续**；又在端点 a 处右连续，端点 b 处左连续，则称函数 $f(x)$ **在闭区间** $[a,b]$ **上连续**.

（2）运算

连续函数在同一点处的四则运算仍为该点处的连续函数.

（3）复合函数与初等函数的连续性

设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续，且 $\varphi(x_0)=u_0$. 若函数 $y=f(u)$ 在点 $u=u_0$ 处连续，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 $x=x_0$ 处连续，且

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)=f(u_0)=f[\varphi(x_0)]=f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)].$$

即在连续的情形下，极限符号 lim 与函数符号 f 是可以交换的.

2．间断点及其分类

（1）间断点的概念

若函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处不连续，则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的**间断点**，亦称为**不连续的点**.

（2）间断点的分类

设 $x=x_0$ 为函数 $f(x)$的间断点，

①若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 都存在，则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的**第一类间断点**；

在第一类间断点中，若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$，则称为**可去间断点**；

若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$，则称为**不可去间断点【如：跳跃间断点】**.

②若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 至少有一个不存在，则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的**第二类间断点**.

3．闭区间上连续函数的基本性质

(1)**最值定理**：设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $m \le f(\xi) \le M$，其中 M、m 分别是函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大与最小值.

(2) **有界定理**：设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则存在实数 $M>0$，使得 $|f(x)| \le M$.

(3)**介值定理**(**中值定理**)：设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a) \ne f(b)$，则对于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任一实数 C，至少存在点 $\xi \in (a,b)$，使得 $f(\xi)=C$.

第3节　典型题型分析

一、函数

1．求函数的定义域

【例1】证明：$\sin 1$ 是无理数.

证　设 $\sin 1$ 是有理数，则 $\sin 1 = \dfrac{p}{q}$，其中 p、q 是互素的正整数.

根据 $\sin x$ 的泰勒（Taylor）展开式，有

$$\sin 1 = \frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cos\xi \quad (2n-1>q),$$

则

$$(2n-1)!\frac{p}{q} = (2n-1)![1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}] + \frac{(-1)^n}{(2n)(2n+1)}\cos\xi$$

为整数．由于两个整数之间的代数和仍为整数，故 $\dfrac{(-1)^n}{(2n)(2n+1)}\cos\xi$ 是整数.

因为 $|\cos\xi| \le 1$，$2n>1$，$2n+1>1$，故 $\dfrac{(-1)^n}{(2n)(2n+1)}\cos\xi$ 不可能是整数，与假设矛盾．所以，$\sin 1$ 是无理数.

【例2】求函数 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1 + x^n + (\dfrac{x^2}{2})^n}$ 的表达式，并作函数 $f(x)$ 的图形.

解　将变量 x 的取值分段考查.

（1）当$0\le |x|<1$时，$f(x)=(1+0+0)^0=1$.

① 当$x=1$时，$f(x)=(1+1+0)^0=1$；

② 当$x=-1$时，由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{1+(-1)^{2n}+(\frac{1}{2})^{2n}}=(1+1+0)^0=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n+1]{1+(-1)^{2n+1}+(\frac{1}{2})^{2n+1}}=\frac{1}{2},$$

所以，当$x=-1$时，函数$f(x)$无意义.

（2）当$1<x<2$时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}x\cdot\sqrt[n]{(\frac{1}{x})^n+1+(\frac{x}{2})^n}=x$.

当$x=2$时，$f(2)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^n+(\frac{2^2}{2})^n}=\lim\limits_{n\to\infty}2\cdot\sqrt[n]{2+\frac{1}{2^n}}=2(2+0)^0=2$.

（3）当$|x|>2$时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^2}{2}\cdot\sqrt[n]{(\frac{2}{x^2})^n+(\frac{2}{x})^n+1}=\frac{x^2}{2}$.

（4）当$-2<x<-1$时，由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{1+x^{2n}+(\frac{x^2}{2})^{2n}}=\lim_{n\to\infty}(-x)\cdot\sqrt[2n]{\frac{1}{x^{2n}}+1+(\frac{x}{2})^{2n}}=(-x)\cdot(0+1+0)^0=-x,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n+1]{1+x^{2n+1}+(\frac{x^2}{2})^{2n+1}}=\lim_{n\to\infty}x\cdot\sqrt[2n+1]{\frac{1}{x^{2n+1}}+1+(\frac{x}{2})^{2n+1}}=x\cdot(0+1+0)^0=x,$$

所以，当$-2<x<-1$时，函数$f(x)$无意义.

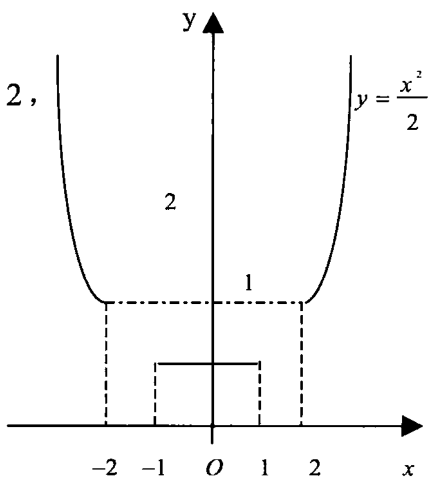
当$x=-2$时，由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{1+(-2)^{2n}+(2)^{2n}}=\lim_{n\to\infty}2\cdot\sqrt[2n]{\frac{1}{2^{2n}}+1+1}=2\cdot(0+1+1)^0=2,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n+1]{1+(-2)^{2n+1}+2^{2n+1}}=1^0=1,$$

所以，当$x=-2$时，函数$f(x)$无意义.

函数$f(x)$的图像如右图所示.



【例 3】设$z(x,y)=\sqrt{y}+f(\sqrt[3]{x}-1)$，$z(x,1)=x$，求$f(x)$的表达式.

解 在$z(x,y)=\sqrt{y}+f(\sqrt[3]{x}-1)$中，令$y=1$，得

$$z(x,1)=1+f(\sqrt[3]{x}-1)=x.$$

记$\sqrt[3]{x}-1=t$，则

$$f(t)=x-1=(1+t)^3-1=t(3+3t+t^2).$$

于是，

$$f(x)=x(3+3x+x^2).$$

2．判断函数的简单的几何性质

【例4】设$f(x)$是周期为π的奇函数,当$x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$时,$f(x)=\sin x-\cos x+2$,则当$x\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$时，$f(x)=$__________.

解 因为$f(x)$是奇函数，所以当$-\dfrac{\pi}{2}<x<0$时，

$$f(x)=-f(-x)=-[\sin(-x)-\cos(-x)+2]=\sin x+\cos x-2,$$

且$f(0)=0$.

由于$f(x)$是周期为π的函数，所以当$\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$时，

$$f(x)=f(x-\pi)=\sin(x-\pi)+\cos(x-\pi)-2=-\sin x-\cos x-2.$$

【例 5】设函数$f(x)$满足方程：$af(x)+bf(\dfrac{1}{x})=\dfrac{c}{x}$，其中$a$、$b$、$c$均为常数，且$|a|\neq|b|$，求函数$f(x)$的表达式，并证明它是奇函数.

解 因为

$$af(x)+bf(\frac{1}{x})=\frac{c}{x}, \qquad ①$$

在①是中令$t=\dfrac{1}{x}$，则$af(\dfrac{1}{t})+bf(t)=ct$，即

$$af(\frac{1}{x})+bf(x)=cx.$$

联立方程组①和②，解得

$$f(x)=\frac{c}{a^2-b^2}(\frac{a}{x}-bx). \qquad ②$$

又因为

$$f(-x)=\frac{c}{a^2-b^2}(-\frac{a}{x}+bx)=-\frac{c}{a^2-b^2}(\frac{a}{x}-bx)=-f(x),$$

所以，函数 $f(x)$ 是奇函数.

3．求反函数的问题

【例 6】 函数 $y=\sin x \cdot |\sin x|$（$|x|\le\frac{\pi}{2}$）的反函数为__________.

解　法一、

当 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ 时，$y=\sin^2 x$（$0\le y\le 1$）. 于是，$\sin x=\sqrt{y}$，即

$$x=\arcsin\sqrt{y}\ （0\le y\le 1）.$$

当 $-\frac{\pi}{2}\le x\le 0$ 时，$y=-\sin^2 x$（$-1\le y\le 0$）. 于是，$\sin^2 x=\sqrt{-y}$，$\sin x=-\sqrt{-y}$，即

$$x=\arcsin(-\sqrt{-y})=-\arcsin\sqrt{-y}.$$

综上所述，给定原函数的反函数为

$$y=\begin{cases}\arcsin\sqrt{x} & ,0\le x\le 1\\ -\arcsin\sqrt{-x} & ,-1\le x\le 0\end{cases}.$$

法二、

若利用公式 $\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$，则可得反函数为

$$y=\begin{cases}\frac{1}{2}\arccos(1-2x) & ,0\le x\le 1\\ -\frac{1}{2}\arccos(1+2x) & ,-1\le x\le 0\end{cases}.$$

4．求复合函数的问题

【例 7】 设 $f(x)=\sqrt{x+|x|}$，则 $f[f(x)]=$__________.

解　$$f[f(x)]=\sqrt{f(x)+|f(x)|}=\sqrt{\sqrt{x+|x|}+\left|\sqrt{x+|x|}\right|}=\begin{cases}\sqrt[4]{8x} & ,x\ge 0\\ 0 & ,x<0\end{cases}.$$

5．求隐函数的问题

【例 8】 设函数 $f(x)$ 在 $\delta(0)$ 内有界，且满足方程：$f(x)-\frac{1}{2}f(\frac{x}{2})=x^2$，求函数 $f(x)$ 的表达式.

解　因为

$$f(x)-\frac{1}{2}f(\frac{x}{2})=x^2,$$

则有