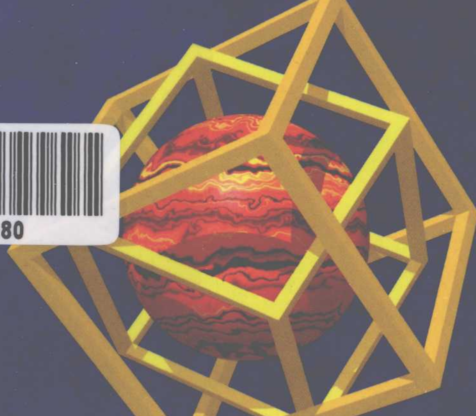
高中新课程重难点突破

GAOZHONG XINKECHENG ZHONGNANDIAN TUPO

数学 必修2



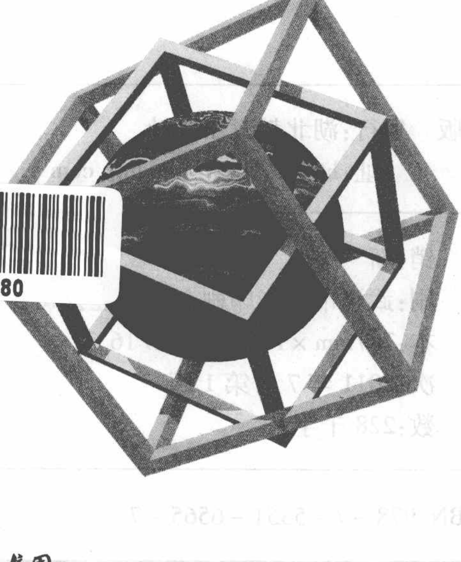
湖北長江出版集團
湖北教育出版社

本书编写组 编写

高中新课程重难点突破

GAOZHONG XINKECHENG
ZHONGNANDIAN
TUPO

数学 必修2



湖北长江出版集团
湖北教育出版社

(鄂)新登字02号

图书在版编目(CIP)数据

高中新课程重难点突破 数学必修2/本书编写组编写.—武汉:湖北教育出版社,2011.7
ISBN 978-7-5351-6565-7

Ⅰ.高…　Ⅱ.本…　Ⅲ.中学数学课-高中-教学参考资料
Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第085315号

出版　发行:湖北教育出版社	武汉市青年路277号
网　　址:http://www.hbedup.com	邮编:430015　电话:027-83619605

经　销:新　华　书　店	
印　刷:武汉市新华印刷有限责任公司	(430200·武汉市江夏区纸坊古驿道91号)
开　本:787mm×1092mm　1/16	9印张
版　次:2011年7月第1版	2011年7月第1次印刷
字　数:228千字	印数:1-6 000

ISBN 978-7-5351-6565-7	定价:17.00元

前言

随着普通高中新课程改革的不断深入和扩大，为贯彻新课程的精神和要求，并针对学生在未来的新课程条件下的学习能力的要求，我们编写了本套丛书。

本套书打破了新课标各个版本教材的限制，又综合了各个版本教材的内容，做到通用且好用。本套丛书的编写建构在实施新课程的教学和教研基础之上，注重实用性和可操作性。本套丛书以教学大纲为基础，与现行的教材基本同步，全面落实课程内容，达到教学目标和考纲对学生能力的要求。

本套丛书以高中阶段中等成绩学生为目标对象，以帮助学生提升学习成绩和综合素质为主要目的。丛书贯彻了新课标和高考大纲的精神，突破传统的学习模式，通过对本书的学习，要达到将教材知识融会贯通，并在教材基础上有相应的拓展；对解题方法能熟练运用并能迅速找到解题的突破口，帮助解决学生学习过程中最急需解决的问题；提升学生的自学能力，并切实提高分析问题的能力，掌握深入探究问题的方法，拓展解题思路。本丛书区别于传统意义上的教学参考书，将教材知识结构和解题方法规律进行了有效结合。

丛书编写顺序与教材一致，遵循“教材中有什么，我们就提供什么”的原则，以教材内容为模板，按教材章节编写，包括本章节课程的主要概念(内容)，设有基础知识、学习方法、重点难点、重难冲刺、知识点拨、巩固练习等多个栏目，用相关例题来说明，并详细叙述解题的方法及技巧，提示重难点的解题思路及切入点。章节后用大量的习题对所学内容进行巩固，复习，以帮助学生深刻领悟相应知识点，逐步建立灵活解题的思路和能力，其中少量难度较高的试题将对学生的思维进行良好的拓展，使学生在考试中立于不败之地。

虽然作者在编写过程中认真负责，但难免有错误及疏漏，恳请广大读者批评指正，以利于再版时修正及完善。

本套书由湖北、山东、广东等地的特级教师和一线教师骨干联合编写。主编：汪学毅。副主编：赵 新、王庆平。参加各册编写的有：刘心红、张高庆、万江波、陈永定、曾庆平、何芳平、杨定军、刘亚东、胡 敏、王宝成、王友志、肖平宇、夏冬阳、周新平、陈国庆、杨爱民、赵建军、孙晓新、张小兰、徐冬生。

本书编写组

2011 年 6 月

目录

第一章　空间几何体

在本章，我们将从对空间几何体的整体观察入手，研究空间几何体的结构特征、三视图和直观图，了解一些简单几何体的表面积与体积的计算方法.

1.1　空间几何体的结构

1.1.1　柱、锥、台、球的结构特征

目标导航

基础知识

通过实物模型，观察大量的空间图形，认识柱体、锥体、台体和球体结构特征，并能运用这些特征描述现实生活中简单物体的结构.

学习方法

1. 制作模型进行观察总结，根据结论对照图形，加深对几何体的理解.

2. 结合动态直观图，从运动变化的观点认识这几种几何体之间的关系.

重点难点

柱、锥、台、球结构特征的概括.

重难冲刺

一、棱柱的结构特征

1. 棱柱的定义

有两个互相平行的面，而且夹在这两个平行平面间的每相邻两个面的交线都互相平行，这些面围成的几何体叫做棱柱.

2. 棱柱的各部分名称

(1)棱柱的底面：棱柱中，两个互相平行的面叫做棱柱的底面.

(2)棱柱的侧面：除去棱柱的两个底面，其余的各面叫做棱柱的侧面.

(3)棱柱的棱：两个面的公共边叫做棱柱的棱.

(4)棱柱的侧棱：两个侧面的公共边叫做棱柱的侧棱.

(5)棱柱的顶点：底面多边形与侧面的公共顶点叫做棱柱的顶点.

3. 棱柱的分类

按底面多边形的边数分类，可分为三棱柱、四棱柱、五棱柱……

4. 棱柱的表示方法

(1)用表示底面各顶点的字母表示棱柱.

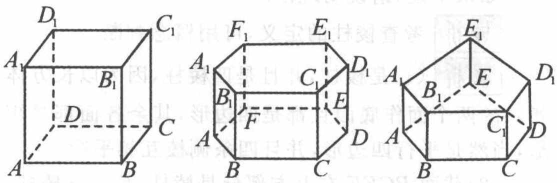
如图中的①可表示为棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$.

②可表示为棱柱 $ABCDEF-A_1B_1C_1D_1E_1F_1$.

③可表示为棱柱 $ABCDE-A_1B_1C_1D_1E_1$.

(2)用一条对角线端点的两个字母来表示.

如图中的(1)可表示为棱柱 AC_1 或棱柱 BD_1 等；(2)可表示为棱柱 AC_1 或棱柱 AD_1 或棱柱 AE_1 等；(3)可表示为棱柱 AC_1 或棱柱 AD_1 等.



(1)　(2)　(3)

知识点拨

1. 棱柱的三个本质特征

(1)有两个面互相平行.

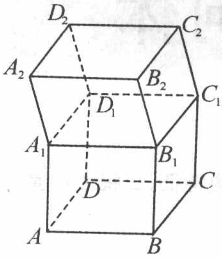
(2)其余各面都是平行四边形.

(3)相邻侧面的公共边都互相平行.

如：有两个面互相平行，其余各面都是平行四边形的几何体一定是棱柱吗？

提示：不一定，如图所示的几何体有两个平面互

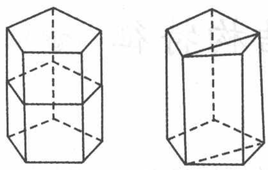
相平行，其余各面都是平行四边形，但不是棱柱.



2. 棱柱的一些简单性质

(1)侧棱都相等，侧面是平行四边形.

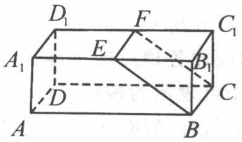
(2)两个底面与平行于底面的截面是全等的多边形. 如图(1)所示.



(1)　　(2)

(3)过不相邻的两条侧棱的截面是平行四边形. 如图(2)所示.

例 1　如下图所示，长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$.



(1)这个长方体是棱柱吗？如果是，是几棱柱？为什么？

(2)用平面 $BCFE$ 把这个长方体分成两部分后，各部分形成的几何体还是棱柱吗？如果是，是几棱柱？如果不是，请说明理由.

导析 考查棱柱的定义，可用概念判断.

解析 (1)是棱柱，并且是四棱柱，因为以长方体相对的两个面作底面且都是四边形，其余各面都是矩形，当然是平行四边形，并且四条侧棱互相平行.

(2)截面 $BCFE$ 右上方部分是棱柱，且是三棱柱，其中$\triangle BEB_1$ 和$\triangle CFC_1$ 是底面.

截面 $BCFE$ 左下方部分也是棱柱，且是四棱柱，其中四边形 $ABEA_1$ 和 $DCFD_1$ 是底面.

说明

概念题一般紧扣定义做题，不要只认为底面就是上下位置，如上题，底面可放在前后位置.

拓展 下列说法中正确的是　　(　　)

A. 棱柱的面中，至少有两个面互相平行

B. 棱柱中两个互相平行的平面一定是棱柱的底面

C. 棱柱的侧面是平行四边形，但它的底面一定不是平行四边形

D. 棱柱中所有的棱都相等

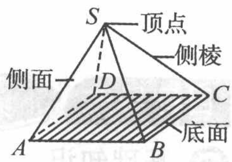
解析 长方体相对的两个面都平行，侧面和底面均为平行四边形，排除 B、C；棱是指相邻两个面的公共边，故棱柱的侧棱都相等，排除 D.

答案 A

二、棱锥、棱台的结构特征

1. 棱锥的定义

如图所示，一般的，有一个面是多边形，而其余各面都是有一个公共顶点的三角形，由这些面所围成的多面体叫做棱锥.



2. 棱锥的各部分名称

(1)底面：这个多边形叫做棱锥的底面.

(2)侧面：有公共顶点的各个三角形叫做棱锥的侧面.

(3)顶点：各侧面的公共顶点叫做棱锥的顶点.

(4)侧棱：相邻两侧面的公共边叫做棱锥的侧棱.

3. 棱锥的分类

底面是三角形、四边形、五边形……的棱锥分别叫做三棱锥、四棱锥、五棱锥……其中三棱锥又叫做四面体.

4. 棱锥的记法

用表示顶点和底面各顶点的字母或者用表示顶点和底面的一条对角线端点的字母来表示，如上图所示的四棱锥可表示为棱锥 $S-ABCD$ 或者棱锥 $S-AC$.

5. 棱台的定义

棱锥被平行于底面的平面所截，截面和底面间的部分叫做棱台.

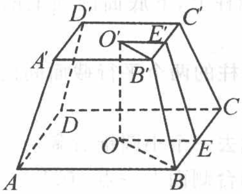
6. 棱台的各部分名称

(1)棱台的下底面、上底面：原棱锥的底面和截面分别叫做棱台的下底面和上底面.

(2)棱台的侧面：除两个底面外的其余各面叫做棱台的侧面.

(3)棱台的侧棱：相邻两侧面的公共边叫做棱台的侧棱.

7. 棱台的表示



(1)用表示上、下底面的字母来表示.

如图,可表示为棱台 $ABCD-A'B'C'D'$.

(2)用上、下底面的对顶字母来表示.

如图可表示为棱台 AC' 或棱台 BD' 等.

知识点拨

(1)棱锥的各个面可以都是三角形,也可以有一个面不是三角形,但最多有一个面不是三角形. 如果各个面都为三角形,则此棱锥为三棱锥,如果有一个面不是三角形,则这个面是几边形,这个棱锥就是几棱锥.

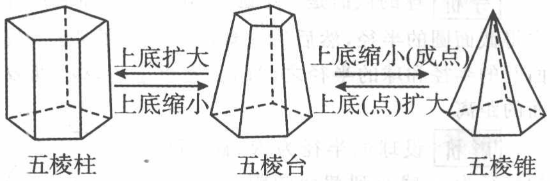
(2)画棱台时,可先画棱锥,再画出与棱锥底面平行的截面,这样可以保证棱台的各侧棱交于一点.

(3)棱台的上、下底面是平行且相似的多边形.

(4)判断一个几何体是不是棱台,首先要看该几何体"还原"后是否是一个棱锥(即所有侧棱延长后是否交于一点),其次要看上、下底面是否为平行且相似的多边形.

(5)棱柱、棱锥、棱台的联系.

棱柱、棱锥、棱台的形状虽不同,但它们之间又有联系,并且在一定条件下可以相互转化,这种转化关系如图所示(底面是全等的五边形).



例 2 一个三棱锥,如果它的底面是直角三角形,那么它的三个侧面 ( )

A. 至多有一个是直角三角形

B. 至多有两个是直角三角形

C. 可能都是直角三角形

D. 都是非直角三角形

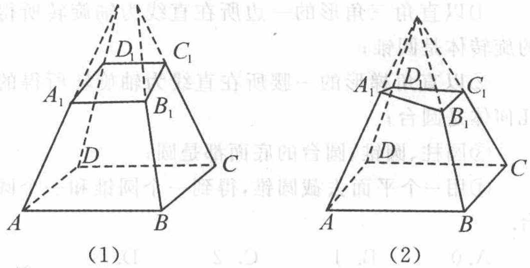
导析 选项是研究侧面最多有几个直角三角形,这是一道开放性试题,需要研究在什么情况下侧面中直角三角形的个数最多.

解析 联想以长方体作为载体,三棱锥 $A-A_1C_1D_1$ 的三个侧面都是直角三角形. 故选 C.

答案 C

说明 本题易误选 B,忽视了剩下的一个侧面也有可能是直角三角形. 错误的根源在于不善于联想,要养成借助模型来思考问题的习惯.

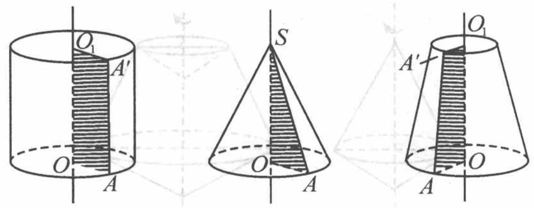
拓展 判断下图中所示物体是不是台体,为什么?



解析 以上两图都不是台体,图(1)中 AA_1, DD_1 交于一点,而 BB_1, CC_1 交于另一点,此图不能还原成锥体,故不是台体;图(2)中面 $ABCD$ 与面 $A_1B_1C_1D_1$ 不平行,故也不是台体.

三、圆柱、圆锥和圆台的结构特征

圆柱、圆锥和圆台可以分别看作以矩形的一边、直角三角形的一条直角边、直角梯形中垂直于底边的腰所在直线为旋转轴,将矩形、直角三角形、直角梯形分别旋转一周而形成的曲面所围成的几何体,其中,旋转轴叫做所围成的几何体的轴;在轴上的这条边(或它的长度)叫做这个几何体的高;垂直于轴的边旋转而成的圆面叫做这个几何体的底面;不垂直于轴的边旋转而成的曲面叫做这个几何体的侧面;无论旋转到什么位置,不垂直于轴的这条边都叫做侧面的母线,如图所示.



知识点拨

(1)我们用轴上的两个字母表示几何体,可记作圆柱 O_1O、圆锥 SO、圆台 O_1O.

(2)这三种几何体的母线不是唯一的,圆柱的母线互相平行,圆锥的母线交于同一点 S,圆台的母线延长后交于同一点.

(3)这三种几何体也可以看作是由它们的轴截面绕轴旋转 180°得到.

(4)从运动变化的角度来讲，三类几何体的内在联系如图所示.

例 3　下列叙述正确的个数是　　（　　）

①以直角三角形的一边所在直线为轴旋转所得的旋转体是圆锥；

②以直角梯形的一腰所在直线为轴旋转所得的几何体是圆台；

③圆柱、圆锥、圆台的底面都是圆；

④用一个平面去截圆锥，得到一个圆锥和一个圆台.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

导析 ①②为已知旋转轴判断旋转所得的几何体，③④判断旋转体的底面与截面. 解答本题可先根据圆柱、圆锥、圆台的结构特征详细分析，再结合已知的各个命题的条件进行具体分析.

解析 ①应以直角三角形的一条直角边所在直线为旋转轴旋转才可得到圆锥，以直角三角形的斜边所在直线为旋转轴旋转得到的几何体为两个同底的圆锥连在一起的几何体，如图 1，故①错；②以直角梯形垂直于底边的一腰所在直线为旋转轴旋转可得到圆台，以直角梯形的不垂直于底的腰所在直线为旋转轴旋转得到的几何体为一个圆台一侧挖去一个同上底的圆锥，另一侧补上一个同下底的圆锥，如图 2，故②错；③圆柱、圆锥、圆台的底面都是圆面，而不是圆，故③错；④用平行于圆锥底面的平面去截圆锥，可得到一个圆锥和一个圆台，用不平行于圆锥底面的平面不能得到，故④错. 故选 A.

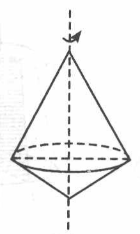


图1

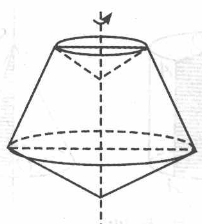


图2

说明

对旋转体定义的理解要准确，认清不同几何体的旋转轴. 截面的作用有所不同，判断时要抓住几何体的结构特征，认真分析，对比判断.

拓展 下列说法中正确的是　　（　　）

A. 连接圆柱上、下底面圆周上两点的线段是圆柱的母线

B. 夹在圆柱的两个平行截面间的几何体还是一个圆柱体

C. 圆锥截去一个小圆锥后剩余部分是圆台

D. 通过圆台侧面上一点，有无数条母线

解析 连接圆柱上、下底面圆周上两点的线段不一定与圆柱的轴平行，故 A 错误. B 错误，没有说明这两个平行截面的位置关系，当这两个平行截面与底面平行时，正确，其他情况结论是错误的. D 错误，通过圆台侧面上一点，只有一条母线，故选 C.

答案 C

四、球的结构特征

以半圆的直径所在直线为旋转轴，半圆面旋转一周形成的旋转体叫做球体，简称球. 半圆的圆心叫做球的球心；半圆的半径叫做球的半径；半圆的直径叫做球的直径.

知识点拨

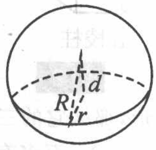
(1)一个球用表示它的球心的字母来表示.

(2)球体与球面是两个不同的概念，球体是几何体，球面是曲面，但两者也有联系，即球面是球体的表面.

例 4　在半径为 25 cm 的球内有一个截面，它的面积是 $49\pi\ cm^2$，求球心到这个截面的距离.

导析 球的截面是一个圆面，由已知截面面积可求得截面圆的半径，然后通过球心到截面的距离、截面圆的半径和球的半径之间的关系可求得球心到截面的距离.

解析 设球的半径为 R，截面圆的半径为 r，球心到截面的距离为 d，如图所示.



$\because S=\pi r^2=49\pi$，$\therefore r=7$(cm)，

$\therefore d=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{25^2-7^2}=24$(cm)，

即球心到这个截面的距离为 24 cm.

说明

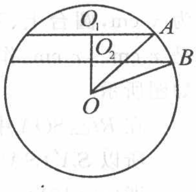
本题主要考查球的截面的性质，找出球的半径和截面圆半径的关系就可求解.

拓展 已知球的两个截面的面积分别为 5π 和 8π，它们位于球心的同一侧，且相距为 1，求球的半径.

解析 如图所示，作出球的一个大圆.

方法一：设球的半径为 R，截面圆半径为 r_1, r_2，由于两截面的面积为 5π 和 8π，$\therefore 5\pi=\pi r_1^2, 8\pi=\pi r_2^2$，

$\therefore r_1^2=5, r_2^2=8$，



由两截面距离为 1 得 $1=\sqrt{R^2-r_1^2}-\sqrt{R^2-r_2^2}=\sqrt{R^2-5}-\sqrt{R^2-8}$，解得 $R=3$.

方法二：设球的半径为 R，截面圆半径为 $r_1, r_2, OO_2=x$，

由方法一知 $r_1^2=5, r_2^2=8$，$\therefore \begin{cases}(1+x)^2=R^2-5\\ x^2=R^2-8\end{cases}$，

两式相减得 $x=1$，$\therefore R^2=9$，即 $R=3$.

巩固练习

一、选择题

1. 下列命题中正确的是 ( )
   A. 有两个面平行，其余各面都是四边形的几何体叫棱柱
   B. 有两个面平行，其余各面都是平行四边形的几何体叫棱柱
   C. 有一个面是多边形，其余各面都是三角形的几何体叫棱锥
   D. 有一个面是多边形，其余各面都是有一个公共顶点的三角形的几何体叫棱锥

2. 下列说法中：
   ①到定点的距离等于定长的点的集合是球面；
   ②球面上三个不同的点，一定能确定一个圆；
   ③一个平面与球相交，其截面是一个圆.
   其中正确的个数为 ( )
   A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

3. 下列叙述正确的个数是 ( )
   ①以直角三角形的一边为轴旋转所得的旋转体是圆锥；②以直角梯形的一腰为轴旋转所得的几何体是圆台；③圆柱、圆锥、圆台的底面都是圆；④用一个平面去截圆锥，得到一个圆锥和一个圆台.
   A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

4. 过球面上两点作球的大圆，可能的个数是 ( )
   A. 有且只有一个　　B. 一个或无穷多个
   C. 无数个　　D. 以上均不正确

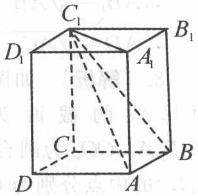
二、填空题

5. 一个圆锥的母线长 20 cm，母线与轴的夹角为 30°，则圆锥的高为________.

6. 一个圆台的上、下底面面积分别是 π cm^2 和 49π cm^2，一个平行于底面的截面面积为 25π cm^2，则这个截面与上、下底面的距离之比是________.

三、解答题

7. 如图所示，长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的一条对角线 $AC_1=8\sqrt{2}$，$\angle C_1AA_1=45°$，$\angle C_1AB=60°$，求 AD 的长.



8. 圆台的两底面半径分别为 5 cm 和 10 cm，高为 8 cm，有一个过圆台两母线的截面，且上、下底面中心到截面与两底面的交线的距离分别是 3 cm 和 6 cm，求截面面积.

尖子生题库

9. 把一个圆锥截成圆台，已知圆台的上、下底面半径的比是 1∶4，母线长是 10 cm，求圆锥的母线长.

答　案

1. [解析] 对 A、B 棱柱的定义应为"有两个面平行，且夹在两平行平面间的每相邻两个面的交线平行的几何体". 故 A、B 不对. 棱锥的定义中要求侧面是有公共顶点的三角形. 故选 D.

[答案] D

2. [解析] ①②都对. ③中一个平面与球相交，其截面是一个圆面，不是圆. 故选 C.

[答案] C

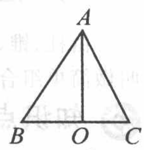
3. [解析] ③对. ①中是以直角三角形的一条直角边为轴旋转所得的几何体是圆锥；②中是以直角梯形的垂直于底边的腰为轴旋转所得旋转体为圆台；④应用平行于底面的平面截圆锥，得到一个圆锥和一个圆台. 故选 B.

[答案] B

4. [解析] 当球面上两点与球心不共线时，有且仅有一个大圆，当球面上两点与球心共线时，有无数个大圆. 故选 B.

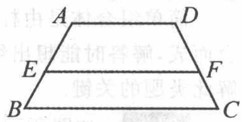
[答案] B

5. [解析] 由右图所示的截面三角形知，$AB=20$ cm，$\angle BAO=30°$.



Rt$\triangle AOB$ 中，$AO=20\times\cos 30°=10\sqrt{3}$ cm. 即圆锥的高为 $10\sqrt{3}$ cm.

6. [解析] 如图所示，圆台的轴截面 $ABCD$，则AB∶EF∶$BC=1$∶5∶7，故截面与上、下底面的距离之比为2∶1.



7. [解析] $\angle C_1AA_1=45°$，$AC_1=8\sqrt{2}$，

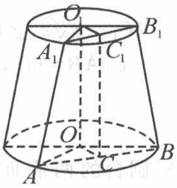
$\therefore AA_1=8$.

又$\angle C_1AB=60°$，$\therefore AB=4\sqrt{2}$.

$\therefore AB_1=\sqrt{AB^2+BB_1^2}=\sqrt{(4\sqrt{2})^2+8^2}=\sqrt{96}$.

$\therefore AD=\sqrt{AC_1^2-AB_1^2}=\sqrt{128-96}=4\sqrt{2}$.

8.［解析］ 如图所示，过圆台两母线的截面为等腰梯形ABB_1A_1，OO_1为圆台的高，取AB，A_1B_1的中点分别为C，C_1，则$OC=6$ cm，$O_1C_1=3$ cm.



$\therefore AB=2\sqrt{AO^2-OC^2}=16$ cm，

$A_1B_1=2\sqrt{A_1O_1^2-O_1C_1^2}=8$ cm，

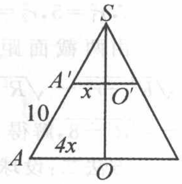
$CC_1=\sqrt{OO_1^2+(OC-O_1C_1)^2}$

$=\sqrt{8^2+(6-3)^2}=\sqrt{73}$ cm.

$\therefore S_{截}=\frac{1}{2}(AB+A_1B_1)\times CC_1$

$=\frac{1}{2}(16+8)\times\sqrt{73}=12\sqrt{73}\text{cm}^2$.

9.［解析］ 设圆锥的母线长为y cm，圆台上、下底面半径分别是x cm，$4x$ cm. 作圆锥的轴截面，如图所示.



在Rt$\triangle SOA$中，$O'A'\parallel OA$，

所以$SA':SA=O'A':OA$，

即$(y-10):y=x:4x$，

解得$y=13\frac{1}{3}$.

所以圆锥的母线长为$13\frac{1}{3}$ cm.

1.1.2 简单组合体的结构特征

目标导航

基础知识

了解简单组合体的概念，能判断组成简单组合体的几何体的形状、特征.

学习方法

1. 能过实例，理解空间几何体的基本构成形式.
2. 能够通过截面解决有关组合体的计算问题，实现由空间到平面的转化.

重点难点

1. 能够判断组成简单组合体的几何体形状.
2. 会利用截面解决组合体的有关计算问题.

重难冲刺

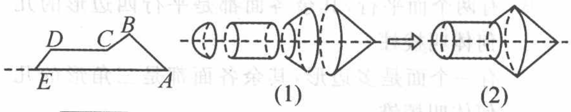
一、简单组合体的定义

由柱、锥、台、球等简单几何体组合而成的几何体叫做简单组合体.

知识点拨

简单组合体是由柱、锥、台、球中的两个或更多组合而成，解答时能想出组合体在空间中的真实情况是解此类题的关键.

例1 如图所示，将曲边图形$ABCDEA$绕AE所在的直线旋转一周，由此形成的几何体是由哪些简单的几何体构成的？其中$CD\parallel AE$，曲边DE为四分之一的圆周且圆心在AE上.



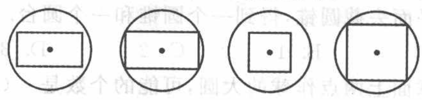
导析 将曲边图形正确分解，紧扣旋转体的有关定义是关键.

解析 将直线段AB，BC，CD及曲线段DE分别绕AE所在的直线旋转，如图(1)所示，它们分别被旋转得圆锥、圆台、圆柱以及半个球.

说明

若干个简单的几何体经适当地组合可得一些比较复杂的几何体. 我们在平时的学习中，应有意识地对一些较为复杂的图形进行拆卸与组合.

拓展 如图所示，一个正方体内接于一个球，过球心作一截面，其截面的可能图形是（　　）



A. ①③　　B. ②③

C. ①②③　　D. ②③④

解析 当截面平行于正方体的一个侧面时得③，当截面过正方体的体对角线时得②，当截面不平行于任何侧面也不过体对角线时得①，但无论如何都不会截出④.

答案　C.

二、简单组合体的构成形式

简单组合体的构成有两种基本形式：一种是由简单几何体拼接而成；一种是由简单几何体截去或挖去一部分而成.

知识点拨

几种常见的组合体：

(1)多面体与多面体的组合体：即由两个或两个以上的多面体组合而成的几何体.

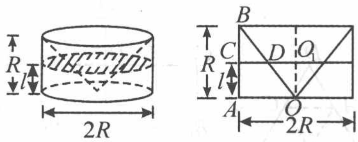
(2)多面体与旋转体的组合体：即由一个或一个以上的多面体与一个或一个以上的旋转体组合而成的几何体.

(3)旋转体与旋转体的组合体：即由两个或两个以上的旋转体组合而成的几何体.

例 2　从一个底面半径和高都是 R 的圆柱中，挖去一个以圆柱上底面为底，下底面中心为顶点的圆锥，得到如图所示的几何体. 如果用一个与圆柱下底面距离等于 l 并且平行于底面的平面去截它，求所得截面的面积.

导析　圆柱中挖去圆锥后的几何体被平行于底面的平面所截得的截面是一个圆环面，它是由圆柱被截得的圆面去掉一个圆锥被截得的同心圆面而得，作出轴截面再求解.

过轴作截面，如图所示.



(1)　　　(2)

被平行于下底面的平面所截得的圆柱的截面圆的半径 $O_1C=R$，圆锥的截面圆的半径 O_1D 设为 x.

$\because OA=AB=R$，$\therefore \triangle OAB$ 是等腰直角三角形.

又 $CD/\!/OA$，则 $CD=BC$. 故 $x=l$.

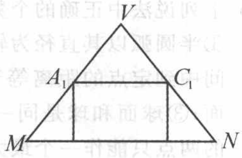
$\therefore$ 截面面积 $S=\pi R^2-\pi l^2=\pi(R^2-l^2)$.

说明

在解决类似问题时，要善于利用截面图形反映几何图形的性质，化立体几何问题为平面几何问题，从而降低空间想象的难度，顺利地解决相关问题.

拓展　已知圆锥的底面半径为 r，高为 h，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 内接于圆锥，求这个正方体的棱长.

解析　过内接正方体的一组对棱作圆锥的截面，如图所示.



设圆锥内接正方体的棱长为 x，则在轴截面中，正方体的对角面 A_1ACC_1 的一组邻边的长分别为 x 和 $\sqrt{2}x$.

$\because \triangle VA_1C_1 \backsim \triangle VMN$，

$\therefore \dfrac{\sqrt{2}x}{2r}=\dfrac{h-x}{h}=1-\dfrac{x}{h}$，

$\therefore \sqrt{2}hx=2rh-2rx$，

$\therefore x=\dfrac{2rh}{2r+\sqrt{2}h}$，

即圆锥内接正方体的棱长为 $\dfrac{2rh}{2r+\sqrt{2}h}$.

巩固练习

一、选择题

1. 将一个等腰梯形绕着它的较长的底边所在的直线旋转一周，所得的几何体　　(　　)

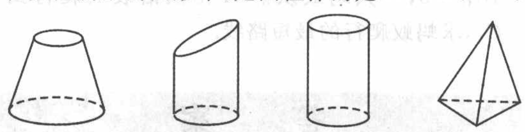
A. 由一个圆台、两个圆锥构成

B. 由两个圆台、一个圆锥构成

C. 由一个圆台、两个圆锥构成

D. 由一个圆柱、两个圆锥构成

2. 在如图所示的图形中，是圆柱体的是　　(　　)



A　　B　　C　　D

3. 下列说法正确的是　　(　　)

①圆台可以由任意一个梯形绕其一边旋转形成；

②用任意一个与底面平行的平面截圆台，截面是圆；

③在圆台上、下底面圆周上各取一点，则这两点的连线是圆台的母线；

④圆柱的任意两条母线平行，圆锥的任意两条母线相交，圆台的任意两条母线延长后相交.

A. ①②　　B. ②③　　C. ①③　　D. ②④

4. 下列命题中，错误的是　　(　　)

A. 圆柱的轴截面是过母线的截面中面积最大的一个

B. 圆锥的轴截面是所有过顶点的截面中面积最大的一个

C. 圆台的所有平行于底面的截面都是圆面

D. 圆锥所有的轴截面是全等的等腰三角形

二、填空题

5. 长方体的六个面的面积之和为 11，十二条棱长度之和为 24，则这个长方体的对角线为________.

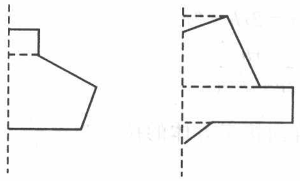
6. 下列说法中正确的个数是　　　　（　　）

①半圆弧以其直径为轴旋转所成的曲面叫球；②空间中到定点的距离等于定长的所有点的集合叫球面；③球面和球是同一个概念；④经过球面上不同的两点只能作一个最大的圆.

A. 1　　　　B. 2　　　　C. 3　　　　D. 4

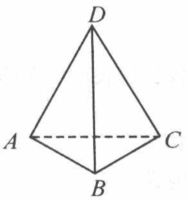
三、解答题

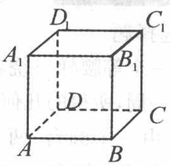
7. 由如图所示的两个平面图形绕虚线旋转一周后，形成的立体图形是由哪些简单几何体构成的？



(1)　　　　(2)

8. 请画出如下图所示的几何体的表面展开图.





尖子生题库

9. 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=4$，$BC=3$，$BB_1=5$，一只蚂蚁从点 A 出发沿表面爬行到点 C_1，求蚂蚁爬行的最短路线.

答　　案

1. [解析]　如图所示，所得几何体由一个圆柱、两个圆锥构成. 故选 D.

[答案]　D

2. [解析]　A 为圆台，B 上下底面不平行，D 为棱锥，故选 C.

[答案]　C

3. [解析]　①错，圆台是直角梯形绕其直角边或等腰梯形绕其底边的中线旋转形成的；②正确；由母线的定义知③错；④正确. 所以应选 D.

[答案]　D

4. [解析]　对圆柱、圆锥、圆台过轴的截面，简称轴截面.

设圆锥轴截面顶角为 α，母线长为 l，则轴截面面积 $S=\frac{1}{2}l^2\sin\alpha$，显然 $\alpha\leqslant 90°$ 时，轴截面面积是最大的；$\alpha>90°$ 时，轴截面面积不是最大的. 故选 B.

[答案]　B

5. [解析]　设长方体的长、宽、高为 a、b、c.

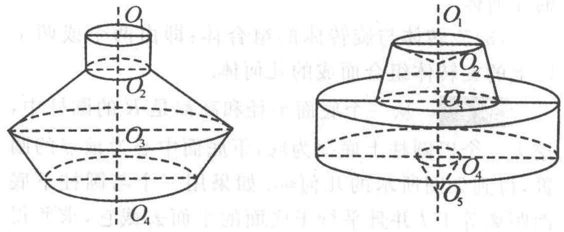
$\therefore \begin{cases}2(ab+bc+ac)=11\\4(a+b+c)=24\end{cases}$

$\therefore \sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{(a+b+c)^2-2(ab+bc+ac)}=5$.

[答案]　5

6. [解析]　半圆弧以其直径为轴旋转所成的曲面叫球面，球面围成的几何体，叫球，①不正确；②正确；球面和球是两个不同的概念，③错误；若球面上不同的两点恰好为最大的圆的直径的端点，则过此两点的大圆有无数个，故④错误.

7. [解析]　在平面图形中，分别过不在轴上的顶点向轴作垂线，绕轴旋转一周后形成的几何体的形状如图所示：

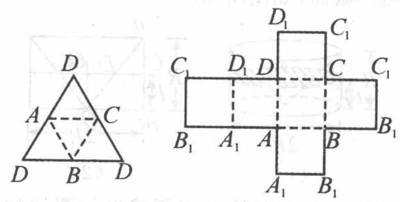


(1)　　　　(2)

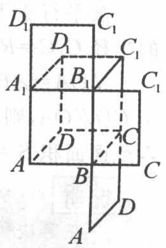
其中(1)是由一个圆柱 O_1O_2 和两个圆台 O_2O_3、O_3O_4 组成.

(2)由一个圆锥 O_4O_5、一个圆柱 O_3O_4 及一个圆台 O_1O_3 中挖去圆锥 O_1O_2 组成.

8. [解析]　展开图的大体形状如图所示：



9. [解析]　沿长方体的一条棱剪开，使 A 和 C_1 展在同一平面上，求线段 AC_1 的长即可，有如图所示的三种剪法：



(1)若将 C_1D_1 剪开，使面 AB_1 与面 A_1C_1 共面，可求得：

$AC_1=\sqrt{4^2+(5+3)^2}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$.

(2)若将 AD 剪开，使面 AC 与面 BC_1 共面，可求得：$AC_1=\sqrt{3^2+(5+4)^2}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$.

(3)若将 CC_1 剪开，使面 BC_1 与面 AB_1 共面，可求得：$AC_1=\sqrt{(4+3)^2+5^2}=\sqrt{74}$.

相比较可得蚂蚁爬行的最短路线长为 $\sqrt{74}$.

1.2 空间几何体的三视图和直观图

1.2.1 中心投影与平行投影

目标导航

基础知识

初步了解空间图形平行投影和中心投影.

学习方法

要充分结合现实生活中的实例,从实际的例子出发认识两种投影的有关概念及性质.

重点难点

1. 中心投影与平行投影的区别.
2. 平行投影的性质.

重难冲刺

一、中心投影

1. 投影:由于光的照射,在不透明物体后面的屏幕上可以留下这个物体的影子,这种现象叫做投影.其中,我们把光线叫做投影线,把留下物体影子的屏幕叫做投影面.

2. 中心投影:光由一点向外散射形成的投影,叫做中心投影.

知识点拨

(1)中心投影的投影线交于一点.

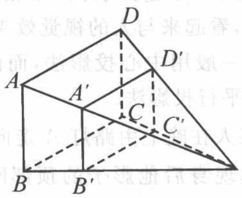
(2)中心投影的特点:空间图形经过中心投影后,直线变成直线,但平行线可能变成了相交的直线.

(3)如果一个平面图形所在平面与投影面平行,则中心投影后得到的图形与原图形是相似的.

例 1 甲、乙两个足球队决赛互罚点球时,罚球点离球门约 10 m,乙队守门员违例向前冲出 3 m,因而扑住了点球,不光彩地赢得了胜利.事实上乙队守门员违例向前冲出了 3 m 后,其要封堵的区域面积变小了,问此时乙队守门员需封堵区域的面积是原来球门面积的多少?

导析 利用中心投影的知识结合图形可以解决.

解析 从罚球点 S 向球门 $ABCD$ 四角引线,构成四棱锥 $S-ABCD$,如图所示,守门员从平面 $ABCD$ 向前移动 3 m 至平面 $A'B'C'D'$,只需封堵区域$A'B'C'D'$即可.

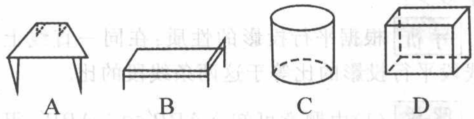


故$\dfrac{S_{\text{四边形}A'B'C'D'}}{S_{\text{四边形}ABCD}}=(\dfrac{7}{10})^2=\dfrac{49}{100}$.

故此时乙队守门员需封堵区域的面积是原来球门面积的$\dfrac{49}{100}$.

说明 利用中心投影后得到的图形与原图形的相似性是关键.

拓展 下列图形中采用中心投影画法的是 (　　)



解析 中心投影的投影线是由同一个点发出的.故选 A.

答案 A.

二、平行投影

1. 平行投影:在一束平行光线照射下形成的投影,叫做平行投影.

2. 平行投影的分类

(1)正投影:投影线垂直于投影面时,叫做正投影.

(2)斜投影:投影线不垂直于投影面时,叫做斜投影.

3. 平行投影的性质

(1)直线或线段的平行投影仍是直线或线段;

(2)平行直线的平行投影是平行或重合的直线;

(3)平行于投射面的线段，它的投影与这条线段平行且等长；

(4)与投射面平行的平面图形，它的投影与这个图形全等；

(5)在同一直线或平行直线上，两条线段平行投影的比等于这两条线段的比.

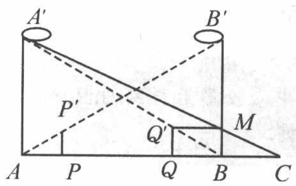
知识点拨

平行投影与中心投影的关系

(1)中心投影与平行投影的区别：平行投影的投射线互相平行；中心投影的投射线交于一点.

(2)中心投影后的图形与原图形相比虽然改变很多，但直观性强，看起来与人的视觉效果一致，因此画实际效果图时，一般用中心投影法，而画立体几何的图形时，一般用平行投影法.

例 2 某人在晚上由路灯 A 走向路灯 B，当他走到点 P 时，发现身后他影子的顶部刚好接触到路灯 A 的底部，当他向前再步行 12 m 到点 Q 时，发现身前他影子的顶部刚好接触到路灯 B 的底部. 已知此人的身高是 1.6 m，两个路灯的高度都是 9.6 m，且 $AP=QB=x$ m.



(1)求两个路灯之间的距离.

(2)当此人走到路灯 B 时，他在路灯 A 下的影子长是多少？

导析 根据平行投影的性质：在同一直线上，两条线段平行投影的比等于这两条线段的比.

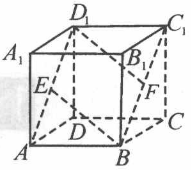
解析 (1)由题意可知$\triangle APP'\backsim\triangle ABB'$，得$\dfrac{AP}{AB}=\dfrac{PP'}{BB'}$，即$\dfrac{x}{12+2x}=\dfrac{1.6}{9.6}$，解得 $x=3$，则两个路灯之间的距离为 $2x+12=18$ m.

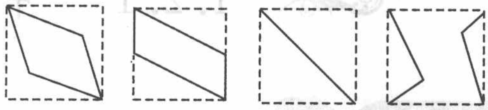
(2)由题意可知，$AA'=BB'=9.6$ m，$AB=18$ m，$BM=PP'=1.6$ m，而且$\triangle CMB\backsim\triangle CA'A$，所以$\dfrac{BM}{AA'}=\dfrac{CB}{CA}$，即$\dfrac{1.6}{9.6}=\dfrac{BC}{18+BC}$，解得 $BC=3.6$ m，故当此人走到路灯 B 时，他在路灯 A 下的影长为 3.6 m.

说明

解决这类问题的关键是正确作出平面图形，把实际应用问题转化到同一个平面上，利用平面几何的知识解决.

拓展 如图所示，E、F 分别是正方体的面 ADD_1A_1、面 BCC_1B_1 的中心，则四边形 BFD_1E 在该正方体的面上的正投影可能是右图中的________.（要求：把可能的图形的序号都填上）





① ② ③ ④

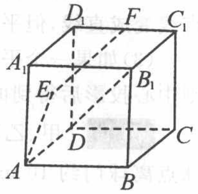
解析 由正投影的定义，将四边形 BFD_1E 在该正方体面上的正投影一一找出来. 由正投影的定义，四边形 BFD_1E 在面 AA_1D_1D 与面 BB_1C_1C 上的正投影是图③；其在面 ABB_1A_1 与面 DCC_1D_1 上的正投影是图②；其在面 $ABCD$ 与面 $A_1B_1C_1D_1$ 上的正投影也是图②. 故①④错误.

答案 ②③

巩固练习

一、选择题

1. 如果图形所在的平面不平行于投影线，那么下列说法正确的是 ( )
   A. 矩形的平行投影一定是矩形
   B. 梯形的平行投影一定是梯形
   C. 正方形的平行投影一定是矩形
   D. 正方形的平行投影一定是菱形
2. 两条相交直线的平行投影是 ( )
   A. 两条相交直线
   B. 一条直线
   C. 一条折线
   D. 两条相交直线或一条直线
3. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 是正方形 ADD_1A_1 的中心，F 是棱 C_1D_1 的中点，则四边形 AC_1FE 在平面 BCC_1B_1 内的正投影是 ( )



   A. 一个三角形　　B. 一个梯形
   C. 一条线段　　D. 三个点
4. 有下列说法：
   ①一条线段中点的平行投影仍是这条线段投影的中点；
   ②平行投影的投射线互相平行，中心投影的投射线

相交于一点；

③空间图形经过中心投影后，直线变成直线，但平行线可能变成了相交的直线；

④空间几何体在平行投影与中心投影下有不同的表现形式.

其中正确的结论有 ( )

A.1 个　　B.2 个

C.3 个　　D.4 个

二、填空题

5.两条平行线在一个平面内的正投影可能是________.

①两条平行线；

②两个点；

③两条相交直线；

④一条直线和直线外的一点；

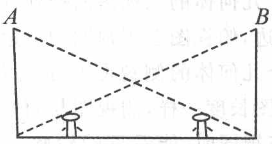
⑤一条直线.

(把正确的序号填到题中的横线上)

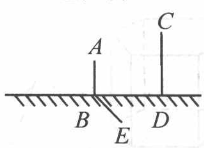
6.有以下四个命题：①矩形的平行投影一定是矩形；②梯形的平行投影一定是梯形；③两条相交直线的投影可能平行；④如果一个三角形的平行投影仍是三角形，那么它的中位线的平行投影，一定是这个三角形的平行投影对应的中位线. 其中正确的个数为________.

三、解答题

7.小迪身高 1.6 m，一天晚上走到两路灯之间，如图所示，他发现自己的影子的顶部正好在 A 路灯的底部，他又向前走了 5 m，又发现自己影子的顶部正好在 B 路灯的底部，已知两路灯之间的距离为 10 m(两路灯高度是一样的)，求路灯的高度.



8.有两根木棒 AB、CD 在同一平面上竖着，其中 AB 这根木棒在太阳光下的影子 BE 如图所示，则 CD 这根木棒的影子 DF 应如何画？



尖子生题库

9.在有太阳的某时刻，一个大球放在水平地面上，球的影子伸到距离球与地面接触点 10 m 处，同一时刻一根长$\sqrt{3}$m 的木棒垂直于地面，且影子长 1 m，求此球的半径.

答　案

1.［解析］ 梯形两底的平行投影一定平行. 故选 B.

［答案］ B

2.［解析］ 当投影线与两相交直线所在平面不平行时，是两条相交直线；平行于所在平面时，是一条直线. 故选 D.

［答案］ D

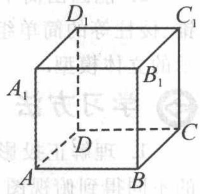
3.［解析］ 本题主要考查正投影的性质，问题的关键是找到四个点 A、C_1、F、E 在平面 BCC_1B_1 内投影的位置，可知 F 和 C_1 在平面 BCC_1B_1 内的正投影是点 C_1，A 在平面 BCC_1B_1 内的正投影是点 B，而 E 在平面 BCC_1B_1 内的正投影是 BC_1 的中点，因此四边形 AC_1FE 在平面 BCC_1B_1 内的正投影是线段 BC_1，故应选 C.

［答案］ C

4.［解析］ 在同一直线上两条线段平行投影比等于这两条线段的比，故①对. 平行投影是平行光线照射下的投影，中心投影是光由一点向外散射形成的投影，故②对. 由于中心投影的投影线交于一点，故平行线会变为相交的直线. 故③对. 一个三角板在平行投影下与原图形全等，但在中心投影下大小会改变. 故④对.

［答案］ D

5.［解析］ 如图所示，在正方体 $A_1B_1C_1D_1-ABCD$ 中，直线 $A_1B_1 /\!/ C_1D_1$，它们在平面 $ABCD$ 内的投影为 AB、CD，且 $AB /\!/ CD$，故①正确；它们在平面 BCC_1B_1 内的正投影是点 B_1 和点 C_1，故②正确；它们在平面 ABB_1A_1 内的投影是同一直线 A_1B_1，故⑤正确. 故填①②⑤.

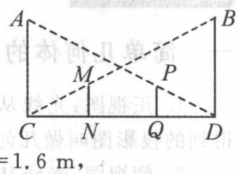


［答案］ ①②⑤

6.［解析］ 当投影线与图形平行时，矩形和梯形的平行投影为线段. 故①②不对. 两条相交直线的投影可能是两条相交直线或一条直线，不可能是两条平行直线. 故③错. 由平行投影的性质知④对.

［答案］ 1

7.［解析］ 如图所示，设 A、B 为两路灯，小迪从 MN 移动到 PQ，并设 C、D 分别为路灯 A、B 的底部.



由题中已知得 $MN=PQ=1.6$ m，$NQ=5$m，$CD=10$m.

设 $CN=x$，则 $QD=5-x$. 设路灯高 BD 为 h.

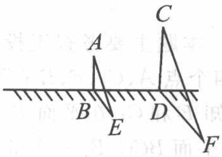
因为$\triangle CMN\backsim\triangle CBD$，所以$\frac{CN}{CD}=\frac{MN}{BD}\Rightarrow\frac{x}{10}=\frac{1.6}{h}$.

因为$\triangle PQD\backsim\triangle ACD$，

所以$\frac{PQ}{AC}=\frac{QD}{CD}\Rightarrow\frac{1.6}{h}=\frac{5-x}{10}$.

由①②，得$x=2.5$ m，$h=6.4$ m，即路灯高为6.4 m.

8.［解析］ 如图所示，画法：



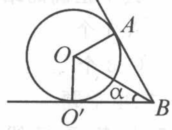
(1)连接AE；

(2)过C点作$CF\parallel AE$；

(3)过D点作$DF\parallel BE$.

CF与DF交于F点，则DF即为所求CD的影子.

9.［解析］ 如图所示，由题设知$BO'=10$，设$\angle ABO'=2\alpha(0°<\alpha<45°)$，由题意知$\tan 2\alpha=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$，



即$2\alpha=60°$，$\therefore \alpha=30°$，

$\therefore \tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$. 在Rt$\triangle OO'B$中，$\tan\alpha=\frac{R}{BO'}$，

$\therefore R=BO'\cdot\tan\alpha=\frac{10\sqrt{3}}{3}$m.

1.2.2 空间几何体的三视图

目标导航

基础知识

1. 理解三视图的原理和视图间的相互关系.

2. 能画出简单的空间图形（长方体、球、圆柱、圆锥、棱柱等的简单组合）的三视图，能识别三视图所表示的立体模型.

学习方法

1. 理解正投影的概念和性质，依据投影面位置的不同得到俯视图、正视图和侧视图，并且要注意它们如何布局.

2. 在做三视图和有关三视图的计算问题时，要紧紧抓住三视图的特征.

重点难点

1. 能作出简单几何体的三视图.

2. 能识别三视图所表示的几何体.

重难冲刺

一、简单几何体的三视图

1. 正视图：光线从几何体的前面向后面正投影得到的投影图叫做几何体的正视图.

2. 侧视图：光线从几何体的左面向右面正投影得到投影图叫做几何体的侧视图.

3. 俯视图：光线从几何体的上面向下面正投影得到的投影图叫做几何体的俯视图.

4. 三视图：几何体的正视图、侧视图和俯视图统称为几何体的三视图.

知识点拨

(1)正投影的性质.

垂直于投射面的直线或线段的正投影是点；

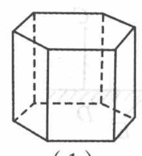
垂直于投射面的平面图形的正投影是直线或直线的一部分.

(2)一个几何体的三视图的排列规则是侧视图在正视图的右边，俯视图在正视图的下边.

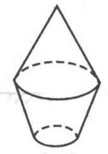
(3)一个几何体的侧视图和正视图高度一样，俯视图与正视图长度一样，侧视图与俯视图宽度一样.

(4)画三视图时，能看见的轮廓线和棱用实线表示，不能看见的轮廓线和棱用虚线表示.

例1 画出如图所示几何体的三视图.



(1)



(2)

导析 (1)确定主视、俯视、左视的方向，同一物体放置的位置不同，所画的三视图可能不同.

(2)看清简单组合体是由哪几个基本几何体生成的，并注意它们的生成方式，特别是它们的交线位置.

(3)对于画出的三视图，要检验是否符合“长对