青少年成长系列丛书

学好初中几何的36招

主　编　陈贞华
副主编　李贺玲

中国工人出版社

青少年成长系列丛书

学好初中几何的36招

主　编　陈贞华
副主编　李贺玲
撰　写　周春荔　李延林　李贺玲
　　　　张丽丽　何木贤　赵　钢

中国工人出版社

（京）新登字145号

《学好初中几何的36招》

主　编　陈贞华

副主编　李贺玲

中国工人出版社出版

新华书店北京发行所发行

怀柔县孙史山印刷厂印刷

787×1092　1/32　8.875印张　196千字

1991年12月第1版

1992年11月第2次印刷

印数：20501～25500册

ISBN 7-5008—1095-4/G·181　　定价：3.90元

序　　言

由陈贞华老师主编的《中小学各科学法36招丛书》马上要和广大读者见面了。这是一件值得庆贺的喜事，丛书的作者都是我熟悉的朋友，他们是在教学上卓有成就的中小学教师，因此，这套丛书的出版，无论对学法的理论研究，还是提高广大中小学生的学习技巧，使他们学会学习，都是有重要意义的。

其实，学会学习并不是一个新的思想。在西方，最早提出这个问题的是法国思想家和教育家卢梭。他说，形成一种独立的学习方法，要比获得知识更为重要。在中国，早在2500多年前，孔子就已重视学习方法，他的名言“学而不思则罔，思而不学则殆”，讲的就是学习过程中学习与思考关系的方法问题。但是是，长期以来，人们对于学法却重视不够。随着科学、教育事业的发展，从60年代起，国际学术界提出了“学习策略”的问题。所谓学习策略，主要指在学习活动中，为达到一定的学习目标而学会学习的规则、方法和技巧。从此，对学法问题的研究进入了新的阶段。

现代学习策略的研究，强调学生是学习的主人，

重视学生在学习活动中的积极作用和能动作用；强调学生的学法是学会学习的前提，是造成学习个别差异的重要原因；强调学习方法是一系列复杂的有目的的活动，指出它包括制定学习计划、监控学习过程、检查学习活动等；强调学习方法是一种策略实施的过程，决策成分也很丰富，诸如集中注意、组织学习、联想策略、推理情境、反省思维、激发动机、反馈调节，等等。用我的话来说，学生的学习策略或方法，就是眼、耳、脑、口、手都要活动，也就是平时我们常说的七个字：看、听、记、写、问、忆、练。这里强调的是要抓预习、听课、提问、复习、练习等学习环节，使学生随着年级的升高和年龄的增长，逐步学会对知识"咀嚼、反刍、消化"，以使其知识、智力能力都能有显著的长进。

而《中小学各科学法36招丛书》的作者，对上述问题有其深刻而独特的见解，加上丰富的教学经验，对中小学各科的学法或学习策略作了精辟的分析，对各科学习都作了精心的指导。我深信，广大中小学生会喜欢这"36招"的。

林崇德

1991年7月4日于北京师范大学

说　明

《青少年成长系列丛书》以关心青少年健康成长为宗旨。这部大型丛书将围绕青少年思想品德教育，身体及心理健康，课内及课外学习等内容陆续推出。

中小学生在学习中，不仅要学会，而且要会学。学习方法好，可收事半功倍之效。本书提供学好各科的有效招数。古语中之“三十六”本是虚指，极言其多。本书在众多学习招数中筛选重要的、行之有效的36条加以阐述，故名《学法36招》。

这套书有七个分册：小学语文、数学，初中语文、代数、几何、物理、化学。每册分36章，提供最佳学法36招。部分章节配有基本题、变异题、疑难题，分层次验证学法的可行，有规，并附参考答案。

本书适用于小学3—6年级和初中各年级学生、中小学教师、教育行政领导以及家长阅读。这套书以现行教材（全国统编、四省市教材中国家教委规定的基本教材）为依据，把握教材中的重点及难点，为学生排疑解难。教给学生（教师、家长）学习窍门；更为学有余力的学生开扩眼界，拓宽思路，激发兴趣，提供有相当难度的练习题，并详加引导，真正在“学好”上做文章。本书还为教师提供丰富的备课内容和有效的教法，直接为提高课堂教学质量服务。本书又是家长辅导的好教材，提供检查孩子学习，有相当水平和科学性的练习题。使家长的辅导抓住重点，有的放矢，收到明

显效果。

作者在写作中充分注意到启发式。每个学科（分册）分36章，每章开始设有生动的引发问题。每章都有正、副两个标题：一个点明本章的叙述对象（即知识），一个提示解难的招数（即方法）。行文中先指出知识的疑难之点，再传授排疑解难之术。援引实例说明时，每例均有其独特角度。例与例之间有小结、有过渡，使读者明确每一例题的目的性，加深探求兴趣。验证题可使读者将学到的招付诸实践：基本题、变异题、疑难题步步攀登，从中品尝学会、学好知识的无限乐趣。读者在悬念迭出的文字中，学习知识，增长能力，乐在其中。

本书得到北京师范大学发展心理研究所所长、中国教育学会理事兼学术委员、北师大教授林崇德博士的热情支持，除参与课题论证外，还为本书作序。参与策划的还有北京财贸学院副教授李森根，北京十四中高级教师王福庭。担任这套书主编的是北京一一九中学高级教师陈贞华。《学好初中几何的36招》由北京二中数学一级教师、中学数学奥林匹克一级教练李贺玲担任副主编。参加撰稿的有北京师范学院副教授、中学生数学竞赛专家、奥林匹克高级教练周春荔，北京师范学院讲师、数学会秘书李延林，北京二中数学教师张丽丽、任九明、孟庆敏、何木贤、范洪春、韩长海、王刃、翠薇路中学郝彬，五十七中申伯平，朝英中学郑志红，二十四中赵钢、黄景春等。

编　者

1991年7月

目　录

学习平面几何的精要是通过掌握基础知识、基本技能来发展能力，开发智力。如果具体的学习平面几何的一着一式是“金子”，那么学会分析问题的方法就是“点金术”。俗语说“分析好，大有益”，如何从总体上把握分析几何问题的策略呢？这就是要探讨的问题。

1

平面几何证题思路的探索

——几何思路的总体分析法

一个几何问题通常是由已知、未知两部分组成。分析问题，寻求解题思路就是沟通从已知到未知的逻辑通路、寻找的方法，主要是运用逻辑手段进行分析、尝试。依据题设条件所提供的信息，用推理的方法来寻求这一逻辑通路。常用倒推分析、综合分析，和从反面入手分析的途径。而要实现这些具体途径常用的“解剖刀”——探索分析方法主要有以下几种。

1. 实验发现法

从特殊、个别情况实验入手，发现规律（通过归纳、概括等手段提出猜测）面向一般情形推广、过渡，这是一种常用的探索方法。

例1：试证：正三角形内任一点到三边距离之和等于一个定值。

分析：已知$\triangle ABC$中，$AB=BC=CA$，P为形内任意一点，$PH_1\perp BC$于H_1，$PH_2\perp AC$于H_2，$PH_3\perp AB$于H_3，求证的结论是$PH_1+PH_2+PH_3$为定值。

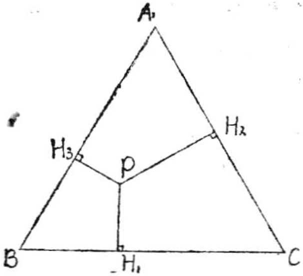

图 1-1

对上述条件和结论搞清楚了，我们分析问题就有了依据和基础。

首先提出的问题是：这个定值是什么？目标清楚了，才好达到它，这时，我们退一步想：当P为形内任一点，$PH_1+PH_2+PH_3$是定值，即是个常量。那么P取形内某个特殊点时，$PH_1+PH_2+PH_3$的特殊值也应该等于这个常量。这样，我们就从特殊、个别情况实验入手来推断这个常量到底是什么！

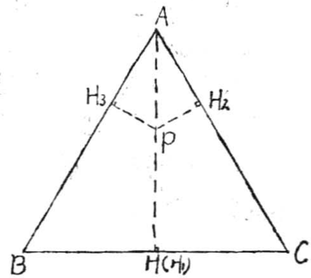

图 1-2

我们不妨把P点取在最极端的位置——正$\triangle ABC$顶点A，容易断定$PH_1+PH_2+PH_3$等于正$\triangle ABC$的高AH，这就使我们猜测，这个定值就是"正$\triangle ABC$的高AH"，为了加强这一猜测，我们不妨再实验另一个特殊位置，比如P在正$\triangle ABC$的高线AH上，易知

$$\angle PAH_2=\angle PAH_3=30^\circ \quad PH_2=PH_3=\frac{1}{2}AP$$

$$\therefore PH_1+PH_2+PH_3=PH+\frac{1}{2}AP+\frac{1}{2}AP$$

$$=PH+PA=AH$$

这样，对我们的猜想更加强了可信度。我们的命题就可以转化为下述猜测命题：

“试证：正三角形内任一点到三边距离之和等于正三角形的高”。

大家注意，图1-2分析中我们已经证明了“正三角形高线上一点到三边距离之和等于这条高线”——不妨称为引理，再通过一般与特殊的联系，我们不难写出如下的证明：

证明 如图1-3，延长H_1P交AB于A_1，

过A_1作$A_1C_1 /\!/ AC$，交BC于C_1，交PH_2于K，则$\triangle A_1BC_1$为正三角形，则P为正$\triangle A_1BC_1$高线AH_1上一点。依上面的引理可得：

$$PH_1 + PK + PH_3 = A_1H_1$$

但我们作$BH \perp AC$于H，交A_1C_1于D。则BD为正$\triangle A_1B_1C_1$的一条高线。$A_1H_1 = BD$，$KH_2 = DH$。

所以 $PH_1 + PH_2 + PH_3 = PH_1 + (PK + KH_2) + PH_3$

$= (PH_1 + PK + PH_3) + KH_2$

$= A_1H_1 + KH_2$

$= BD + DH = BH$（正$\triangle ABC$的高—常值）

所以得到了我们的结论。

2. 联想类比法

联想类比在于寻求未知问题与我们已经学过的或已经解决的问题的相似之处，从而找到解决问题的入门的钥匙。

例2：P为锐角$\triangle ABC$内任意一点。

$l = PA + PB + PC$。求证，当$\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120°$时，$l$取得最小值。

分析：这是一道几何极值问题。P为$\triangle ABC$内一点。要求的是$PA + PB + PC$的最小值。乍一见此题简直无从下手。

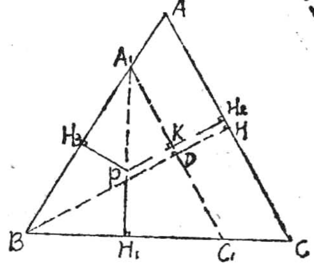

图 1-3

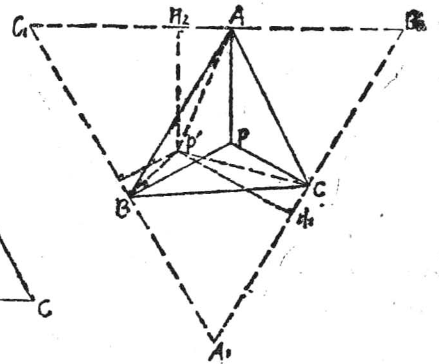

图 1-4

这时，我们应该调动在头脑中存储的信息。是否见过与本题在条件或结论或某种形式上的相似的例题或习题呢？！有经验的同学会联想到本文的例1。例 1 中是“正$\triangle ABC$内一点P到三边距离之和”，例 2 中是“锐角$\triangle ABC$内一点P到三个顶点距离之和”，在形式上有着某种相似。能否把P到$\triangle ABC$三个顶点距离之和转化为某个正$\triangle A_1B_1C_1$内的P点到三边距离之和呢？这种联想类比，使我们开辟了如下的思路：在锐角$\triangle ABC$中，有点P满足$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120°$。$P'$为锐角$\triangle ABC$中任一点，我们只需证明

$AP'+BP'+CP'\geqslant AP+BP+CP$即可。

过A、B、C分别作AP、BP、CP的垂线交成$\triangle A_1B_1C_1$，由于$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120°$，容易推得$\angle A_1=\angle B_1$

$=\angle C_1=60°$。所以$\triangle A_1B_1C_1$为正三角形。过P'作$P'H_1\perp A_1B_1$于H_1，过P'作$P'H_2\perp B_1C_1$于H_2，过P'作$P'H_3\perp C_1A_1$于H_3。由例1的结论，正三角形内任一点到三边距离之和为定值，因此有$P'H_1+P'H_2+P'H_3=PA+PB+PC$。

但$P'A\geqslant P'H_2$，$P'B\geqslant P'H_3$，$P'C\geqslant P'H_1$

$$\begin{aligned}\therefore P'A+P'B+P'C&\geqslant P'H_2+P'H_3+P'H_1\\&=P'H_1+P'H_2+P'H_3\\&\geqslant PA+PB+PC\end{aligned}$$

这就证明了，当$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120°$时，$PA+PB+PC$取最小值。此时的$P$点就是$\triangle ABC$中的著名的费尔玛点。

在学习几何过程中，对典型定理与例题的证法要注意学习与研究。遇到新的问题时常常与过去学过的例题、习题比较相似之处，从类比中获得启示，这是一种常用的方法。

3. **反例证伪法**

举反例证伪是一项重要的基本功。证伪有如证实一样，也是一种科学的方法。二者互为补充，对某一命题的证伪也就是对它的否定命题的证实。证伪同样可以发现真理、完善认识。

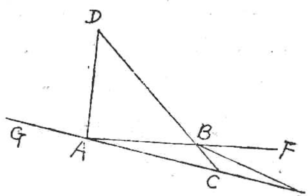

图 1-5

例3："三角形有两条外角平分线相等，则三角形必为等腰三角形"是真命题还是假命题?

分析：有些人认为例3中的命题是真命题，其实是否定的。反例如下制作：

如图1-5，$\triangle ABC$中，作$\angle A$外角平分线交CB延长线于D，作$\angle ABC$外角平分线交AC延长线于E。外角平分线AD

$=BE$。

为了寻求特例，我们增加条件为$AD=AB=BE$，设

$$\angle BAC=\alpha \quad \angle DAB=\frac{180^\circ-\alpha}{2}=90^\circ-\frac{\alpha}{2}$$

$\because AB=AD$

$$\therefore \angle ABD=\frac{1}{2}\left[180^\circ-(90^\circ-\frac{\alpha}{2})\right]=45^\circ+\frac{\alpha}{4}$$

$\because AB=BE \Longrightarrow \angle BEA=\angle BAE=\alpha \Longrightarrow \angle EBF=2\alpha$

$\therefore \angle FBC=4\alpha$

由$\angle ABD=\angle CBF$得

$$4\alpha=45^\circ+\frac{\alpha}{4}，解得\alpha=12^\circ。进而求得$$

$\angle ABC=132^\circ \quad \angle ACB=36^\circ$

这时我们如图1-5作$\triangle ABC$，使$\angle BAC=12^\circ$，$\angle ABC=132^\circ$，则$\angle ACB=36^\circ$，作$\angle ABC$的外角平分线交AC延长线于E，作$\angle BAC$的外角平分线交CB延长线于D，直接计算角度可以确定$AD=AB=BE$，这表明$\triangle ABC$（内角分别为132°，12°，36°） 外角平分线AD、BE相等，以$\triangle ABC$都不是等腰三角形，而是个不等边三角形。

4. 代数、几何、三角等各种方法与工具的综合与沟通

例4：$\triangle ABC$的内切圆半径为1，它的三条高线长均为正整数，求证：$\triangle ABC$为正三角形。

分析：$\triangle ABC$中，O为内切圆圆心，$r=1$，h_a，h_b，h_c为正整数，连OA、OB、OC，我们有

$$\frac{S_{\triangle OBC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{\frac{1}{2}ar}{\frac{1}{2}ah_a}=\frac{1}{h_a}\cdots\cdots(1)$$

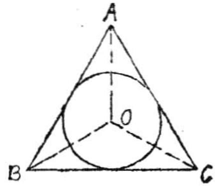

图 1-6

$$\frac{S_{\triangle OCA}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{\frac{1}{2}br}{\frac{1}{2}bh_b}=\frac{1}{h_b}\cdots\cdots(2)$$

$$\frac{S_{\triangle OAB}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{\frac{1}{2}cr}{\frac{1}{2}ch_c}=\frac{1}{h_c}\cdots\cdots(3)$$

（1）＋（2）＋（3）得

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{S_{\triangle OBC}+S_{\triangle OCA}+S_{\triangle OAB}}{S_{\triangle ABC}}$$

$$=\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ABC}}=1$$

下面我们讨论$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=1$，其中$h_a$，$h_b$，$h_c$均为正整数，它们中至少要有一个小于4，若不然，$h_a\geqslant 4$，$h_b\geqslant 4$，$h_c\geqslant 4$，则：

$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\leqslant\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}<1$，矛盾，我们不妨设$h_a<4$，但$h_a>2r=2$，得$h_a=3$

此时$\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{2}{3}$，由$h_b$，$h_c$均大于2，可知，它们之中