数学建模

堵秀凤　张　剑　张宏民　编著

北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

数学建模

堵秀凤　张　剑　张宏民　编著

北京航空航天大学出版社

BEIHANG UNIVERSITY PRESS

内容简介

本书主要根据“数学建模”课程的教学和数学建模竞赛培训活动的实际需要，以及作者多年从事相关工作的实践经验和体会编写而成。

内容包括：概论；初等数学模型；数学规划模型；微积分模型；微分方程模型；稳定性模型；层次分析法模型；差分方程模型；生态系统的最优捕获问题的数学模型；具有收获率的三种群数学模型以及常用数学建模软件。各章均有一定量的习题。建模方法由浅入深，适合数学、应用数学、信息与计算科学、生物工程及资源环境等理工专业本科生、研究生作教材，也适合建模竞赛培训作教材，以及供从事相关研究的科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

数学建模 / 堵秀凤，张剑，张宏民编著. --北京：北京航空航天大学出版社，2011.8

ISBN 978-7-5124-0525-7

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①堵… ②张… ③张… Ⅲ. ①数学模型—高等学校—教材 Ⅳ. ①O141.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 152464 号

数学建模

堵秀凤　张　剑　张宏民　编著

责任编辑　许传安

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路 37 号(邮编 100191)　http://www.buaapress.com.cn

发行部电话：(010)82317024　传真：(010)82328026

读者信箱：bhpress@263.net　邮购电话：(010)82316936

北京时代华都印刷有限公司印装　各地书店经销

*

开本：787×1092　1/16　印张：16.25　字数：413 千字

2011 年 8 月第 1 版　2011 年 8 月第 1 次印刷　印数：3 000 册

ISBN 978-7-5124-0525-7　定价：32.00 元

前 言

近半个世纪以来,数学的形象发生了很大的变化,数学不再是数学家和物理学家、天文学家等少数人手中的神秘武器。它渐渐为越来越多的人们所了解和关注。它在科学研究与工程技术中的作用不断增强,同时由于现代数学在理论上更抽象,在方法上更综合,在应用上更广泛,因此新的数学分支层出不穷,相互交叉,相互渗透。数学不仅更广泛地应用于自然科学和工程技术,而且由于定量化已成为所有学科共同的理论和方法的基础,使得各学科领域与数学的结合更为广泛和深入,产生了许多与数学相结合的新学科,如数学化学、数学生物学、数学地质学、数学社会科学等。

随着各个学科对实际问题的研究日益精确化、定量化和数字化,使得数学建模成为解决实际问题的重要工具。数学建模就是通过建立数学模型来解决各种实际问题的过程,也就是通过对实际问题的抽象,引入相关的变量和参数,进行合理的简化和假设,再利用数学知识对模型进行分析求解,最后再对实际问题进行解释说明。一个完整的数学建模过程是综合运用知识解决现实问题的过程。现代教育思想的核心是培养创新思维、意识及能力。数学建模课就是一门培养学生的数学素质,提高学生的数学应用能力的基本技能课。

在我国每位学生的学习生涯中学习数学的持续时间最长,可是往往有学生发出疑问:“我们学习这门数学课程有什么用途?”而授课教师往往空泛作答:“今后你会用上。”这实质上是数学的重要性究竟体现在哪里的问题。对学生而言,学习数学很重要,一方面在于数学知识与数学方法的应用,数学可以为组织和构造知识提供方法,训练数学的思维方式,可以锻炼敏锐的理解力,培养全面、系统科学的考虑问题的能力;另一方面,数学建模课程是学生学习数学知识,提高数学应用能力及综合素质的最佳结合点:可激发学生学习数学的兴趣和欲望,培养主动探索、努力进取的学风。

本书作为数学建模课程的教材,力图贯彻现代教育思想,以介绍数学建模的分析求解方法为主线,着重使学生掌握运用数学知识建立数学模型,提高解决实际问题的技能和技巧,强调从事现代科研活动的能力和相关素质的培养。重视培养和提高学生对现实问题的洞察力,对复杂问题的抽象、简化能力,运用已学到的数学思想和方法对现实问题的综合应用分析能力,计算机应用能力。

本书结合作者多年从事“数学建模”课程建设与教学,以及担任数学建模竞赛培训工作中所汲取的经验和体会编写而成。作为多年从事数学建模教学和指导学生的教师,对数学建模课程的创新性特点有较深刻的理解,形成了具有特色的教学指导思想和教学方法。

本书具有以下特点:模型内容丰富,模型取自实际问题;重点关注目前应用较为广泛、具有较强实际意义的生物学、环境学和医学模型;模型建立过程注重问题的分析;模型求解中强调数学软件的应用。本书重在介绍数学建模方法及数学模型的建立过程。

本书内容共分为 11 章:第 1 章数学建模概论,介绍了数学建模的基本概念、基本方法和步骤,以及数学建模竞赛等内容;第 2 章初等数学模型,主要介绍用初等数学的方法构造和求解模型;第 3 章数学规划模型,主要对线性规划、整数规划和 0－1 规划、非线性规划等问题进行

了介绍，并通过典型例题说明建立规划模型的方法；第 4 章微积分模型，主要利用微分和积分的方法来得到实际问题的最优方案或最优解；第 5 章微分方程模型，主要介绍建立微分方程模型解决实际问题的方法；第 6 章稳定性模型，主要利用微分方程稳定性理论研究，当时间充分长以后动态过程的变化趋势；第 7 章层次分析模型，主要介绍处理决策问题的层次分析法；第 8 章差分方程模型，主要介绍利用差分方程模型来解实际问题；第 9 章生态系统的最优捕获问题的数学模型，主要利用数学建模的知识来研究生态系统的最优捕获问题；第 10 章具有收获率的三种群数学模型，利用变分矩阵和 Routh - Hurwitz 准则，研究复杂的三种群生态模型平衡点的存在性，局部稳定性问题及系统持续生存的条件；第 11 章常用数学建模软件，结合实际的数学建模实例，介绍 MathCAD, Mathematica, Lingo 等数学软件的基本操作和使用方法。此外全书各章均配有一定量的习题，对学生基本概念和基本方法的掌握及思维的启发很有帮助。

本书第 1,8,9,10 章由堵秀凤教授编写；第 2,3,4,11 章由张宏民编写；第 5,6,7 章由张剑编写。

本书适合于高等学校本科或研究生作为数学建模课程教材，也可作为大学生数学建模竞赛培训教材，以及可供科技工作者和自学者参考。

限于编著者水平，不妥之处请不吝指教.

作　者

2011 年 3 月

于齐齐哈尔大学理学院

目 录

第 1 章 数学建模概论

现代科学技术的飞速发展使得数学科学的地位发生了巨大变化，数学应用范围的迅速扩展已经不再局限于物理领域，而是向经济、生态、人口、环境、医学、社会等各个非物理领域及各工程技术领域深入渗透，各学科对各自领域中的实际问题的研究日益精确化、定量化和数字化使得数学模型已经成为各学科解决实际问题的重要工具。因此建立一个好的数学模型对解决实际问题是至关重要的，越来越受到人们的重视。面对复杂的实际问题进行条理性分析，应用某些数学方法描述问题的实质，给出数学结构，进而采用现代化的数学软件进行计算，并对结果进行分析、研究，使之能合理地解释实际问题，并且得到更广泛的应用。本章在给出数学模型和数学建模的基本概念后，进一步说明了建立数学模型的方法和过程，数学建模的教学与学习的方法，并对大学生数学建模竞赛的发展和意义做了简单介绍。通过本章的学习使读者对数学建模的基础知识有初步的了解。

1.1 数学模型与数学建模

1.1.1 原型和模型

在当代这个五彩缤纷、变化万千的现实世界中，人们无时无刻不在运用智慧和力量去认识、利用、改造这个世界。在现实世界里，被人们认识、建造和控制的对象可以以它们各种形式的模型呈现在人们面前。与各种模型相对应，它们在现实世界里的原始参照物通称为原型。原型(prototype)是指人们在社会活动和生产实践中关心和研究的现实世界中的实际对象，在科技领域则常用系统(system)、过程(process)等术语，如机械系统、电力系统、生态系统、交通系统、社会经济系统；又如导弹飞行过程、化学反应过程、污染扩散过程等等。模型则指为了某个特定目的将原型的某一部分信息简缩、提炼而成的原型替代物，可以看成是原型某一方面的理想化。模型是实物、过程的表示，是人们认识事物的框架；它可能是对实体的仿造、模拟，也可能是某些基本属性的抽象。模型是客观事物的一种简化的表示和体现，它应具有如下特点：

(1) 它是客观事物的一种模仿或抽象。它的一个重要作用就是加深人们对客观事物如何运行的理解。为了使模型成为帮助人们合理进行思考的一种工具，因此要用一种简化的方式来表现一个复杂的系统或现象。

(2) 为了能协助人们解决问题，模型必须具备所研究系统的基本特征或要素。此外，还应包括决定其原因和效果的各个要素之间的相互关系。有了这样的一个模型，人们就可以在模型内实际处理一个系统的所有要素，并观察它们的效果。

模型不是原型原封不动的复制品。原型有各个方面和各种层次的特征，而模型只要求反映与某种目的有关的那些方面和层次。一个原型，为了不同的目的可以有许多不同的模型。模型的基本特征是由构造模型的目的决定的。如放在展厅里的飞机模型(见图 1.1.1)应该在外形上逼真，但是不一定会飞。而参加航模竞赛的模型飞机(见图 1.1.2)要具有良好的飞行性能，在外观上不必苛求。至于在飞机设计、试制过程中用到的数学模型和计算机模拟，则只

要求在数量规律上真实反映飞机的飞行动态特性，毫不涉及飞机的实体。

图 1.1.1　展示模型

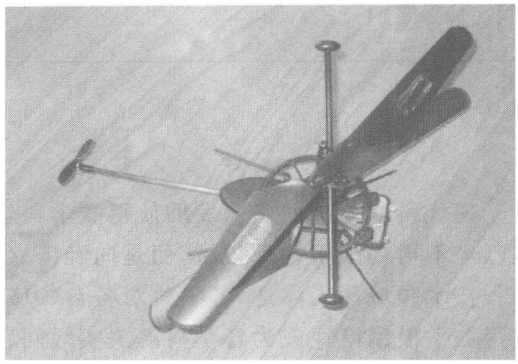

图 1.1.2　飞行竞赛的模型

人们经常会遇到或用到各种模型，如飞机模型、水坝模型、火箭模型、人造卫星模型等实物模型；也有用文字、符号、图表、公式、框图等描述客观事物的某些特征和内在联系的模型。例如，一张电路图并不需要用实物来模拟，它可以用抽象的符号、文字和数字来反映出该电路的结构特征。用模型替代原型的方式来分类，模型可以分为形象模型和抽象模型。前者包括直观模型、物理模型等；后者包括思维模型、符号模型、数学模型等。

1.1.2　数学模型的定义及分类

数学模型是实际问题的一种抽象模拟。它用数学符号、数学公式、图表、算法或程序描述现实对象中的数量关系。数学模型的定义可详细地描述为：对于现实世界的一个特定对象，为了一个特定目的，根据特有的内在规律，做出一些必要的简化假设，运用适当的数学工具得到的一个数学结构。

模型的共性是能真实地反映所模仿对象的某一方面的属性，例如常见的火箭、汽车、建筑模型，它们只是在外观（形状和比例）上与真实对象相同；而数学模型，是要根据被模仿对象的特征，尤其是它的变化（运动）规律，用数学语言去描述和模仿对象的实际的数量关系、空间形态、运动趋势等。既然是模型，当然只是近似的，但又要尽可能地逼真；而实际的对象往往十分复杂，制约的因素很多，但建立模型时关键要考虑其中最主要的因素，舍弃其中的次要因素。一旦数学模型建立了，实际问题转换成了数学问题，就可以用数学工具、数学方法去求解了。

数学模型与数学是不完全相同的，主要体现在三个方面：

(1) 研究内容：数学主要是研究对象的共性和一般规律，而数学模型主要是研究对象的个性（针对性）和特殊规律。

(2) 研究方法：数学的主要研究方法是演绎推理，即按照一般原理考察特定的对象，导出结论；而数学模型的主要研究方法是归纳加演绎。归纳是依据个别现象推断一般规律。归纳是演绎的基础，演绎是归纳的指导。数学模型是将现实对象的信息加以翻译、归纳的结果，经过求解、演绎，得到数学上的解答；再经过翻译回到现实对象，给出分析、预报、决策、控制的结果。

(3) 研究结果：数学的研究结果被证明了就一定是正确的，而数学模型的研究结果被证明了未必一定正确。这是因为与模型的简化和模型的假设有关。因此，对数学模型的研究结果必须接受实际的检验。

数学模型模仿了一个现实系统，但建立数学模型并非以模仿为目标，而是为了解决实际问题。数学模型是对现实对象的信息加以分析、提炼、归纳、翻译的结果。它用精确的语言表达了对象的内在特性，是利用函数、方程等变量描述方法以及数学概念创立的模型。在建立一个数学模型时，是从现实世界进入充满数学概念的抽象世界。在数学世界内，用数学方法对数学模型进行推理演绎、求解，并借助于计算机处理这个模型，得到数学上的解答。最后，再回到现实世界将模型的数学解翻译成现实问题的实际解答，如给出现实对象的分析、预报、决策、控制的结果。这些结果还必须经实际的检验，即用现实对象的信息检验得到的解答，确认结果的正确性。

随着科学技术对所研究客观对象的日益精确化、定量化和数学化，数学模型已成为处理科技领域中各种实际问题的重要工具，并在自然科学、工程技术科学与社会科学的各个领域中得到了广泛的应用。

数学建模面临的问题是多种多样的，问题中所给出的已知信息也各不相同，有的是一组实测数据或模拟数据，还有的是对问题的定性描述，不同的信息将用不同的方法去处理，从而得到不同的模型，即使面对相同的已知信息，由于建模的目的不同、分析的方法不同、采用的数学工具不同，所以得到的模型也不同。因此，对数学模型的分类也可以有很多不同的角度，一般来说可有以下分类：

（1）按模型的应用领域划分有：人口模型、交通模型、环境模型、资源模型等。

（2）按模型的建立方法划分有：初等模型、数学规划模型、微分方程模型、概率统计模型、网络模型、模糊模型、灰色模型等。

（3）按模型中变量特点划分有：随机模型和确定模型、连续模型和离散模型、线性模型和非线性模型、静态模型和动态模型等。

（4）按建模目的划分有：描述模型、预测模型、优化模型、决策模型、控制模型等。

1.1.3 数学建模的定义和作用

专家给数学建模下的定义是：通过对实际问题的抽象和简化，确定变量和参数，并根据某些规律建立起变量及参数间的确定关系的数学问题（也可称为一个数学模型），求解该数学问题，解释验证所得到的解，从而确定能否用于解决问题的多次循环、不断深化的过程。简而言之，就是建立数学模型来解决各种实际问题的过程。

根据数学模型推算出的结果，将能给待处理的实际问题提供十分有用的决策依据。实际问题来自不同的方面，有着不同的形式，从研究交通信号灯的设置到选排参加运动竞赛选手的阵容；从货物的分配到室内的装饰设计等。数学建模专家主要从事工业生产和商业流通领域模型的研究。但无论在什么地方，在生产车间、在家庭住所，还是在娱乐场所，都有许多具有共同点和需要用数学模型来解决的实用问题，因此需要将问题通过数学转换来构筑数学模型。

建模的关键并不是求解数学表达式，而在于是否能十分有效地将实际问题转换成数学方程，使产生的模型可用于对实际问题的求解，这是建模的关键；至于方程，可通过各种计算机来求解。所以建模的首要任务是全面地理解问题，然后将其转换成相应的数学形式。事实上，建模远比对由模型导出的公式进行求解难。因为实际的问题通常不以一种明显的数学形式存在；更困难的是，问题可能混杂在一起，不易完全分清。由于存在的问题不是纯数学问题，或者难以完整地了解它的特性，所以，应该注重对问题的透彻理解和可能做的各种变换，以及检验由模型导出的结论的正确程度。

随着社会的发展，数学在社会中的应用越来越广泛，作用越来越大，不仅在自然科学、人文科学、社会科学，而且在经济、军事、管理等领域都起着关键的作用。因此社会需要越来越多的有扎实数学功底的技术人才。但是，社会对数学的需求并不只是需要数学家和专门从事数学研究的人才，更迫切的是需要在各部门中从事实际工作的、能善于运用数学知识及数学的思维方法来解决实际问题的人才，从而取得经济效益和社会效益。也就是说，要能对复杂的实际问题进行分析，发现其中的可以用数学语言来描述的关系或规律。很多像牛顿一样伟大的科学家都是建立和应用数学模型的大师。他们将数学应用于各种不同的科学领域，在各自的学科中取得了巨大的成就。如力学中的牛顿定律、电磁学中的麦克斯伟方程组、化学中的门捷列夫周期表、生物学中的孟德尔遗传定律等都是经典学科中应用数学建模的重要范例。目前，数学建模在分析与设计、预报与决策、控制与优化、规划与管理等方面发挥着重要的作用。

1.2 数学建模的基本方法和步骤

1.2.1 数学建模的基本方法

数学建模的方法一般分为两类：

(1) 机理分析的方法。根据对客观事物特性的认识，分析其因果关系，通过推理分析找出反映事物内部机理的数量规律。建立的模型常常有明确的物理或现实意义，如“万有引力定律”、“能量转换定律”。

(2) 测试分析的方法。对客观事物的特性不能准确认识，看不清其内部机理，而将客观对象看作一个内部机理无法直接寻求的“黑箱系统”。采用系统辨识的方法，即通过对系统的输入、输出数据的测量和分析，按照一定的准则在某一类模型中找出与数据拟合得最好的模型，如“天气预报问题”、“疾病诊断问题”。

在这两类方法中又可根据所应用的数学方法的不同而分为许多具体的方法，如，机理分析方法中有微分方程方法、最优化方法等；测试分析方法中有回归分析方法、方差分析方法等。而且在实际建模中往往是两类方法的综合运用，即用机理分析方法确定数学模型的结构，再用测试分析的方法确定模型中的参数，比如人口预测模型。

1.2.2 数学建模的一般步骤

建模是十分复杂的创造性劳动，尽管需要研究的事物和对象不可胜数，这些事物和对象分属多种不同的学科和门类，但是，经过建模工作者长期的努力，已经摸索出一种切实可行的规律，针对实际问题，建立数学模型所经历的基本过程大体相同，数学建模的一般步骤应该是：

(1) 建模准备。在这一阶段应了解实际问题的背景(属于哪一个领域)，明确数学建模的目的(解决什么问题)，收集数学建模的必要信息(相关数据和参考资料)，分析研究对象的主要特征(内在机理或输入输出)，从而对实际问题有一个比较清晰的了解。

建模准备是确立建模课题的过程。数学建模是一项创新活动。它所面临的课题是人们在生产和科研中为了使认识和实践进一步发展必须解决的问题。“什么是问题？问题就是事物的矛盾。哪里没有解决的矛盾，哪里就有问题”，因此发现课题的过程就是分析矛盾的过程，贯穿生产和科技中的根本矛盾是认识和实践的矛盾。分析这些矛盾，从中发现尚未解决的矛盾，就是找到了需要解决的实际问题。如果这些实际问题需要给出定量的分析和解答，那么就可以把这些实际问题确立为数学建模的课题。

显然，如果有人拿一个数学建模课题向你咨询，那么首先就应该深入生产和科研实际以及社会生活实际，掌握与课题有关的第一手资料，汇集与课题有关的信息和数据，弄清问题的实际背景和建模的目的，进行建模筹划，组织必要的人力和物力等，然后以创新者的勇气和魄力将问题确立为数学建模课题。

(2) 模型假设。现实世界的问题往往比较复杂，在从实际中抽象出数学问题的过程中，应根据所研究对象的特征及建模目的，抓住问题的本质和主要因素，忽略次要因素，对问题做出合理的、简化的假设。假设的合理性主要是指假设要基本符合实际情况，假设的简化性主要是为了能够用数学的语言描述问题。能否做出合理的、简化的假设，取决于对问题的了解是否准确、深入，还取决于是否具有直观判断力、丰富想象力，以及是否具有足够的知识储备。

作为课题的原型都是复杂的、具体的，是质和量、现象和本质、偶然和必然的统一体。这样的原型，如果不经过抽象和简化，人们对其认识是困难的，也无法准确把握它的本质属性。而建模假设就是根据建模的目的对原型进行抽象、简化。把那些反映问题本质属性的形态、量及其关系抽象出来，简化掉那些非本质的因素，使之摆脱原型的具体复杂形态，形成对建模有用的信息资源和前提条件。对原型的抽象、简化不是无条件的，必须按照假设的合理性原则进行。假设合理性原则有以下几点。

1) 目的性原则：从原型中抽象出与建模目的有关的因素，简化掉那些与建模目的无关的或关系不大的因素。

2) 简明性原则：所给出的假设条件要简单、准确，有利于构造模型。

3) 真实性原则：假设条款要符合情理，简化带来的误差应满足实际问题所能允许的误差范围。

4) 全面性原则：在对事物原型本身作出假设的同时，还要给出原型所处的环境条件。

(3) 模型建立。根据所做出的假设，用数学的语言、符号描述出研究对象的内在规律，并建立包含常量、变量等的数学模型，可以是函数表达公式、数学方程、算法或图形等。

在这一阶段应首先区分哪些是常量，哪些是变量；哪些是已知的量，哪些是未知的量；然后查明各种量所处的地位、作用和它们之间的关系，选择恰当的数学工具和构造模型的方法对其进行表征，构造出刻画实际问题的数学模型。

在构造模型时究竟采用什么数学工具，要根据问题的特征、建模的目的要求及建模人的数学特长而定。可以这样讲，数学的任一分支在构造模型时都可能用到，而同一实际问题也可以构造出不同的数学模型。一般地讲，在能够达到预期目的的前提下，所用的数学工具越简单越好。在构造模型时究竟采用什么方法构造模型，要根据实际问题的性质和建模假设所给出的建模信息而定。可以同时采用多种方法，以取长补短，达到建模的目的。

(4) 模型求解。构造数学模型之后，根据已知条件和数据，分析模型的特征和模型的结构特点，设计或选择求解模型的数学方法和算法。在这一阶段可以采用各种计算方法对所建立的数学模型进行求解，可能是求函数的极值、求方程的解、算法或图形的实现等，此时可以应用各种计算工具。如果利用数学软件和计算机技术，应编写计算机程序或运用与算法相适应的软件包，完成对模型的求解。

(5) 模型分析。根据建模的目的要求，对模型求解的结果进行数学上的分析，或进行稳定性分析，或进行结果的误差分析(误差是否在允许的范围内)、统计分析(结果是否符合特定的统计规律)、模型对数据的灵敏度分析(模型的结果是否会因数据的微小改变而发生大的变

化)、对假设的鲁棒性分析(模型的结果是否对某一假设非常依赖)等。通过分析,如果不符合要求,就修改或增减条件,重新建模,直到符合要求。如果通过分析符合要求,还可以对模型进行评价、预测、优化等方面的分析和探讨。

(6)模型检验。将求解结果和分析结果翻译回到实际问题之中,与实际现象、实际数据进行比较,检验是否与实际吻合。如果吻合较好,则模型及其结果可以应用于实际问题;如果吻合不好,则需对模型进行修正。此时问题常常出现在模型假设上,所以应对模型假设进行修正或补充,然后重新建模,有时,一个好的模型需要反复修正几次才能得到。

(7)模型应用。当模型经过检验已成为一个具有合理性和实用性的模型后,即可以用来解决实际问题了。模型应用是数学建模的宗旨,也是对模型的最客观、最公正的检验。因此,一个成功的数学模型,必须根据建模的目的,将其用于分析、研究和解决实际问题,充分发挥数学模型在生产和科研中的特殊作用。

以上的数学建模基本步骤应该根据具体问题灵活掌握,或交叉进行,或平行进行,充分发挥自己的创造力。数学模型的建立过程说明,数学模型是对客观对象归纳抽象的产物。它源于客观实际,又高于客观实际。数学建模的过程就是"实践—理论—实践"的过程。因此,与其说数学建模是一门技术,不如说数学建模是一门艺术。它需要熟练的数学技巧、丰富的想象力和敏锐的洞察力,需要大量阅读、思考别人所做的模型,尤其要自己动手、亲身体验。

1.2.3 对数学建模的要求

一般来说,在数学建模时应注意如下几个方面:

(1)建立的数学模型要有足够的精确度,就是要把本质的性质和关系反映进去,把非本质的东西去掉,而又不影响反映现实的本质的真实程度。

(2)建立的模型既要精确,又要尽可能的简单。因为太复杂的模型难以求解,而且如果一个简单的模型已经可以使某些实际问题得到满意的解决,那就没有必要再来建立一个复杂的模型。因为构造一个复杂的模型并求解它,往往要付出较高的代价。

(3)建立的数学模型要尽量借鉴已有的标准形式的模型。

(4)数学建模的依据要充分,就是说要依据科学规律、经济规律来建立有关的公式和图表,并要注意使用这些规律的条件。

1.3 数学建模的教与学

1.3.1 数学建模的教学

近几十年来各国都过分强调纯粹数学,把数学和数学家分成纯粹的和应用的。有许多人认为纯粹数学是经典的、美妙的、"干净"的,是更为自我满足和依靠内在动力的学科,受其影响,长期习惯于将数学作为经典教条来教学;而不是作为一门充满生命力的发展着的学科,教学中重传授知识、培养逻辑推演和计算能力,越来越形式、抽象,只见定义、定理、推导、证明、计算,而越来越少论及数学与周围世界的密切联系。学生们将数学理解成许多其他现代科学的重要基础知识,而对数学本身及对其他学科的重要作用不甚了解,习惯于用练习和记诵的方式学习数学。长期以来数学教学中普遍存在这种倾向,致使不少数学工作者缺乏从实际问题中提取数学模型的能力,同时,各行各业的不少实际工作者更缺乏运用数学工具,建立数学模型处理问题的能力。我们认为更新教学指导思想、加强对学生应用数学的意识和能力的培养迫

在眉睫。

数学对其他科学的有效性，在很大程度上是通过建立数学模型来体现的。建立数学模型是应用数学的关键而重要的一步。作为一名初学者，首先应当清楚"数学建模"完全不同于其他数学分支，学习该课程的困难不在于学习和理解所用的数学，而在于明白在何处用它，怎样用它；而"学着用"数学和"学"数学是根本不同的，掌握成功运用数学建立数学模型所需的技能与理解数学概念、证明定理、求解方程所需的技巧也迥然不同。因为在实际工作中，纯粹只用现成的数学知识就能解决的实际问题的几乎没有，所能遇到的都是数学知识和其他学科知识混杂在一起的问题。其中数学的奥妙不是明摆着等待你去解决，而是暗藏深处等着你去发现。

数学建模课程的直接目的是通过介绍若干有代表性的数学模型和成功地应用数学方法，培养学生用数学语言描述及解决实际问题的能力。但这仅仅是问题的一方面，在数学建模的过程中，应把握数学与现实世界的关系，认识到数学是人类观察与认识世界的一种独特方法。它为创造性地研究自然和社会的各种问题提供了理论基础与方法论指导。

数学建模课程从实际问题中归纳出所要采用的假设以及解题的线索，试验各种可能的途径，预测可能的结果，尽量引用物理、化学、生物学以及社会学的有关结论，从而展示了一种有别于传统数学课程单纯逻辑推理的思维方式，理解到外部启示对数学思维的重大作用。建模课程还尽量引用实际资料检测数学结果，是主观和客观的结合。它不是先验的、唯一的，结论也是相对的。作为一门数学课程，建模还利用一切可能的机会，加深学生对数学概念和定理本质的理解，看到数学与现实密切相关、极其生动的一面。

数学建模给予学生的是一种综合训练。为了成功地解决实际问题，参与者必须对问题本身有足够的知识，并有将其抽象成数学问题，以恰当形式表述的能力。所谓用数学语言表述问题，在实践中学习，也可以培养大学生在今后的工作中所需要的数学素养，使他们学到更活的数学。这点正是我们要强调的；督促大学生熟练使用计算机，习惯于使用计算机解决实际问题，每年的大学生数学建模竞赛都不是由一个人独立完成，因此需要具有组织协同的能力、团队合作的精神。

数学建模更全面的体现数学科学与现实世界的关系，更均衡地对待理论和应用，有利于学生开阔眼界、开阔思路，养成正确的思维方式，对数学本质有更全面完整的理解，有助于综合素质的提高。

数学建模不同于其他数学分支，从教学的角度来看，重点不是学习理解数学知识本身，而在于数学方法的掌握、数学思维的建立。开设数学建模课程是为了使学生将学习过的数学方法和知识同周围的现实世界联系起来，甚至和真正的实际应用问题联系起来。不仅应使学生知道数学有用、怎样用，更要使学生体会到在真正的应用中还需要继续学习，为使学生们能将学过的数学知识与方法应用于实践，我们认为开设数学建模课程应以介绍数学建模的一般方法为主线，着重训练运用数学知识建立数学模型的技能技巧，着重能力和相关素质的培养。

在数学建模教学实践中，我们体会到应将实践检验放在重要的地位，以提高学生从事现代科学研究的能力为目标，充分重视以下七个方面能力和素质的培养：

(1) 培养"翻译"能力，对实际问题进行充分分析后，经一定的抽象和简化，用数学语言表达出来形成数学模型。对运用数学的方法进行推演或计算出的结果，能用一般人能领会的语言"翻译"(表达)出来。当然这样的结果是用非数学的、非技术的语言描述。

(2) 用数学方法和思想进行综合应用和分析。能充分理解数学分析的重要性，理解合理

的抽象和简化，在数学建模过程中灵活地、创造性地使用数学工具。

(3) 想像力的培养。注重培养学生的想像力和联想能力。著名科学家爱因斯坦曾说过："想像力比知识更重要，因为知识是有限的，而想像力概括着世界上的一切，推动着进步，并且是知识化的源泉。"在建模过程中往往要求学生充分发挥联想，把表面上完全不同的实际问题，用相同或相似的数学模型去描述它们，培养学生广泛的兴趣，勤思考、勤练习，逐步达到触类旁通的境界。

(4) 发展观察力，形成洞察力。面对错综复杂的实际问题，能很快地抓住问题的要点，逐步剔除冗余的信息，使问题趋于明确，并能很快地得出解决问题的重点与难点。洞察力的形成不是一朝一夕的事，全靠多练习而熟能生巧。

(5) 熟练使用技术手段。熟练使用计算机及相应的各种数学软件包是必不可少的技术手段，正如前面所提到的，数学建模的发展和计算机的发展是相辅相成的。另外，让学生学会查阅各类资料，学会使用资料也是很重要的方面。

(6) 培养交流与表达的能力和团结合作的精神。现代科研活动往往是群体的合作活动，需要各个成员间相互理解、支持、协调，相互交流、集思广益，才可能进行成功的合作。学生们长期习惯于听老师讲课，独立完成习题的学习方式，往往拙于交流和表达自己的思想，更疏于与人合作应竭力提倡讨论、争辩、勇于提出自己见解，培养互相交流、互相学习、互相妥协的能力。

(7) 培养科技论文写作能力。我们发觉部分学生数学思维活跃敏捷，掌握了一定的数学方法，完成的数学模型颇具创见性。可是从他们提交的论文来看，往往不能清晰地表达自己的建模思想和对问题的分析，不能清楚地表达结论。甚至整篇文章重点不突出，思想不清晰，词不达意，使人觉得他的思维混乱，因此培养学生具备科技论文写作能力是教学中不应忽视的一个方面。

1.3.2 数学建模的学习

数学建模是应用数学知识解决实际问题的关键环节，是数学和客观对象连接的纽带。学习数学建模就是要培养用数学的语言表述实际问题及将数学计算结果回归到实际问题的双向翻译能力、严密的逻辑推理和精确的数学运算能力、熟练运用相关数学软件的能力。这就需要具有高度的观察力、丰富的想象力、综合的分析力以及一些灵感和顿悟，需要具有自我获取新知识的能力，因此学习数学建模课程在思考方法和思维方式上与学习其他数学课程有很大差别。另外数学建模常常是以小组为单位的集体活动，因此，培养良好的交流、合作和表达能力也是非常重要的。

数学建模的学习就像学习游泳一样必须亲身实践，站在岸边永远学不会游泳，只是欣赏别人的数学模型的人，永远不会拥有让别人欣赏的数学模型。当亲身参与了真正的数学建模活动，会发觉自己处于一种良性循环之中：越多的参与越感到自己数学知识和数学思考方法的不足，更激起学习数学的积极性。数学本领高了，参与数学建模工作就更得心应手，兴趣更浓。

此外，在数学建模课堂上应认真学习常用的数学建模方法，对各种方法所涉及的问题不能只满足于掌握书中给出的或老师介绍的方法，要多提问题，学会从多个不同的角度去思考问题，数学建模是没有唯一正确的答案的。模型无所谓"对"与"错"，对同一个问题可能会建立多个不同的模型。评价模型好坏的唯一标准是实践的检验，看看模型是否更符合实际情况。

在课余时间应广泛了解多学科知识，尽量掌握多种数学建模方法。这样面对实际问题才