# 全国勘察设计注册工程师
# 公共基础考试用书

注册工程师考试复习用书编委会　编
曹纬浚　主编

本书由北京市注册工程师考试辅导班的教师按照《公共基础考试大纲》编写，内容紧密结合考试实际。书中参考习题收录有大量历年真题，书后所附三套练习试题，为近三年公共基础考试真题，并附提示和答案。本书是各专业注册工程师公共基础考试必备的辅导用书。

人民交通出版社
China Communications Press

# 全国勘察设计注册工程师
# 公共基础考试用书

注册工程师考试复习用书编委会　编
曹纬浚　主编



本书由北京市注册工程师考试辅导班的教师按照《公共基础考试大纲》编写，内容紧密结合考试实际。书中参考习题收录有大量历年真题，书后所附三套练习试题，为近三年公共基础考试真题，并附提示和答案。本书是各专业注册工程师公共基础考试必备的辅导用书。

人民交通出版社
China Communications Press

## 内 容 提 要

本书编写人员全部是多年从事注册工程师考试基础课培训工作的专家、教授。本书已作为培训教材使用多年，现根据培训反馈意见和历年考试真题，以及新颁布的大纲、规范、标准编写而成，目的是为了指导考生复习，因此力求简明扼要，联系实际，着重于对概念和规范的理解运用，并注意突出重点。本书每章后均附有参考习题，最后附三套练习试题，可作考生检验复习效果和准备考试用。

本书适合参加全国勘察设计注册工程师公共基础考试的人员使用。

**图书在版编目(CIP)数据**

全国勘察设计注册工程师公共基础考试用书 /注册工程师考试复习用书编委会编. —北京 ：人民交通出版社，2012.1

ISBN 978-7-114-09594-8

Ⅰ.①全… Ⅱ.①注… Ⅲ.①建筑工程—地质勘探—工程师—资格考试—自学参考资料 Ⅳ.①TU19

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 004270 号

Quanguo Kancha Sheji Zhuce Gongchengshi Gonggong Jichu Kaoshi Yongshu

**书　　名：**全国勘察设计注册工程师公共基础考试用书
**著 作 者：**注册工程师考试复习用书编委会
**责任编辑：**刘彩云
**出版发行：**人民交通出版社
**地　　址：**（100011）北京市朝阳区安定门外外馆斜街 3 号
**网　　址：**http://www.ccpress.com.cn
**销售电话：**（010）59757969，59757973
**总 经 销：**人民交通出版社发行部
**经　　销：**各地新华书店
**印　　刷：**北京市密东印刷有限公司
**开　　本：**787×1092　1/16
**印　　张：**51.75
**字　　数：**1282 千
**版　　次：**2012 年 1 月　第 1 版
**印　　次：**2012 年 1 月　第 1 次印刷
**书　　号：**ISBN 978-7-114-09594-8
**定　　价：**88.00 元

# 前　言

原建设部（现住房和城乡建设部）和原人事部（现人力资源和社会保障部）从1997年起实施注册结构工程师执业资格考试制度，从2003年起实施注册岩土工程师执业资格考试制度，以后逐步扩展到各专业注册工程师考试。

为了帮助考生们准备考试，我们自2003年就先后出版了注册结构工程师和注册岩土工程师考试用的基础考试复习教程，教程的编写教师自1997年起就先后参加了北京市一、二级注册结构工程师基础考试的考前辅导培训工作，他们都是本专业有较深造诣的教授和高级工程师。教师们根据多年教学实践经验和考生的回馈意见，依据考试大纲和现行的法规、标准，以多年辅导培训的教案为基础，编写了基础考试复习教程，深受考生欢迎。教程的目的是为了指导复习，因此力求简明扼要，联系实际，着重对概念和规范的理解应用，并注意突出重点。教程经多年的使用和不断修订完善，已经成为值得考生信赖的考前辅导和培训用书。

2009年3月，住房和城乡建设部与人力资源和社会保障部共同批准了经过修订的《勘察设计注册工程师资格考试公共基础考试大纲》，新大纲较原上午段的考试大纲更加详细、明确，各科内容均有调整。并专门增加了“信号和信息技术”一科。我们的注册结构工程师和注册岩土工程师基础考试复习教程2009年就按新考试大纲进行了修订，受到读者好评。

为了帮助更多专业的基础考试考生准备好上午段的公共基础考试，现将我们教程的上册单独出版。

参加本书编写工作的教师分别来自北京建筑工程学院、北京工业大学、北京工商大学和北京市建筑设计研究院。各章的编写教师是：第一章第一至第八节吴昌泽；第一章第九节范元玮；第二章程学平；第三章谢亚勃；第四章刘燕；第五章钱民刚；第六章李兆年；第七章、第八章许怡生；第九章许小重；第十章陈向东；第十一章李魁元。

本教程每章后均附有参考习题，另有《一级注册结构工程师执业资格考试基础考试复习题集》，其中有上午段历年公共基础试题1 500多道，绝大多数试题均附有参考提示和答案，可供考生练习。建议考生在复习好教程的同时，应多做习题，以巩固学习成果。

我们在本书后附有三套练习试题，分别是2011年、2010年和2009年的注册工程师基础考试上午段公共基础考试的真实试题，并配有参考提示和答案。建议考生在复习完教程并做了大量习题后，集中时间做一下过去

三年的真实试题，以检验自己的学习效果。

祝各位考生考试取得好成绩！

**注册工程师考试复习用书编委会**

**2012 年 1 月**

# 目　录

# 第一章 高等数学

## 第一节 空间解析几何与向量代数

### 一、空间直角坐标

(一)坐标轴的平移

设旧坐标系为 $Oxyz$,新坐标系为 $O'x'y'z'$,新轴与旧轴平行,点 $O'$ 的旧坐标为 $(a,b,c)$,点 $M$ 的旧、新坐标依次为 $(x,y,z)$ 及 $(x',y',z')$,则

$$x=a+x',y=b+y',z=c+z' \tag{1-1}$$

(二)两点间的距离

在空间直角坐标中,$M_1(x_1,y_1,z_1)$ 与 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 之间的距离为

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

(三)定比分点

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为两定点,点 $M(x,y,z)$ 将 $\overline{M_1M_2}$ 分为两段 $\overline{M_1M}$、$\overline{MM_2}$,使 $\dfrac{M_1M}{MM_2}=\lambda(\lambda\neq-1)$,则

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda} \tag{1-2}$$

当 $\lambda=1$ 时,$M$ 为 $\overline{M_1M_2}$ 的中点,则

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},y=\frac{y_1+y_2}{2},z=\frac{z_1+z_2}{2} \tag{1-3}$$

(四)空间方向的确定

设有一条有向直线 $L$,它与三个坐标轴正向的夹角分别为 $\alpha$、$\beta$、$\gamma(0\leqslant\alpha,\beta,\gamma\leqslant\pi)$,称为直线 $L$ 的方向角;$\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 称为直线 $l$ 的方向余弦,三个方向余弦有如下关系

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \tag{1-4}$$

### 二、向量代数

(一)向量的概念

空间具有一定长度和方向的线段称为向量。以 $A$ 为起点,$B$ 为终点的向量记作 $\overrightarrow{AB}$,或简记作 $\vec{a}$。向量 $\vec{a}$ 的长记作 $|\vec{a}|$,又称为向量 $\vec{a}$ 的模,两向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 若满足:(1) $|\vec{a}|=|\vec{b}|$,(2) $\vec{a}/\!/\vec{b}$,(3) $a,b$ 指向同一侧,则称 $\vec{a}=\vec{b}$。

(二)向量的运算

1. 两向量的和

以 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 为边的平行四边形的对角线所表示的向量 $\vec{c}$ 称向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和,记作

$$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b} \tag{1-5}$$

一般说,$n$ 个向量 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$ 的和可定义如下:先作向量 $\vec{a}_1$,再以 $\vec{a}_1$ 的终点为起点作向

量 $\vec{a}_2$，…，最后以向量 $\vec{a}_{n-1}$ 的终点为起点作向量 $\vec{a}_n$，则以向量 $\vec{a}_1$ 的起点为起点、以向量 $\vec{a}_n$ 的终点为终点的向量 $\vec{b}$ 称为 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$ 的和，即

$$\vec{b}=\vec{a}_1+\vec{a}_2+\cdots+\vec{a}_n \tag{1-6}$$

2. 两向量的差

设 $\vec{a}$ 为一向量，与 $\vec{a}$ 的模相同，而方向相反的向量叫做 $\vec{a}$ 的负向量，记作 $-\vec{a}$，规定两个向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的差为

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}) \tag{1-7}$$

3. 向量与数的乘法

设 $\lambda$ 是一个数，向量 $\vec{a}$ 与 $\lambda$ 的乘积 $\lambda\vec{a}$ 规定为：

当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\vec{a}$ 表示一个向量，它的方向与 $\vec{a}$ 的方向相同，它的模等于 $|\vec{a}|$ 的 $\lambda$ 倍，即 $|\lambda\vec{a}|=\lambda|\vec{a}|$；

当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\vec{a}$ 是零向量，即 $\lambda\vec{a}=0$；

当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\vec{a}$ 表示一个向量，它的方向与 $\vec{a}$ 的方向相反，模等于 $|\vec{a}|$ 的 $|\lambda|$ 倍，即 $|\lambda\vec{a}|=|\lambda||\vec{a}|$。

4. 两向量的数量积

两向量的数量积为一数量，表示为

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\hat{\ }\vec{b}) \tag{1-8}$$

5. 两向量的向量积

两向量的向量积为一向量，记作 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}$。

①$|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a},\hat{\ }\vec{b})$，$|\vec{c}|$ 的几何意义为以 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 为边作出的平行四边形的面积；②$\vec{c}\perp\vec{a}$，$\vec{c}\perp\vec{b}$；③$\vec{c}$ 的正向按右手规则四个手指从 $\vec{a}$ 以不超过 $\pi$ 的角度转向 $\vec{b}$，则大拇指的指向即为 $\vec{c}$ 的方向。

6. 三个向量的混合积

$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ 称为向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 的混合积，记作 $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$，模 $|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|$ 的几何意义表示以 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 为棱的平行六面体的体积。可推出，当向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 共面时，$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot c=0$。

（三）向量运算的性质（$\vec{a}$、$\vec{b}$ 为向量，$\lambda$、$\mu$ 为数量）

交换律：

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a},\lambda\vec{a}=\vec{a}\lambda,\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$$

结合律：

$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$，$(\lambda\mu)\vec{a}=\lambda(\mu\vec{a})$，$\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$，$\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})$

分配律：

$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$，$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$，$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$，$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$

（四）向量在轴上的投影

给定向量 $\overrightarrow{AB}$ 及 $u$ 轴，过 $A$、$B$ 点分别向 $u$ 轴作垂直平面，与 $u$ 轴交于 $A_1$、$B_1$，则有向线段 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 的值 $A_1B_1$ 称为 $\overrightarrow{AB}$ 在 $u$ 轴上的投影，记作 $\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}$，向量的投影是一个数量。

设 $\overrightarrow{AB}$ 与 $u$ 轴的夹角为 $\alpha$，则

$$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos\alpha$$

$n$ 个向量的和在 $u$ 轴上的投影为

$$\mathrm{Prj}_u(\vec{a}_1+\vec{a}_2+\cdots+\vec{a}_n)=\mathrm{Prj}_u\vec{a}_1+\mathrm{Prj}_u\vec{a}_2+\cdots+\mathrm{Prj}_u\vec{a}_n \tag{1-9}$$

(五)向量的投影表示

设 $\vec{a}$ 的起点 $A$ 坐标为$(x_1,y_1,z_1)$,终点 $B$ 坐标为$(x_2,y_2,z_2)$,则 $\vec{a}=\vec{AB}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$,记 $a_x=x_2-x_1$,$a_y=y_2-y_1$,$a_z=z_2-z_1$,$a_x$、$a_y$、$a_z$ 称为向量 $\vec{a}$ 在 $x$ 轴、$y$ 轴、$z$ 轴上的投影。又设 $\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$ 依次为与 $x$、$y$、$z$ 轴正向一致的单位向量,则

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k} \tag{1-10}$$

又可写成

$$\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\} \tag{1-11}$$

式(1-10)又称为向量 $a$ 按基本单位向量的分解式,式(1-11)又叫做向量 $a$ 的坐标表示式。

(六)向量运算的坐标表示式

设 $\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$,$\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$,$\vec{c}=\{c_x,c_y,c_z\}$,则

$$\vec{a}\pm\vec{b}=\{a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z\}$$

$$\lambda\vec{a}=\{\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z\}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_y&a_z\\b_y&b_z\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_x&a_z\\b_x&b_z\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_x&a_y\\b_x&b_y\end{vmatrix}\vec{k} \tag{1-12}$$

$$\begin{aligned}[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]&=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\\&=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b_y&b_z\\c_y&c_z\end{vmatrix}a_x-\begin{vmatrix}b_x&b_z\\c_x&c_z\end{vmatrix}a_y+\begin{vmatrix}b_x&b_y\\c_x&c_y\end{vmatrix}a_z\end{aligned}$$

向量的模和方向余弦的坐标表示式:

设 $\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$,$\alpha$、$\beta$、$\gamma$ 为 $\vec{a}$ 的方向角,$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$,则

$$\begin{aligned}\cos\alpha&=\frac{a_x}{|a|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}\\\cos\beta&=\frac{a_y}{|a|}=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}\\\cos\gamma&=\frac{a_z}{|a|}=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}\end{aligned} \tag{1-13}$$

(七)两向量的夹角、平行与垂直坐标表示

设 $\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$,$\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$,则

$$\begin{aligned}&\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}\\&\vec{a}/\!/\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{a}=\lambda\vec{b}\Leftrightarrow\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}\\&\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0\end{aligned} \tag{1-14}$$

## 三、平面

(一)平面的一般方程

$$Ax+By+Cz+D=0$$

（二）平面的点法式方程

过定点$(x_0,y_0,z_0)$，以$\vec{n}=\{A,B,C\}$为法线向量的平面方程为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

（三）平面的截距式方程

设$a,b,c$为平面在三个坐标轴上的截距，平面方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \tag{1-15}$$

（四）两平面的夹角（通常指锐角）

设两平面方程为

$$\pi_1 \quad A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$
$$\pi_2 \quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

则两平面夹角$\varphi$的余弦为

$$\cos\varphi=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} \tag{1-16}$$

两平面平行的充分必要条件为

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2} \tag{1-17}$$

两平面垂直的充分必要条件为

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0 \tag{1-18}$$

（五）三平面的交点

设三个平面方程为$A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0(i=1,2,3)$，若系数行列式$D\neq0$，则三平面有唯一交点，交点坐标即方程组的解。

（六）点到平面的距离

若平面方程为$Ax+By+Cz+D=0$，平面外一点$M(x_1,y_1,z_1)$，则点$M$到平面的距离为

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \tag{1-19}$$

（七）点到直线的距离

设点$M_0(x_0,y_0,z_0)$是直线$L$外的一点，$M_1(x_1,y_1,z_1)$是直线$L$上的任意取定的点，且直线$L$的方向向量为$\vec{S}$，点$M_0$到直线$L$的距离为$d$，设点$M_0(x_0,y_0,z_0)$，$L$：$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$，则

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{S}|}{|\vec{S}|}=\frac{\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ m & n & p \end{matrix}\right\|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}} \tag{1-20}$$

## 四、空间直线

（一）空间直线的一般方程

设空间直线$L$由两个平面$\pi_1$和$\pi_2$的交线给出，设$\pi_1$和$\pi_2$的方程分别为$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$和$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$，则$L$的方程为

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \tag{1-21}$$

(二)空间直线的点向式方程(或对称式方程)与参数方程

设直线 $L$ 上一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 和它的一个方向向量 $S=\{m,n,p\}$，则 $L$ 的方程为

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \tag{1-22}$$

称为直线的点向式方程(或对称式方程)。

设 $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$，得到空间直线 $L$ 的参数方程为

$$x=x_0+mt,y=y_0+nt,z=z_0+pt \tag{1-23}$$

(三)两直线的夹角(通常指锐角)

设两直线的方程分别为 $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$，$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$，则两直线间夹角的余弦为

$$\cos\varphi=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}} \tag{1-24}$$

两条直线平行的充分必要条件为

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2} \tag{1-25}$$

两条直线垂直的充分必要条件为

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$$

(四)两直线共面(平行或相交)的条件

设两直线的方程分别为

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$$

$$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

则它们共面的条件为

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0 \tag{1-26}$$

(五)直线与平面的夹角

设平面 $\pi$ 的方程为 $Ax+By+Cz+D=0$，直线 $L$ 的方程为 $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$，则直线 $L$ 和平面 $\pi$ 间夹角 $\varphi$ 的正弦为

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}} \tag{1-27}$$

直线与平面平行的条件为

$$Am+Bn+Cp=0 \tag{1-28}$$

直线与平面垂直的条件为

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p} \tag{1-29}$$

(六)空间曲线在坐标面的投影曲线方程

设空间曲线 $C$ 的一般方程为

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

空间曲线在坐标面上的投影得到的曲线，称为空间曲线在坐标面上的投影曲线。

空间曲线 $C$ 在 $xOy$ 平面上的投影曲线可表示为 $\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$，其中方程 $H(x,y)=0$，由方程组 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$，消去字母 $z$ 得到。$H(x,y)=0$ 又称为曲线 $C$ 在 $xOy$ 平面的投影柱面，$z=0$ 为 $xOy$ 平面。

同理，消去方程组中变量 $x$ 或变量 $y$，再分别和 $x=0$ 或 $y=0$ 联立，得到曲线 $C$ 在 $yOz$ 面或 $xOz$ 面上的投影曲线方程。

$$\begin{cases} R(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} T(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$$

## 五、柱面、锥面、旋转曲面、二次曲面

（一）柱面

动直线 $L$ 平行于定直线并沿定曲线 $C$ 移动形成的图形称为柱面，定曲线 $C$ 叫做柱面的准线，动直线 $L$ 叫做柱面的母线。只含 $x$、$y$ 而缺 $z$ 的方程 $F(x,y)=0$ 在空间直角坐标系中表示母线平行于 $z$ 轴的柱面，其准线是 $xOy$ 面上的曲线 $C$：$F(x,y)=0$。类似地，只含 $x,z$ 而缺 $y$ 的方程 $G(x,z)=0$ 和只含 $y$、$z$ 而缺 $x$ 的方程 $H(y,z)$ 分别表示母线平行于 $y$ 轴和 $x$ 轴的柱面。

（二）锥面

设直线 $L$ 绕另一条与 $L$ 相交的直线旋转一周，所得到的旋转曲面叫做圆锥面，两直线的交点叫做圆锥面的顶点，两直线的夹角 $\alpha(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$ 叫做圆锥面的半顶角。

如圆锥面方程 $x^2+y^2=z^2$，锥面方程 $3x^2+4y^2=z^2$。

（三）旋转曲面

一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所形成的曲面叫做旋转曲面，这条定直线叫做旋转曲面的轴。若 $yOz$ 平面上曲线 $L$ 的方程是 $F(y,z)=0$，将此曲线绕 $Oy$ 轴旋转一周，得旋转曲面方程为 $F(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$，将此曲线绕 $Oz$ 轴旋转一周，旋转曲面方程为 $F(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$。如曲线 $L$：$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$，绕 $x$ 轴旋转一周产生的旋转面方程为 $f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$。

（四）二次曲面

三元二次方程所表示的曲面叫做二次曲面。常见的二次曲面有：

由方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 所表示的曲面叫做椭球面。当 $a=b=c$ 时，方程 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 表示的曲面叫做球面。

由方程 $\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$（$p$ 与 $q$ 同号）所表示的曲面叫做椭圆抛物面。

由方程 $-\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$（$p$ 与 $q$ 同号）所表示的曲面叫做双曲抛物面或鞍形曲面。

由方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 所表示的曲面叫做单叶双曲面。

由方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ 所表示的曲面叫做双叶双曲面。

**【例 1-1】** 已知向量 $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}$，$b=5\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$，计算：

①求与 $\vec{a}$ 同向的单位向量，与 $\vec{b}$ 反向的单位向量；

②求 $\vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}$ 在 $z$ 轴上的分向量；

③求 $\vec{a}\cdot\vec{b}$；

④求 $\vec{a}\times\vec{b}$。

**解** ① $\vec{a}^0=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\dfrac{1}{\sqrt{29}}(2\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k})$，$-\vec{b}^0=\dfrac{-\vec{b}}{|\vec{b}|}=-\dfrac{1}{\sqrt{27}}(5\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})$

② $2\vec{a}-\vec{b}=2(2\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k})-(5\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})=-\vec{i}+7\vec{j}-9\vec{k}$

在 $z$ 轴上分向量为 $-9\vec{k}$。

③ $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times5+3\times(-1)+(-4)\times1=3$

④ $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & -4\\ 5 & -1 & 1\end{vmatrix}=-\vec{i}-22\vec{j}-17\vec{k}$

**【例 1-2】** 已知 $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=\sqrt{2}$，且 $\vec{a}\cdot\vec{b}=2$，求 $|\vec{a}\times\vec{b}|$。

**解** 已知 $\vec{a}\cdot\vec{b}=2$，即 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha=2$

$$2\sqrt{2}\cos\alpha=2,\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}},\alpha=\frac{\pi}{4}$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\alpha=2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2$$

**【例 1-3】** 求过已知点 $M_0(4,-1,3)$ 且平行于直线 $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{5}$ 的直线方程。

**解** $M_0(4,-1,3)$，$\vec{s}=\{2,1,5\}$

直线方程

$$\frac{x-4}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{5}$$

**【例 1-4】** 求过点 $M_0(3,0,-1)$ 与已知平面 $3x-7y+5z-11=0$ 平行的平面方程。

**解** $M_0(3,0,-1)$，$n=\{3,-7,5\}$

所求平面方程为

$$3(x-3)-7(y-0)+5(z+1)=0$$

**【例 1-5】** 已知 $xOz$ 平面上双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$，求此双曲线分别绕 $x$ 轴、$z$ 轴旋转所得的旋转曲面方程。

**解** 绕 $x$ 轴旋转所得到的曲面方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1$$

绕 $z$ 轴旋转所得到的曲面方程

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

【例 1-6】 过 $z$ 轴和点 $(1,2,-1)$ 的平面方程是：

A. $x+2y-z-6=0$  B. $2x-y=0$  C. $y+2z=0$  D. $x+z=0$

**解** 选 B。如图 1-1 所示。取 $z$ 轴的方向向量 $\vec{s}=\{0,0,1\}$，连接原点 $O(0,0,0)$ 和点 $M(1,2,-1)$ 的向量 $\overrightarrow{OM}=\{1,2,-1\}$，过 $z$ 轴和 $\overrightarrow{OM}$ 的平面的法向量

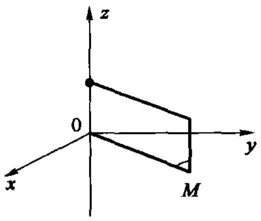

图 1-1

$$\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=-2\vec{i}+\vec{j}$$

过 $z$ 轴和点 $M(1,2,-1)$ 的平面方程为

$$-2(x-1)+(y-2)=0$$

化简得 $-2x+y=0$，即 $2x-y=0$

【例 1-7】 已知直线 $L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{t}=\dfrac{z}{1}$，$L_2:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$，当 $t$ 取何值时两线相交？

A. 1  B. 0  C. $\dfrac{1}{2}$  D. $-\dfrac{8}{3}$

**解** 选 D。如图 1-2 所示，$L_1$、$L_2$ 两直线的方向向量分别为

$$\vec{s_1}=\{1,t,1\} \qquad \vec{s_2}=\{2,-2,1\}$$

因 $\vec{s_1}$、$\vec{s_2}$ 坐标不成比例，故两直线不平行，欲使两直线相交，只需两直线共面。如图 1-2 所示，分别在 $L_1$、$L_2$ 上取点 $M_1(1,1,0)$，$M_2(0,-3,1)$，$\overrightarrow{M_1M_2}=\{-1,-4,1\}$，三向量 $\vec{s_1}$、$\vec{s_2}$、$\overrightarrow{M_1M_2}$ 共面，$\begin{vmatrix}-1 & -4 & 1\\ 1 & t & 1\\ 2 & -2 & 1\end{vmatrix}=0$，即 $\begin{vmatrix}-1 & -4 & 1\\ 1 & t & 1\\ 2 & -2 & 1\end{vmatrix}=$

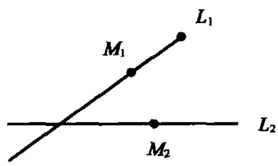

图 1-2

$\begin{vmatrix}-1 & 4 & 1\\ 2 & t+4 & 0\\ 3 & 2 & 0\end{vmatrix}=4-3(t+4)=0$，则 $t=-\dfrac{8}{3}$。

【例 1-8】 过直线 $L_1:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+3}{1}$ 和直线 $L_2:\begin{cases}x=-t+3\\ y=-2t-1\\ z=-t+1\end{cases}$ 的平面方程是：

A. $x+y-1=0$  B. $-x+z+2=0$

C. $x+2y-z=0$  C. $2x+2z-1=0$

**解** 选 B。已知直线 $L_1$ 的方向向量 $\vec{s_1}=\{1,2,1\}$，直线 $L_2:\begin{cases}x=-t+3\\ y=-2t-1\\ z=-t+1\end{cases}$ 可化为 $\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-1}{-1}$，其方向向量 $\vec{s_2}=\{-1,-2,-1\}$，因 $\vec{s_1}$、$\vec{s_2}$ 坐标成比例，故 $L_1 /\!/ L_2$。分别在 $L_1$、$L_2$ 上取点 $M_1(-1,2,-3)$，$M_2(3,-1,1)$，$\overrightarrow{M_1M_2}=\{4,-3,4\}$，所求平面的法向量 $\vec{n}\perp L_1$，$\vec{n}\perp\overrightarrow{M_1M_2}$，法