最新部訂標準

結構矩陣

林世洪　編著

矩陣出版股份有限公司

結構矩陣

中華民國八十年六月出版

出版者　矩陣出版股份有限公司
　　　　郵撥帳號：1177569-8
　　　　北市金山南路2段235號2樓
　　　　電話：02/394-0775
作　者　林世洪
發行人　王太雲
印　刷　美泰印刷企業股份有限公司
　　　　台北市延平區迪化街一段343號1樓
定　價　120

行政院新聞局局版臺業字號3951號

自　序

結構矩陣分析法在基本上並不是較高深的分析方法，相反的，只要對矩陣的基本運算及其性質有所了解，再加上力學的基本概念能夠清楚，在學習此法的過程上絕對不會造成困擾，但如果未曾修習結構學基本分析方法或不甚明瞭結構概念的讀者，則在學習上將會影響吸收的速度及深度，因此建議使用本書人士，先行建立結構學基本知識如虛功法、共軛樑法等方法之概念，以便能在短時間內進入結構矩陣分析法之領域。

本書第一章先複習矩陣數學的定義及運算方式，其中與本書無關的部份均已刪除，第二章直接介紹位移法的基本概念及公式推演，力法由於使用人數逐年減少，本書為求精簡起見已予刪除不列，第三、四、五章則針對桁架、樑、剛架結構問題加以敍述分析，並於每章末加列圖解直接勁度法分析過程及注意事項，提供讀者人工計算最快速的方法。

本書匆促寫就，錯誤在所難免，祈望各位讀者不吝指正，以為再版修正之依據。

林世洪

目　　錄

第一章 矩陣

§1－1 基本概念

(一)定義（Definition）——矩陣是將數字或其代表符號依序排列成矩形，並以括弧表示其範圍的一種數學表示式。

例 1 矩陣

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3.4 \\ -4 & 0.2 & 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -0.5 & 1 & 2 \\ -5 & 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad [\, a, b, c \,]$$

(二)符號——下式中矩陣 A 包含 m 列（Row）及 n 行（Column），爲一 $m\times n$ 階之矩陣。

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [\, a_{ij} \,] \qquad (1\text{-}1)$$

式中 $i = 1, 2 \cdots\cdots, m$ 代表列數

$j=1$，$2\cdots\cdots$，n 代表行數

a_{ij}：表示第 i 列，第 j 行之矩陣元素（含有位置之意義）

㈢子矩陣（Submatrices）——意即原矩陣的部份矩陣

例 2　子矩陣

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

則 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{bmatrix}$，$[a_{11} \quad a_{12}]$，$[a_{12} \quad a_{13}]$，$[a_{11} \quad a_{13}]$

$[a_{21} \quad a_{22}]$，$[a_{22} \quad a_{23}]$，$[a_{21} \quad a_{23}]$，$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix}$，$[a_{11}]$，$[a_{12}]$，$[a_{13}]$，$[a_{21}]$

$[a_{22}]$，$[a_{23}]$ 均為矩陣 A 之子矩陣

§1－2　矩陣之運算

㈠相等（Equal）——兩矩陣相同位置元素之值若均相等，則此兩矩陣相等。

例 3　矩陣相等

$$A=\begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\because a_{ij}=b_{ij}$，對所有 i，j 值而言　　(1-2)

$\therefore A=B$　　(1-3)

㈡加減法（Addition and Difference）——兩矩陣相同位置元素之值相加或相減，所得之矩陣即為和矩陣或差矩陣，惟應注意此運算成立的先決條件為兩矩陣之位階必須相同。

$A=[a_{ij}]$，$B=[b_{ij}]$ 均為$m\times n$階矩陣

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij} \qquad \begin{cases} i=1,\cdots\cdots,m \\ j=1,\cdots\cdots,n \end{cases} \tag{1-4}$$

則和矩陣$C=A+B$，亦為$m\times n$階矩陣

$$-B=-[b_{ij}]=[-b_{ij}] \tag{1-5}$$

$$d_{ij}=a_{ij}+(-b_{ij})=a_{ij}-b_{ij} \tag{1-6}$$

則差矩陣$D=A-B$，亦為$m\times n$階矩陣

例 4　矩陣加減法運算

$$A=\begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C=A+B=\begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D=A-B=\begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -9 & 7 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

㈢乘法（Multiplication）

1. 純量與矩陣相乘——其積矩陣各元素之值即為原矩陣各元素和該純量相乘所得。

例 5　純量乘矩陣

$$q=3, \qquad A=\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$qA=3\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 15 & 9 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} \tag{1-7}$$

2. 矩陣相乘——其積矩陣各元素之值如下式所示。

$A=[a_{ij}]_{m\times n}$，$B=[b_{jk}]_{n\times p}$

$$C=AB \tag{1-8}$$

$$=[a_{ij}]_{m\times n}[b_{jk}]_{n\times p}$$

$$=[c_{ik}]_{m\times p} \tag{1-9}$$

式中 $c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+a_{i3}b_{3k}+\cdots\cdots+a_{in}b_{nk}$

$$=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}\qquad\begin{cases}i=1\cdots\cdots\cdots m\\ j=1\cdots\cdots\cdots P\end{cases}\tag{1-10}$$

注意：A矩陣之行數必須和B矩陣之列數相等，矩陣相乘才成立，又積矩陣之列數和A矩陣列數相同，行數和B矩陣行數相同。

例 6 矩陣相乘

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 4 & 2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & -1\\ 5 & 4\end{bmatrix}$$

$$C=AB=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & -1\\ 5 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -5\\ 9 & 6\end{bmatrix}$$

$$D=BA=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & -1\\ 5 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 4 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -7 & -4\\ 1 & -4 & -2\\ 6 & 21 & 8\end{bmatrix}$$

$C\neq D$

即 $AB\neq BA$ (1-11)

(四)矩陣加減乘法的運算性質

A，B，C為矩陣，q，k為常數

1. $A+B=B+A$ (1-12)
2. $A-B=-(B-A)$ (1-13)
3. $(qA)B=q(AB)=A(qB)$ (1-14)
4. $(AB)C=A(BC)$ (1-15)
5. $(q+k)A=qA+kA$ (1-16)
6. $q(A+B)=qA+qB$ (1-17)
7. $(A+B)C=AC+BC$ (1-18)
8. $A(B+C)=AB+AC$ (1-19)

(五)轉置（Transposition）——將原矩陣中各元素之列、行位置互換，所組成之新矩陣稱為原矩陣之轉置矩陣。

$A = [\, a_{ij} \,]_{m\times n}$

轉置矩陣 $A^T = [\, a_{ji} \,]_{n\times m}$ (1-20)

例 7 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$，$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

則 $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

$$(A+C)^T = \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^T = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^T + C^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^T = \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \right)^T = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 7 & 4 & -11 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 4 \\ 4 & -11 \end{bmatrix}$$

$$B^T A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 4 \\ 4 & -11 \end{bmatrix}$$

由此例中可整理得矩陣轉置的運算性質如下：

1. $(A+C)^T = A^T + C^T$ (1-21)
2. $(A-C)^T = A^T - C^T$ (1-22)
3. $(AB)^T = B^T A^T$ (1-23)
4. $(ABC)^T = C^T (AB)^T = C^T B^T A^T$ (1-24)

§1－3 特殊矩陣(Special Matrices)

(一)零矩陣（Zero Matrix）——矩陣之元素值全部都等於零時，稱此種矩陣爲零矩陣。

(二)方形矩陣（Square Matrix）——例數和行數相等之矩陣。

$$A=[a_{ij}]_{m\times m} \qquad i,j=1\cdots\cdots\cdots m \tag{1-25}$$

例 8　方形矩陣

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

(三)對角線矩陣（Diagonal Matrix）——如果一方形矩陣除左上至右下之對角線元素值不爲零外，其餘元素值均爲零，則稱此矩陣爲對角線矩陣。

$$A=[a_{ij}]_{m\times m} \qquad i,j=1\cdots\cdots\cdots m \tag{1-26}$$

其中 $\begin{cases} a_{ij}=0 & i\neq j \\ a_{ij}\neq 0 & i=j \end{cases}$

例 9　對角線矩陣

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

(四)單位矩陣（Vnit Matrix）——如對角線矩陣之對角線元素之值全爲 1，則稱此類矩陣爲單位矩陣，通常以 I 作爲代表符號。

$$I=[U_{ij}]_{m\times m} \qquad i,j=1\cdots\cdots\cdots m \tag{1-27}$$

其中 $\begin{cases} U_{ij}=0 & i\neq j \\ U_{ij}=1 & i=j \end{cases}$

單位矩陣之特性如下：

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}, \quad B=[b_{ij}]_{n\times n}, \quad I=[U_{ij}]_{n\times n}$$

則

$$AI = A \tag{1-28}$$

$$BI = IB = B \tag{1-29}$$

例 10 單位矩陣及其特性

$$I_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$I_1A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_2B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$BI_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$I_2B = BI_2$$

(五)純量矩陣（Scalar Matrix）——若對角線矩陣對角線元素之值均爲相同之值，則稱此類矩陣爲純量矩陣。

$$S = [s_{ij}]_{m\times m} \qquad i, j = 1 \cdots\cdots\cdots m \tag{1-30}$$

其中 $\begin{cases} s_{ij} = 0 & i \neq j \\ s_{ij} = k & i = j \end{cases}$

純量矩陣之特性爲

$$A = [a_{ij}]_{m\times n}, \quad B = [b_{ij}]_{n\times n}, \quad S = [s_{ij}]_{n\times n}$$

則 $$AS = AkI = kAI = kA \tag{1-31}$$

$$BS = kB = kIB = SB \tag{1-32}$$

(六)對稱矩陣（Symmetric Matrix）——若一方形矩陣和其轉置矩陣相等時，則稱此矩陣爲對稱矩陣。

$$A^T = A \tag{1-33}$$

$$a_{ij} = a_{ji} \qquad i, j = 1 \cdots\cdots n \tag{1-34}$$

例 11　對稱矩陣

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix} = A$$

(七)反對稱矩陣 (Skew-symmetric Matrix) ——若一方形矩陣和其轉置矩陣之和等於零矩陣，則稱此矩陣爲反對稱矩陣。

$$A^T = -A \tag{1-35}$$

$$a_{ij} = -a_{ji} \qquad i, j = 1 \cdots\cdots n \tag{1-36}$$

例 12　反對稱矩陣

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = -A$$

(八)三角矩陣 (Triangular Matrix) ——若方形矩陣對角線上方 (或下方) 的元素值均爲零，則稱此類矩陣爲三角矩陣。

例 13　三角矩陣

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

(九)反矩陣 (Inverse Matrix)——若矩陣 A 有反矩陣，記爲 A^{-1} 則反矩陣 A^{-1} 和矩陣 A 之間的關係爲

$$A^{-1} A = I = AA^{-1} \tag{1-37}$$

例 14 反矩陣

$$A=\begin{bmatrix}1&1\\2&3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2&5&-11\\2&1&4\\3&2&4\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}3&-1\\-2&1\end{bmatrix},\quad B^{-1}=\begin{bmatrix}-4&-42&31\\4&41&-30\\1&11&-8\end{bmatrix}$$

$$AA^{-1}=\begin{bmatrix}1&1\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-1\\-2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I$$

$$A^{-1}A=\begin{bmatrix}3&-1\\-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I$$

$$AA^{-1}=A^{-1}A$$

$$BB^{-1}=\begin{bmatrix}2&5&-11\\2&1&4\\3&2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4&-42&31\\4&41&-30\\1&11&-8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=I$$

$$B^{-1}B=\begin{bmatrix}-4&-42&31\\4&41&-30\\1&11&-8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&5&-11\\2&1&4\\3&2&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=I$$

$$BB^{-1}=B^{-1}B$$

(十)列矩陣及行矩陣（Row and Column Matrix）——若矩陣之列數僅有 1 列，則稱此種矩陣爲列矩陣，若矩陣之行數僅有 1 行，則稱此種矩陣爲行矩陣。

例 15 列矩陣及行矩陣

列矩陣：$\begin{bmatrix}1&3\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1&0&-2\end{bmatrix}$

行矩陣：$\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix}$

(土)餘因子矩陣——矩陣中某一元素之餘因子矩陣爲原矩陣中除去與該元素列行數相同之列及行後，其餘元素組成之新矩陣

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

a_{11}之餘因子矩陣爲 $\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ (1-38 a)

a_{13} 之餘因子矩陣爲 $\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$ (1-38 b)

a_{32}之餘因子矩陣爲 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{bmatrix}$ (1-38 c)

§1－4 線性聯立方程式的矩陣解法

㈠線性聯立方程式的矩陣表示式

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{1-39}$$

若改寫成矩陣式得

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{1-40}$$

即 $AX=B$ (1-41)

㈡高斯消去法 (Gauss elimination or Gauss algorithm)——係利用聯立之各方程式乘上修正常數後互相加減，以消去部份係數，達成直接求解之目的的方法，若以 $n\times n$ 矩陣方程式爲例，其步驟如下：

$A=[a_{ij}]_{n\times n}$ ， $X=[x_j]_{n\times 1}$ ， $B=[b_i]_{n\times 1}$

$AX=B$

步驟 1 利用 A 矩陣第一列元素值消去第二列至第 n 列之第一行元素值，B 矩陣亦隨之修正。

步驟 2 利用步驟 1，所得之新 A 矩陣第二列元素值消去第三列至第 n 列之第二行元素值，B 矩陣亦隨之修正。以此類推，將 A 矩陣消成三角矩陣。

步驟 3 由消減得之三角矩陣 A 及修正之 B 矩陣，直接計算 x_n，x_{n-1}，…… x_1 之值。

例 16 試以高斯消去法求解下列矩陣方程式

$$A=\begin{bmatrix}1&1&4\\2&3&0\\3&2&1\end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}24\\12\\13\end{bmatrix}$$

$AX=B$

$$\begin{bmatrix}1&1&4\\2&3&0\\3&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}24\\12\\13\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}1&1&4\\0&1&-8\\0&-1&-11\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}24\\-36\\-59\end{bmatrix}\quad\begin{cases}\text{第一列}\times(-2)\text{加至第二列}\\\text{第一列}\times(-3)\text{加至第三列}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}1&1&4\\0&1&-8\\0&0&-19\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}24\\-36\\-95\end{bmatrix}\quad\text{第二列}\times(1)\text{加至第三列}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_3=\dfrac{-95}{-19}=5\\x_2=-36+8x_3=-36+40=4\\x_1=24-4x_3-x_2=24-20-4=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\4\\5\end{bmatrix}$$

(三)反矩陣求解法——求解 $AX=B$ 之矩陣方程式，若能先求 A^{-1} ，再以 A^{-1} 同時乘上等號兩邊，則可解得 X 。

$$AX=B$$

$$A^{-1}AX=A^{-1}B \tag{1-42}$$

$$\Rightarrow X=A^{-1}B \tag{1-43}$$

而其中反矩陣之求法基本上有兩種：

1. 消去法——因已知反矩陣和原矩陣之乘積爲單位矩陣，故若原矩陣爲 A ，其反矩陣爲 A^{-1} ，即 $AA^{-1}=I$，利用類似高斯消去法的原理將式中 A 矩陣消成 I ，則等號左邊剩下反矩陣 A^{-1} ，而等號右端則顯示反矩陣 A^{-1} 之元素內容。

例 17　消去法求反矩陣

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad AA^{-1}=I$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & -1 & -11 \end{bmatrix} A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & -19 \end{bmatrix} A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ \frac{5}{19} & -\frac{1}{19} & -\frac{1}{19} \end{bmatrix}$$