

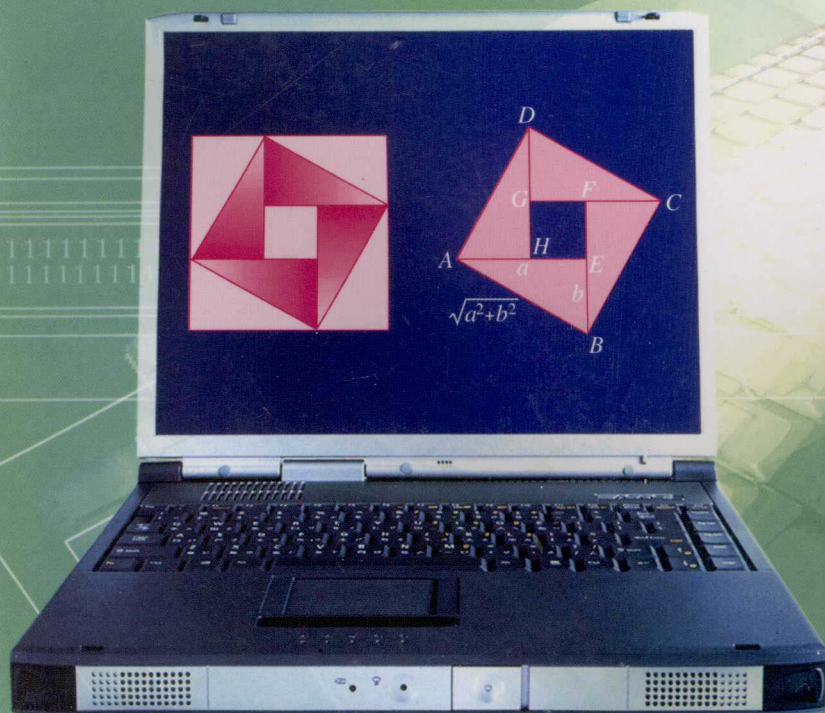
经全国中小学教材审定委员会
2004 年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

数学 5

必修

人民教育出版社 课程教材研究所 编著
中学数学课程教材研究开发中心



人民教育出版社
A 版

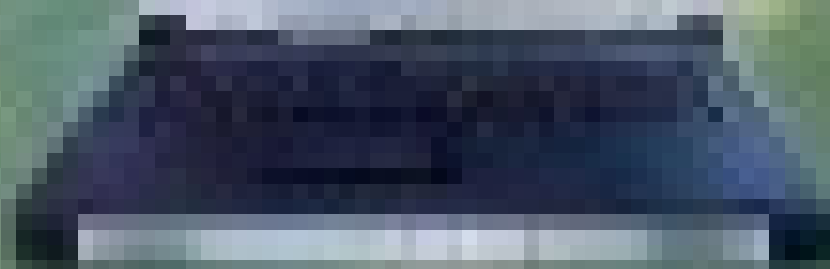
第 1 章 绪论

第 2 章 一元函数微分学

数 学



本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材
《高等数学》（第 2 版）的配套教材

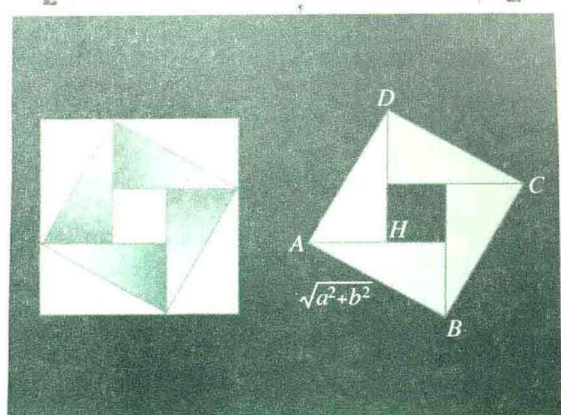


普通高中课程标准实验教科书

数学 5

必修

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心 编著



人民教育出版社
版

普通高中课程标准实验教科书

数学 5

必修

A 版

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心 编著

*

人民教育出版社出版

(北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼 邮编:100081)

网址: <http://www.pep.com.cn>

浙江省出版总社重印

浙江省新华书店发行

杭州杭新印务公司印装

*

开本: 890 毫米×1 240 毫米 1/16 印张: 7.25 字数: 155 000

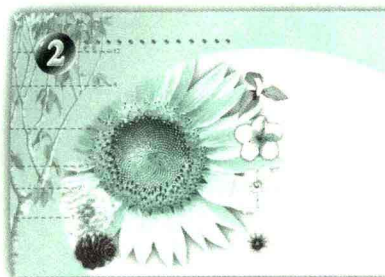
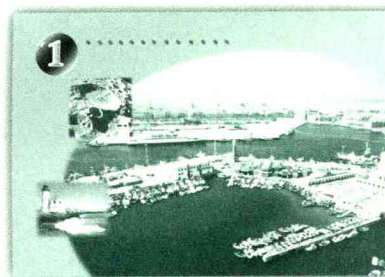
2007 年 1 月第 3 版 2010 年 10 月浙江第 7 次印刷

ISBN978-7-107-17709-5 定价: 6.69 元
G · 10798

著作权所有·请勿擅用本书制作各类出版物·违者必究
如发现印、装质量问题, 请与本厂联系调换。电话: 0571 — 87640154

目 录

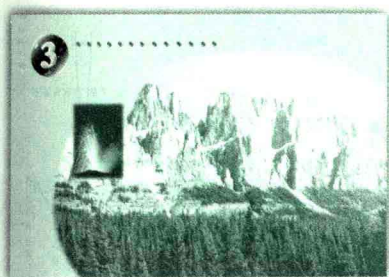
第一章 解三角形	1
1.1 正弦定理和余弦定理	2
探究与发现 解三角形的进一步讨论	8
1.2 应用举例	11
阅读与思考 海伦和秦九韶	21
1.3 实习作业	22
小结	23
复习参考题	24
第二章 数列	27
2.1 数列的概念与简单表示法	28
阅读与思考 斐波那契数列	32
信息技术应用 估计 $\sqrt{2}$ 的值	35
2.2 等差数列	36
2.3 等差数列的前 n 项和	42



2.4 等比数列	48
2.5 等比数列的前 n 项和	55
阅读与思考 九连环	59
探究与发现 购房中的数学	63
小结	65
复习参考题	67

第三章 不等式

3.1 不等关系与不等式	72
3.2 一元二次不等式及其解法	76
3.3 二元一次不等式(组)与简单的线性 规划问题	82
阅读与思考 错在哪儿	91
信息技术应用 用 Excel 解线性规划问题举例	94
3.4 基本不等式: $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$	97
小结	102
复习参考题	103



第一章

解三角形

1.1

正弦定理和余弦定理

1.2

应用举例

1.3

实习作业

在我国古代就有嫦娥奔月的神话故事.明月高悬,我们仰望夜空,会有无限遐想,不禁会问,遥不可及的月亮离地球究竟有多远呢?

1671年,两个法国天文学家测出了地球与月球之间的距离大约为 385 400 km.他们是怎样测出两者之间距离的呢?

在数学发展历史上,受到天文测量、航海测量和地理测量等方面实践活动的推动,解三角形的理论得到不断发展,并被用于解决许多测量问题.

在初中,我们已经能够借助于锐角三角函数解决有关直角三角形的一些测量问题.在实际工作中我们还会遇到许多其他的测量问题,这些问题仅用锐角三角函数就不够了,如:

1. 怎样在航行途中测出海上两个岛屿之间的距离?
2. 怎样测量底部不可到达的建筑物的高度?
3. 怎样在水平飞行的飞机上测量飞机下方山顶的海拔高度?
4. 怎样测出海上航行的轮船的航速和航向?

这些问题的解决需要我们进一步学习任意三角形中边与角关系的有关知识.

在本章中我们要学习正弦定理和余弦定理,并学习应用这两个定理解三角形,并解决实际测量中的一些问题.

1.1

正弦定理和余弦定理

1.1.1 正弦定理

探究

我们知道，在任意三角形中有大边对大角，小边对小角的边角关系。我们是否能得到这个边、角关系准确量化的表示呢？

在 $\triangle ABC$ 中，如果已知 $\angle A$ 所对的边 BC 长为 a ， $\angle B$ 所对的边 AC 长为 b ， $\angle C$ 所对的边 AB 长为 c ，我们研究 $\angle A$ ， $\angle B$ ， $\angle C$ ， a ， b ， c 之间有怎样的数量关系。

由于我们不容易直接得到一般三角形中边和角的关系，所以，我们先考虑直角三角形这种特殊情形。

如图 1.1-1，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C$ 是最大的角，所对的斜边 c 是最大的边，要考虑边长之间的数量关系，就涉及到了锐角三角函数。根据正弦函数的定义，

$$\frac{a}{c} = \sin A,$$

$$\frac{b}{c} = \sin B.$$

所以

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = c.$$

又 $\sin C = 1$ ，所以

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

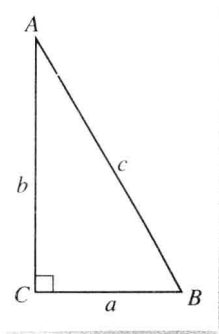


图 1.1-1

那么，对于一般的三角形，以上关系式是否仍然成立呢？

如图 1.1-2，当 $\triangle ABC$ 是锐角三角形时，设边 AB 上的高是 CD ，根据三角函数的定义，

$$CD = a \sin B,$$

$$CD = b \sin A,$$

所以

$$a \sin B = b \sin A,$$

得到

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}.$$

同理, 在 $\triangle ABC$ 中,

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

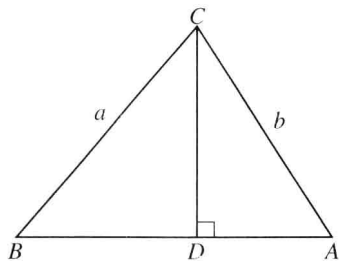


图 1.1-2

探究

当 $\triangle ABC$ 是钝角三角形时, 以上等式仍然成立吗?
是否可以用其他方法证明正弦定理?

从上面的讨论和探究, 我们得到下面的定理.

正弦定理 (law of sines) 在一个三角形中, 各边和它所对角的正弦的比相等, 即

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

正弦定理指出了任意三角形中三条边与对应角的正弦之间的一个关系式. 由正弦函数在区间上的单调性可知, 正弦定理非常好地描述了任意三角形中边与角的一种数量关系.

一般地, 把三角形的三个角 A, B, C 和它们的对边 a, b, c 叫做三角形的元素. 已知三角形的几个元素求其他元素的过程叫做解三角形 (solving triangles).

思考?

我们利用正弦定理可以解决一些怎样的解三角形问题呢?

分析正弦定理可知, 如果已知三角形的任意两个角与一边, 由三角形内角和定理, 可以计算出三角形的另一角, 并由正弦定理计算出三角形的另两边; 如果已知三角形的任意两边与其中一边的对角, 应用正弦定理, 可以计算出另一边的对角的正弦值, 进而确定这个角和三角形其他的边和角.

例 1 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $A = 32.0^\circ$, $B = 81.8^\circ$, $a = 42.9$ cm, 解三角形.

解: 根据三角形内角和定理,

$$C = 180^\circ - (A + B)$$

$$=180^{\circ}-(32.0^{\circ}+81.8^{\circ})$$

$$=66.2^{\circ}.$$

根据正弦定理,

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{42.9\sin 81.8^{\circ}}{\sin 32.0^{\circ}}\approx 80.1(\text{cm});$$

根据正弦定理,

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{42.9\sin 66.2^{\circ}}{\sin 32.0^{\circ}}\approx 74.1(\text{cm}).$$

例2 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a=20$ cm, $b=28$ cm, $A=40^{\circ}$, 解三角形 (角度精确到 1° , 边长精确到1 cm).

解: 根据正弦定理,

$$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{28\sin 40^{\circ}}{20}\approx 0.899\ 9.$$

因为 $0^{\circ}<B<180^{\circ}$, 所以 $B\approx 64^{\circ}$, 或 $B\approx 116^{\circ}$.

(1) 当 $B\approx 64^{\circ}$ 时,

$$C=180^{\circ}-(A+B)\approx 180^{\circ}-(40^{\circ}+64^{\circ})=76^{\circ},$$

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{20\sin 76^{\circ}}{\sin 40^{\circ}}\approx 30(\text{cm});$$

(2) 当 $B\approx 116^{\circ}$ 时,

$$C=180^{\circ}-(A+B)\approx 180^{\circ}-(40^{\circ}+116^{\circ})=24^{\circ},$$

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{20\sin 24^{\circ}}{\sin 40^{\circ}}\approx 13(\text{cm}).$$

练习

1. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知下列条件, 解三角形 (角度精确到 1° , 边长精确到1 cm):

(1) $A=45^{\circ}$, $C=30^{\circ}$, $c=10$ cm;

(2) $A=60^{\circ}$, $B=45^{\circ}$, $c=20$ cm.

2. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知下列条件, 解三角形 (角度精确到 1° , 边长精确到1 cm):

(1) $a=20$ cm, $b=11$ cm, $B=30^{\circ}$;

(2) $c=54$ cm, $b=39$ cm, $C=115^{\circ}$.

1.1.2 余弦定理

探究

如果已知一个三角形的两条边及其所夹的角, 根据三角形全等的判定方法, 这个三角形是大小、形状完全确定的三角形.

我们仍然从量化的角度来研究这个问题, 也就是研究如何从已知的两边和它们的夹角计算出三角形的另一边和另两个角的问题.

先考虑怎样计算出三角形第三条边的长. 这就是要研究如何用已知的两条边及其所夹的角来表示第三条边的问题.

如果已知三角形的两边的长 $BC=a$, $AC=b$, 边 BC 和边 AC 所夹的角是 C , 我们要设法找出一个已知的 a , b 和 C 与第三条边 c 之间的一个关系式, 或用已知的 a , b 和 C 表示第三条边 c 的一个公式.

思考?

联系已经学过的知识和方法, 我们从什么途径来解决这个问题?

由于涉及边长问题, 我们可以考虑用向量的数量积, 或用解析几何中的两点间距离公式来研究这个问题.

如图 1.1-3, 设 $\overrightarrow{CB}=a$, $\overrightarrow{CA}=b$, $\overrightarrow{AB}=c$, 那么

$$c=a-b,$$

$$|c|^2 = c \cdot c = (a-b) \cdot (a-b)$$

$$= a \cdot a + b \cdot b - 2a \cdot b$$

$$= a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

所以

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

同理可以证明:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B.$$

于是, 得到以下定理:

余弦定理 (law of cosines) 三角形中任何一边的平方等于其他两边的平方的和减去

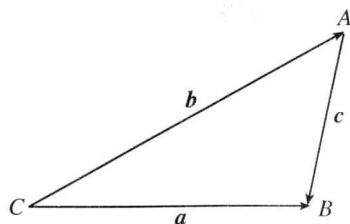


图 1.1-3



在这个证明中, 你感到向量运算的威力了吗?

这两边与它们的夹角的余弦的积的两倍。即

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

应用余弦定理，我们就可以从已知的两边和夹角计算出三角形的第三条边。



用坐标方法怎样证明余弦定理？还有其他方法吗？



余弦定理指出了三角形的三条边与其中的一个角之间的关系，应用余弦定理，我们可以解决已知三角形的三边确定三角形的角的问题，怎么确定呢？

从余弦定理，可以得到它的推论

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca},$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

应用以上推论，就可以从三角形的三边计算出三角形的三个角。

从上面可知，余弦定理及其推论把用“边、角、边”和“边、边、边”判定三角形全等的方法从数量化的角度进行了刻画，使其变成了可以计算的公式。



勾股定理指出了直角三角形中三边平方之间的关系，余弦定理则指出了一般三角形中三边平方之间的关系，如何看这两个定理之间的关系？

从余弦定理和余弦函数的性质可知，如果一个三角形两边的平方和等于第三边的平方，那么第三边所对的角是直角；如果小于第三边的平方，那么第三边所对的角是钝角；如果大于第三边的平方，那么第三边所对的角是锐角。从上可知，余弦定理可以看作是勾股定理的推广。

我们把正弦定理和余弦定理结合起来应用，就能很好地解决三角形的问题。

三角函数把几何中关于三角形的定性结果都变成可定量计算的公式了，你该因此更喜爱三角函数了吧！

例3 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $b=60$ cm, $c=34$ cm, $A=41^\circ$, 解三角形 (角度精确到 1° , 边长精确到1 cm).

解: 根据余弦定理,

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ &= 60^2 + 34^2 - 2 \times 60 \times 34 \times \cos 41^\circ \\ &\approx 3\,600 + 1\,156 - 4\,080 \times 0.754\,7 \\ &\approx 1\,676.82, \end{aligned}$$

所以

$$a \approx 41 \text{ (cm)}.$$

由正弦定理得,

$$\sin C = \frac{c \sin A}{a} \approx \frac{34 \times \sin 41^\circ}{41} \approx \frac{34 \times 0.656}{41} \approx 0.544\,0.$$

因为 c 不是三角形中最大的边, 所以 C 是锐角, 利用计算器可得

$$C \approx 33^\circ,$$

$$B = 180^\circ - (A + C) \approx 180^\circ - (41^\circ + 33^\circ) = 106^\circ.$$

例4 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a=134.6$ cm, $b=87.8$ cm, $c=161.7$ cm, 解三角形 (角度精确到 $1'$).

解: 由余弦定理的推论得:

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ &= \frac{87.8^2 + 161.7^2 - 134.6^2}{2 \times 87.8 \times 161.7} \\ &\approx 0.554\,3, \end{aligned}$$

$$A \approx 56^\circ 20';$$

$$\begin{aligned} \cos B &= \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \\ &= \frac{134.6^2 + 161.7^2 - 87.8^2}{2 \times 134.6 \times 161.7} \\ &\approx 0.839\,8, \end{aligned}$$

$$B \approx 32^\circ 53';$$

$$\begin{aligned} C &= 180^\circ - (A + B) \approx 180^\circ - (56^\circ 20' + 32^\circ 53') \\ &= 90^\circ 47'. \end{aligned}$$



在解三角形的过程中, 求某一个角有时既可以用余弦定理, 也可以用正弦定理, 两种方法有什么利弊呢?



我们讨论的解三角形的问题可以分为几种类型? 分别是怎样求解的?
要求解三角形, 是否必须已知三角形一边的长?

练习

- 在 $\triangle ABC$ 中, 已知下列条件, 解三角形 (角度精确到 0.1° , 边长精确到 0.1 cm):
 - $a=2.7\text{ cm}$, $b=3.6\text{ cm}$, $C=82.2^\circ$;
 - $b=12.9\text{ cm}$, $c=15.4\text{ cm}$, $A=42.3^\circ$.
- 在 $\triangle ABC$ 中, 已知下列条件, 解三角形 (角度精确到 0.1° , 边长精确到 0.1 cm):
 - $a=7\text{ cm}$, $b=10\text{ cm}$, $c=6\text{ cm}$;
 - $a=9.4\text{ cm}$, $b=15.9\text{ cm}$, $c=21.1\text{ cm}$.



解三角形的进一步讨论

先研究下面的问题.

已知: 在 $\triangle ABC$ 中, $a=22\text{ cm}$, $b=25\text{ cm}$, $A=133^\circ$, 解三角形.

根据正弦定理,

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{25 \sin 133^\circ}{22} \approx 0.8311.$$

因为 $0^\circ < B < 180^\circ$, 所以 $B \approx 56.21^\circ$, 或 $B \approx 123.79^\circ$.

于是

$$C = 180^\circ - (A + B) \approx 180^\circ - (133^\circ + 56.21^\circ) = -9.21^\circ,$$

或

$$C = 180^\circ - (A + B) \approx 180^\circ - (133^\circ + 123.79^\circ) = -76.79^\circ.$$

到这里, 让我们惊讶的是所计算出的角竟然是负角.

问题出在何处呢? 是已知条件有问题吗?

分析已知条件, 我们注意到 $a=22\text{ cm}$, $b=25\text{ cm}$, 这里 $a < b$, $A=133^\circ$, 是一个钝角, 根据三角形的性质, 应该有 $A < B$, 因而 B 也应该是一个钝角, 而在一个三角形中是不可能有两个钝角的. 这说明满足已知条件的三角形是不存在的.

从上面的分析我们发现, 在已知三角形的两边及其中一边的对角解三角形时, 在某些条件下会出现无解的情形. 下面我们一起深入研究一下这种情形下解三角形的问题.

以已知 a, b, A , 解三角形的问题为例来讨论. 在这种情形下我们可以先用正弦定理, 计算出另一边的对角的正弦值

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a}.$$

并由此求出 B ；再用三角形内角和定理计算出第三个角

$$C = 180^\circ - (A + B).$$

然后，应用正弦定理计算第三边

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

1. 如果已知的 A 是钝角或直角，那么必须 $a > b$ 才能有解，这时从 $\sin B = \frac{b \sin A}{a}$ 计算 B 时，只能取锐角的值，因此有一个解。

2. 如果已知的 A 是锐角，并且 $a > b$ 或者 $a = b$ ，这时从 $\sin B = \frac{b \sin A}{a}$ 计算 B 时，也只能取锐角的值，因此都只有一个解。

3. 如果已知的 A 是锐角，并且 $a < b$ ，我们可以分下面三种情形来讨论：

(1) 如果 $a > b \sin A$ ，这时从 $\sin B = \frac{b \sin A}{a}$ 计算得 $\sin B < 1$ ， B 可以取一个锐角的值和一个钝角的值，因此可以有两个解。

(2) 如果 $a = b \sin A$ ，这时从 $\sin B = \frac{b \sin A}{a}$ 计算得 $\sin B = 1$ ， B 只能是直角，因此只有一个解。

(3) 如果 $a < b \sin A$ ，这时从 $\sin B = \frac{b \sin A}{a}$ 计算得 $\sin B > 1$ ，由于一个角的正弦的值不能大于 1，因此没有解。

你能画出图来表示上面各种情形下三角形的解吗？

如果已知一边和两个角，会有不能解的情况吗？

我们知道，任何三角形的两边之和都大于第三边。当已知三角形的三边作一个三角形时，已知的三条边必须满足上面的条件。例如，如果已知的三条边的长分别是 3 cm, 4 cm, 5 cm，我们就可以作出这个三角形。但是我们无法作出一个三角形，使它的三条边分别是 3 cm, 4 cm, 7 cm，或分别是 3 cm, 4 cm, 8 cm。这是因为已知条件中三角形的两边的和等于或小于第三边。在这种情况下，当然也无法解出三角形。从上可知，在已知三角形的三边解三角形时，边长必须满足构成三角形的条件，解三角形才是有意义的。

如果已知三角形的两边和它们的夹角，那么这个三角形是唯一确定的，也就是可解的。我们可以用余弦定理计算出第三边，用余弦定理的推论或用正弦定理计算出其余的角。

习题 1.1



A 组

1. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知下列条件, 解三角形 (角度精确到 1° , 边长精确到 1 cm):
 - (1) $A=70^\circ$, $C=30^\circ$, $c=20$ cm;
 - (2) $A=34^\circ$, $B=56^\circ$, $c=68$ cm.
2. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知下列条件, 解三角形 (角度精确到 1° , 边长精确到 1 cm):
 - (1) $b=26$ cm, $c=15$ cm, $C=23^\circ$;
 - (2) $a=15$ cm, $b=10$ cm, $A=60^\circ$;
 - (3) $b=40$ cm, $c=20$ cm, $C=25^\circ$.
3. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知下列条件, 解三角形 (角度精确到 1° , 边长精确到 1 cm):
 - (1) $a=49$ cm, $b=26$ cm, $C=107^\circ$;
 - (2) $c=55$ cm, $a=58$ cm, $B=66^\circ$;
 - (3) $b=38$ cm, $c=40$ cm, $A=106^\circ$.
4. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知下列条件, 解三角形 (角度精确到 1°):
 - (1) $a=9$ cm, $b=10$ cm, $c=15$ cm;
 - (2) $a=31$ cm, $b=42$ cm, $c=27$ cm.

B 组

1. 证明: 设三角形的外接圆的半径是 R , 则
$$a=2R\sin A, \quad b=2R\sin B, \quad c=2R\sin C.$$
2. 在 $\triangle ABC$ 中, 如果有性质 $a\cos A=b\cos B$, 试问这个三角形的形状具有什么特点?

1.2

应用举例

正弦定理和余弦定理在实际测量中有许多应用,下面介绍它们在测量距离、高度、角度等问题中的一些应用.在这些应用问题中,测量者借助于经纬仪与钢卷尺等测量角和距离的工具进行测量.

同学们在学习时可以考虑,题中为什么要给出这些已知条件,而不是其他的条件?应该注意到,例题及习题中的一组已知条件,常隐含着对于这类测量问题在某一种特定情境和条件限制下的一个测量方案.在这种情境与条件限制下,别的方案中的量可能无法测量出来,因而不能实施别的测量方案.

下面是几个测量距离的问题.



例1 如图1.2-1,设A、B两点在河的两岸,要测量两点之间的距离.测量者在A的同侧,在所在的河岸边选定一点C,测出AC的距离是55 m, $\angle BAC=51^\circ$, $\angle ACB=75^\circ$. 求A、B两点间的距离(精确到0.1 m).

分析:所求的边AB的对角是已知的,又已知三角形的一边AC,根据三角形内角和定理可计算出边AC的对角,根据正弦定理,可以计算出边AB.

解:根据正弦定理,得

$$\begin{aligned}\frac{AB}{\sin C} &= \frac{AC}{\sin B}, \\ AB &= \frac{AC \sin C}{\sin B} \\ &= \frac{55 \sin C}{\sin B} \\ &= \frac{55 \sin 75^\circ}{\sin(180^\circ - 51^\circ - 75^\circ)} \\ &= \frac{55 \sin 75^\circ}{\sin 54^\circ} \\ &\approx 65.7(\text{m}).\end{aligned}$$

答:A、B两点间的距离为65.7米.

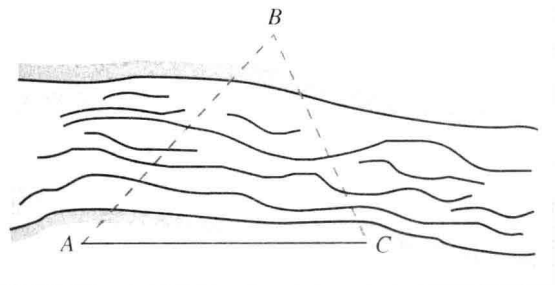


图 1.2-1

例2 如图1.2-2, A、B两点都在河的对岸(不可到达),设计一种测量A、B两点