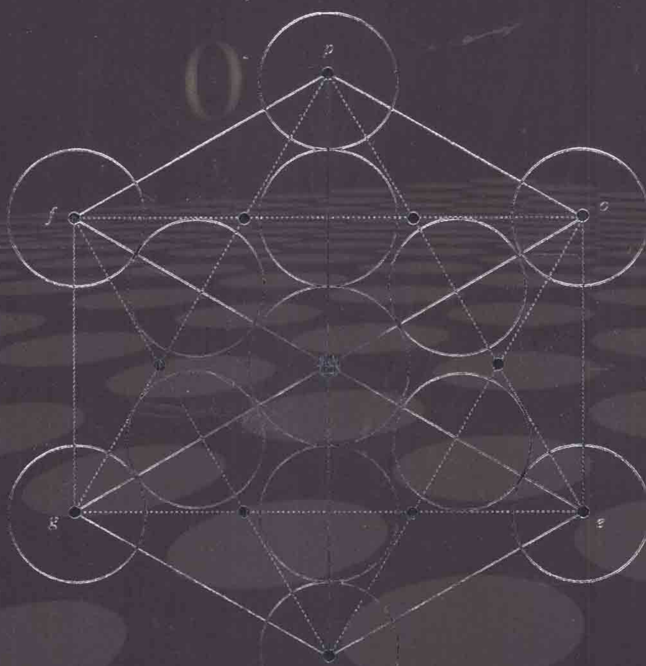
理解与发现
数学学习漫谈

王在华　姚泽清　编著



科学出版社

理解与发现

数学学习漫谈

王在华　姚泽清　编著

科学出版社

北京

前　　言

数学是一门逻辑严密、叙述严谨的学科, 其文献资料通常是按照演绎的方式编排的. 我们常常惊诧: 那些优美简洁的数学理论到底是如何发现 (提出来) 的? 在学习数学时, 我们经常会遇到抽象难懂的数学问题或理论, 不知该如何去理解、去解决. 在这些情况下, 最常规但又可能最容易被忽视的做法是

从简单的做起!

因为简单的问题容易理解, 也常常蕴涵着本质特征. 从简单的做起, 就是要由简单的情形 (问题) 获得理解, 由处理简单情形的思路、方法和结论获得启发, 产生不同角度、由此及彼、举一反三的思考与联想, 从而解决待求解的问题或作出新的发现. 只有深刻理解简单问题的普遍特性, 看到简单问题所蕴涵的本质特征, 才有可能作出新的发现. 在这个过程中, 需要不断地提问题. 例如, "以前遇到过类似的问题吗? 它是如何得到解决的? 解决问题的关键在哪里? 问题的答案和解决思路能用于解决新的问题吗?" 其次, "这个问题有什么具体背景? 涉及的数学量在几何上或物理上对应什么? 有什么相关的物理原理?" 另外, "这是某个框架下的一个特例吗? 能将它推广到一般情形去吗?" 还有, "这个结论或方法好用吗? 能将其简化, 得到更精细或更简洁的结论吗?" 更重要的是, "换个角度来看, 问题会怎么样?"…… 这些问题体现了一般化与特殊化的两种基本思路以及联想的重要作用. 有了问题就要设法去解决, 归纳法和类比法是解决问题、获得发现的有力武器. 著名的美国数学家和教育家 Pólya 曾说过: "数学思维不是纯形式的, 它所涉及的不仅有公理、定理、定义及严格的证明, 而且还有许许多多其他方面: 推广、归纳、类比以及从一个具体情况中抽象出某个数学概念等. 数学教师的重要工作是让他的学生了解这些十分重要的非形式思维过程." 其中的非形式思维过程是一种合情推理过程, 体现发现问题、解决问题的基本素养. 如果能够在日常的数学学习中自觉地运用这些思路和方法, 久而久之就能形成一种良好的思维习惯、提高数学学习的效率. 如果数学教师始终坚持按这样的思路和方法组织教学内容, 并在课堂教学过程中以这样的方式引导学生思考、探索, 那么学生理解数学、发现问题与解决问题的能力就一定能够得到提高.

获得理解的合情推理过程中需要做大量的探索工作, 这是从事科学研究的必要训练. 有些人觉得科学研究很神秘, 自己读书少, 与作科研无缘. 无疑, 作研究需要读书学习, 很难想象一个读书很少、知识贫乏 (从而不能有效联想) 的人能够在科

学上提出自己创新的见解. 其实, 每一个受到必要的专业知识训练的人都可以在科学上做出自己的点滴贡献. 如果做一个有心人, 对自己有信心, 养成探索式的学习习惯, 努力去理解和重现别人已完成的工作, 尽可能多地对研究材料加以消化、整理、归纳, 一有心得就记录下来, 再继续深入思考下去, 一步一个脚印, 等积累到一定程度, 就可以水到渠成, 找到自己喜欢的课题, 提出自己的创新研究见解.

本书前 5 章的主要内容最初是为数学专业本科生选修课“数学方法论”(20 学时) 准备的教学资料, 后对其进行扩充, 成了现在的内容. 前 5 章的主要内容可以选为本科生“数学方法论”课程的教学内容或参考资料, 全书内容可作为数学专业低年级研究生论文开题前的阅读材料. 本书不涉及数学思维方法与思维模式的一般性讨论, 主要是想通过对若干典型问题的探索来阐明如何将 “特殊化与一般化”、“归纳法与类比法” 等思维方法应用于数学学习与研究中. 在编排的方式上, 力争能够体现 “按照一种合情合理的方式找到解决问题的思路和答案”, 其中多数问题属于“初等数学”、“微积分”、“线性代数”与“常微分方程”等课程的典型内容范畴, 但处理方法则融入了我们自己的深入思考, 具有一定的独特性. 作为一种尝试, 在内容的叙述方面, 本书因强调合情推理而可能丧失某些严密性, 有的内容相对完整, 有的则只提供了大体思路或方向, 有兴趣的读者需要探索或者阅读参考书才能获得完整的认识. 本书中安排了 15 道习题以及若干没有编号的思考题, 有的很简单, 可以直接看出答案, 有的则需要深入思考和探索才能获得解决. 习题 (甚至例题) 在书中出现的先后顺序和章节位置并不太重要, 其目的不在于对问题本身的理解与解决, 而是希望读者展开由此及彼、举一反三的思考和探索.

分数阶微积分是经典微积分的一种直接推广, 最近一二十年受到了工程技术领域越来越多的关注, 并被应用于解决工程技术中的一些实际问题. 分数阶微积分的发展正好体现了由特殊到一般的思路, 符合本书的主题, 因而在第 6 章, 由整数阶导数引入了一般的分数阶导数, 由整数阶微分方程简要介绍了分数阶微分方程的概念, 希望能引起读者的兴趣和深入思考以及进一步探索.

本书的出版得到了国家杰出青年科学基金 (项目: 10825207) 的资助, 同事崔周进与博士研究生李俊余阅读了部分书稿并提出了许多有益的建议, 在此对他们表示衷心的感谢.

由于知识水平有限, 书中不足或疏漏之处在所难免, 敬请读者批评指正. 联系邮箱为 zhwang@nuaa.edu.cn(王在华).

王在华　姚泽清

2010 年 8 月

目　录

第 1 章

从一个简单不等式谈起

认识一个新的事物总是由简单到复杂. 简单的问题容易理解, 也常常是一面镜子, 能使我们看清问题的本质. 因此, 以简单情形为起点, 深刻理解其本质特征, 并由此经过恰当的联想和推理, 获得合情合理的结论, 是进行数学学习与研究的基本功. 本章将从一个简单的不等式出发来阐述获得理解与发现的基本思路和方法.

1.1 平均值不等式

设有实数 $x_1, x_2 \geqslant 0$, 那么

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geqslant \sqrt{x_1 x_2} \tag{1.1}$$

这个不等式的证明非常简单, 它等价于下面的不等式:

$$(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 \geqslant 0\cdot$$

显然, 在非负实数范围内, 上式是成立的. 证明了这个简单不等式, 还想知道: 如果有多个实数, 如 $x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0$, 会有类似的不等式吗?

以下假设 $x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0$. 对 $x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0$ 有

$$\begin{aligned}\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} &= \frac{1}{2}\left(\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_3 + x_4}{2}\right) \\ &\geqslant \frac{\sqrt{x_1 x_2} + \sqrt{x_3 x_4}}{2} \\ &\geqslant \sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 x_4}\end{aligned} \tag{1.2}$$

类似地，容易得到

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_8}{8} \geqslant \sqrt[8]{x_1 x_2 \cdots x_8} \tag{1.3}$$

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{16}}{16} \geqslant \sqrt[16]{x_1 x_2 \cdots x_{16}} \tag{1.4}$$

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{32}}{32} \geqslant \sqrt[32]{x_1 x_2 \cdots x_{32}} \tag{1.5}$$

$$\cdots\cdots$$

因此，完全有理由相信如下的平均值不等式成立：

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \tag{1.6}$$

事实上，当 $n=3$ 时，

$$\frac{x_1+x_2+x_3}{3} = \frac{x_1+x_2+x_3+\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}}{4} \geqslant \sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 \frac{x_1+x_2+x_3}{3}}$$

整理得

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^{3/4} \geqslant \sqrt[4]{x_1 x_2 x_3}$$

也就是说，

$$\frac{x_1+x_2+x_3}{3} \geqslant \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} \tag{1.7}$$

在一般情况下，假设不等式对 $n=k+1$ 时成立，

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{k+1}}{k+1} \geqslant \sqrt[k+1]{x_1 x_2 \cdots x_{k+1}} \tag{1.8}$$

那么

$$\begin{aligned}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k} &= \frac{x_1+x_2+\cdots+x_k+\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k}}{k+1} \\ &\geqslant \sqrt[k+1]{x_1 x_2 \cdots x_k \frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k}}\end{aligned}$$

简单变形后即得不等式

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k} \geqslant \sqrt[k]{x_1 x_2 \cdots x_k} \tag{1.9}$$

既然不等式 (1.6) 对 $n=2^3(=8)$ 成立，那么上述推理表明，当 $n=7$ 时，不等式也是对的，进而当 $n=6,5$ 时，不等式也成立. 重复这样的步骤可知，对 $n=2^4$

$(=16)$, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 进而对所有 2 的次幂以及介于 2 的次幂之间的 n, 不等式 (1.6) 总是成立的.

上述证明过程首先处理了易于处理的情形, 即 n 为 2 的整数幂, 然后再补全 n 为介于两个 2 的整数幂之间的所有情形.

不等式 (1.6) 的左边与右边分别称为算术平均值和几何平均值, 都是介于 x_1, $x_2, \cdots, x_n$ 中的最大值和最小值之间的数. 该不等式表明, 算术平均值不小于几何平均值.

1.2　理解与发现的基本思路和方法

前面从最简单的不等式 (1.1) 出发, 很容易地证明了不等式 (1.2)~(1.4) 等, 进而猜想有一般形式的不等式 (1.6) 成立. 然后, 又严格证明了这个平均值不等式. 但还不满足, 希望可以从中获得更多的理解和发现.

平均值不等式对所有非负数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 都成立, 当这些数取某些特别的数时也成立. 首先, 对正数 $1/x_1, 1/x_2, \cdots, 1/x_n$, 不等式 (1.6) 也成立. 因此,

$$\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}{n} \geqslant \sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_n}}$$

整理得

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}} \tag{1.10}$$

不等式 (1.10) 的右边称为调和平均值. 和不等式 (1.6) 联立可知, 当 $x_1, x_2, \cdots$, $x_n > 0$ 时有

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}} \tag{1.11}$$

因此, 在三个平均值中, 算术平均值最大, 调和平均值最小, 而几何平均值介于两者之间.

其次, 如果取 $x_i = \mathrm{e}^{y_i} (i=1,2,\cdots,n)$, 那么

$$\frac{\mathrm{e}^{y_1}+\mathrm{e}^{y_2}+\cdots+\mathrm{e}^{y_n}}{n} \geqslant \mathrm{e}^{\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}} \tag{1.12}$$

另外, 如果令

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_k = x, \quad x_{k+1} = x_{k+2} = \cdots = x_n = y$$

那么不等式 (1.6) 变为

$$\frac{k}{n}x+\frac{n-k}{n}y\geqslant x^{k/n}y^{(n-k)/n} \tag{1.13}$$

由于任意实数皆可表示为有理数列的极限, 所以对任何满足 $\alpha>0$, $\beta>0$, $\alpha+\beta=1$ 的实数 α, β, 皆有有理数列 α_n, β_n 满足

$$\alpha_n\to\alpha,\beta_n\to\beta,\quad n\to+\infty$$

由不等式 (1.13) 有

$$\alpha_n x+\beta_n y\geqslant x^{\alpha_n}y^{\beta_n}$$

从而在上式两端分别取极限得

$$\alpha x+\beta y\geqslant x^{\alpha}y^{\beta} \tag{1.14}$$

如果令 $a=x^{\alpha}\geqslant 0$, $b=y^{\beta}\geqslant 0$, $p=1/\alpha$, $q=1/\beta$, 那么得到 Young 不等式

$$ab\leqslant\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q},\quad p>1,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \tag{1.15}$$

对不全为零的实数组 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 和 $y_1,y_2,\cdots,y_n$, 如果记

$$a_i=\frac{|x_i|}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}},\quad b_i=\frac{|y_i|}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)^{1/q}}$$

其中 $i=1,2,\cdots,n$, 那么利用不等式 (1.15) 可得

$$a_ib_i=\frac{|x_iy_i|}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)^{1/q}}\leqslant\frac{|x_i|^p}{p\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|^p}+\frac{|y_i|^q}{q\sum\limits_{i=1}^{n}|y_i|^q}$$

于是

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}|x_iy_i|}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)^{1/q}}\leqslant\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

从而得到

$$\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)^{1/q} \tag{1.16}$$

这就是著名的 Hölder 不等式. 当 $p=q=2$ 时, 对应的不等式称为 Cauchy 不等式.

将问题或结论一般化是另一种常见的思考方式. 1.1 节中的结论都有相应的一般形式. 例如, 容易知道不等式 (1.14) 的一般形式如下: 如果 $x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0$, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n > 0$, $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=1$, 那么

$$\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\cdots+\alpha_n x_n \geqslant x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \tag{1.17}$$

这实际上也是平均值不等式 (1.6) 的一般化形式, 此时不等式的左端称为加权平均值. 类似地, 也可以写出不等式 (1.15) 的一般形式.

在一个不等式中, 如果能将不等式化为同一个函数在不同点处的函数值之间的比较, 则理解起来会更加容易些.

例如, 在平均值不等式 (1.6) 两边同时取对数 $\ln x$, 则

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n} \leqslant f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \tag{1.18}$$

其中 $f(x)=\ln x$, $x_1, x_2, \cdots, x_n > 0$. 如果令 $x_i=\mathrm{e}^{y_i}$, 那么不等式 (1.12) 也可以表示为如下的形式:

$$\frac{f(y_1)+f(y_2)+\cdots+f(y_n)}{n} \geqslant f\left(\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}\right) \tag{1.19}$$

其中 $f(x)=\mathrm{e}^x$.

进一步, 联想到如下三角函数的和差化积公式:

$$\frac{\sin x_1+\sin x_2}{2}=\sin\frac{x_1+x_2}{2}\cos\frac{x_1-x_2}{2}$$

当 $x_1, x_2 \in [0,\pi]$ 时有

$$\frac{\sin x_1+\sin x_2}{2} \leqslant \sin\frac{x_1+x_2}{2}$$

可猜想其一般形式为

$$\frac{\sin x_1+\sin x_2+\cdots+\sin x_n}{n} \leqslant \sin\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \tag{1.20}$$

也就是说, 当 $f(x)=\sin x$ 且 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in [0,\pi]$ 时, 不等式 (1.18) 成立.

三个初等函数 $f(x)=\mathrm{e}^x, \sin x, \ln x$ 是我们非常熟悉的, 观察其图像 (图 1.1), 指数函数是凹函数, 而正弦函数和对数函数是凸函数. 因此, 可以猜想对于凸函数, 不等式 (1.18) 成立; 对于凹函数, 不等式 (1.19) 成立.

事实上, 设 $f(x)$ 是定义在区间 J 上的二阶可导函数. 如果 $f''(x)>0$ $(x \in J)$, 那么 $f(x)$ 的图像是凹的. 此时, 对任何 $x_0, x \in J$, 由 Taylor 公式, 存在介于 x 和 x_0 之间的 ξ, 使得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2 \geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) \tag{1.21}$$

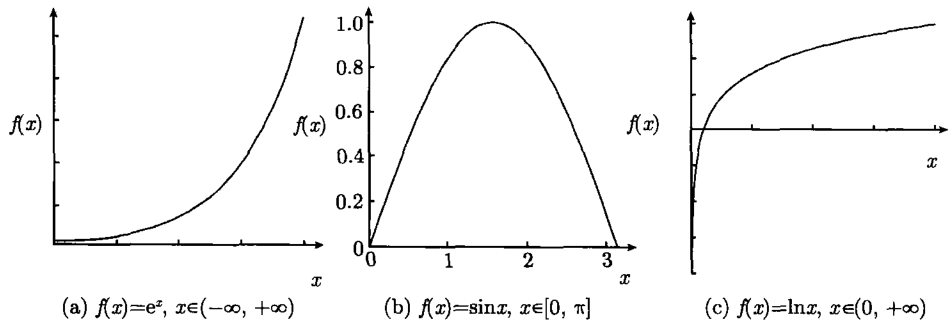


图 1.1　三个初等函数的图像

如果 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in J$ 且取

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

那么对每个 $x_i\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ 皆有

$$f(x_i) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x_i - x_0)$$

将这 n 个不等式的两边分别相加即得不等式 (1.19). 同理, 当 $f''(x) < 0\ (\forall x \in J)$ 时, $f(x)$ 的图像是凸的, 从而不等式 (1.18) 成立.

不等式 (1.19) 和 (1.18) 通常被称为 Jensen 不等式, 其更一般的形式如下: 设有实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in J$, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n > 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$, 如果 $f''(x) > 0\ (\forall x \in J)$, 即 $f(x)$ 的图像是凹的, 那么

$$\alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \cdots + \alpha_n f(x_n) \geqslant f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n) \tag{1.22}$$

而如果 $f''(x) < 0\ (\forall x \in J)$, 即 $f(x)$ 的图像是凸的, 那么有

$$\alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \cdots + \alpha_n f(x_n) \leqslant f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n) \tag{1.23}$$

平均值不等式是一个重要的不等式, 其证明并不难. 在前面的讨论中, 重点是如何由这个简单的不等式出发, 反复采用特殊化与一般化的思路, 并运用归纳法等思维方法, 得到了多个不同形式的不等式. 这样的思路和方法是深刻理解数学以及导致数学发现的最基本、最有效的途径之一, 值得在数学学习和研究中反复运用, 以获得对数学的深刻理解并作出新的数学发现.

当然, 数学思维方法的内容非常丰富, 本书不打算对其作全面、深入的讨论, 而把重点放在特殊化与一般化、归纳法与类比法的介绍和应用方面. 各章节出现的例题, 多数也可以放在其他章节, 因为任何方法的应用都不是孤立的, 看问题的方式也不是唯一的. 建议读者对本书所涉及的问题尝试从不同的角度来思考, 从而加深对有关思路和方法的理解, 进而获得新的发现.

第 2 章

从简单情形为起点

当代著名的美国数学家 Pólya(1887~1985) 把 “从简单的做起” 当成座右铭, 把一般化、特殊化和类比并列称为 “获得发现的伟大源泉”[1]. 在他写的名著《数学与猜想》中, 提供了大量生动的事例来说明数学家们是如何从简单、特殊的事物的考察中发现普遍的规律并导致数学发现的. 本章将提供更多的例子来阐述特殊化与一般化在数学学习中的应用.

2.1 简单情形预示问题的解决方案和答案

从特殊到一般, 由一般到特殊, 是认识客观世界所遵循的普遍规律. 显然, 如果命题在一般条件下为真, 则它在特殊条件下也为真; 反之, 如果命题在特殊条件下为假, 那么在一般条件下也为假.

一方面, 一般存在于特殊中相对于一般而言, 特殊的个别事物常常是简单的、具体的, 是容易处理的. 另一方面, 一般概括了特殊, 因而一般比特殊更能反映事物的本质. 在一些情况下, 可以将待解决的问题置于更为一般的框架之下, 通过对一般情形的研究而解决个别特殊的情况. 解决数学问题的本质在许多情况下其实就是一般与特殊之间的相互转化. 特殊与一般之间的转化通常表现为由抽象到具体、一般到特殊、化难为易、化繁为简, 并以简单情形作为出发点. 以简单情形作为考察问题的起点的目的之一, 就是要向简单情形寻求启示, 然后找到问题的解决之道. 下面从两个最简单的例子开始, 它们可由几种特殊的简单情况直接获得启示而解决问题.

例 2.1 今有 2009 个人依次由 1 开始编号到 2009 并站成一行, 按 1, 2, 1, 2, $\cdots$ 依次报数, 报 2 的留下; 再按 1, 2, 1, 2, $\cdots$ 依次报数, 报 2 的留下; 这样重复进行. 问最后一个留下的人的最初编号是多少?

如果一次一次地按要求做下去, 需要很多次报数的步骤, 不易看出结果. 但如

果把人的数字取得更小, 具体操作一番, 就很容易得到结果. 表 2.1 是一些非常简单的情形的结果, 其中 n 表示总人数, m 表示最后一个留下的人的最初编号. 从中可以看出, 当人数为 2^k 时, 最后一个留下的人的最初编号就是 2^k, 而人数介于 2^k 和 2^{k+1} 之间时, 最后一个留下的人的最初编号还是 2^k. 因为 $2^{10} < 2009 < 2^{11}$, 所以这 2009 个人中最后一个留下的人的最初编号是 1024.

表 2.1　原始人数以及最后留下的人的编号

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m	2	2	4	4	4	4	8	8	8

在这个求解过程中, 从若干简单、特殊、具体的情况出发, 通过观察、分析、比较而归纳出问题的答案, 这种方法称为 (不完全)**归纳法**, 是导致数学发现的最基本、最有效的方法之一. 包括著名的 Goldbach 猜想等许多数学问题就是由大量的观察而归纳出来的.

当然, 这个问题还可以通过稍微抽象一点的思维方式解决. 分析这个淘汰数的过程, 经第一次淘汰后, 剩下的数都是 2 的倍数, 再作一次淘汰后, 剩下的数是 $4(=2^2)$ 的倍数, 经 k 次淘汰后, 剩下的数是 2^k 的倍数. 由于 $2^{10} < 2009 < 2^{11}$, 故 2009 个人中最后一个留下的人的最初编号是 1024.

例 2.2　今用 n 条直线划分二维平面, 问最多能分成多少份?

对这个问题, 可以有多种简化的途径. 例如, 可以以涉及的直线条数的大小为线索, 数字小而具体的是简单情况. 显然, 当 $n=1, 2$ 时, 平面分别最多可分成 2, 4 个区域, 而当 $n=3$ 时, 在前一步的基础上, 需要利用第三条直线来产生最多的区域数, 就应该使这条直线既不能与前两条直线平行, 也没有三线共点的情况发生, 这样最多可以增加三个区域, 即最多可得 7 个区域. 如果知道当 $n=k$ 时最多能划分的区域数 $S_2(k)$, 那么当 $n=k+1$ 时, 就应该利用第 $k+1$ 条直线增加 $k+1$ 个区域, 于是得到一个迭代关系式

$$S_2(k+1) = S_2(k) + k + 1 \tag{2.1}$$

满足初始条件 $S_2(1)=2$. 因此,

$$\begin{aligned} S_2(n) &= S_2(n-1) + n = \cdots \\ &= S_2(1) + 2 + 3 + \cdots + n \\ &= 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n+2}{2} \end{aligned}$$

例 2.3　今有实系数多项式 $f(x)$, 它对任何实系数多项式 $g(x)$ 皆满足等式 $f(g(x)) = g(f(x))$, 求 $f(x)$.

显然, 可以先取一些简单的多项式 $g(x)$ 来考虑, 次数越低的多项式越简单. 特别地, 取 $g(x)=0$, 那么 $f(0)=0$. 再取一次多项式 $g(x)=x+h$, 那么等式 $f(g(x))=g(f(x))$ 化为 $f(x+h)=f(x)+h$, 因此,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=1, \quad \forall h \neq 0 \tag{2.2}$$

于是 $f'(x)=1$, 从而 $f(x)=x+c$, 其中 c 为实常数. 利用 $f(0)=0$ 求得 $c=0$, 故 $f(x)=x$. 反之, 如果 $f(x)=x$, 则对所有实多项式多项式 $g(x)$ 皆满足等式 $f(g(x))=g(f(x))$, 所以 $f(x)=x$ 是本题的唯一解.

下面是一道美国大学生数学竞赛题, 对掌握了 "特殊化" 这一思维方法的考生来说, 这也是一道非常简单的考题.

例 2.4　试确定满足下列条件的所有多项式 $p(x)$: $p(0)=0$ 且对任何 $x\in\mathbb{R}$ 有 $p(x^2+1)=p^2(x)+1$ (第 32 届 Putnam 数学竞赛题, 1971).

该条件是以多项式在不同点处的值之间的联系给出的, 因此, 最好尝试算几个特殊点的函数值. 直接计算有 $p(1)=1$, $p(2)=2$, $p(5)=5$, $p(26)=26$, $p(677)=677,\cdots$. 这样的等式有无穷多个, 也就是说, 有无穷多个不同的值 $x=0,1,2,5,26,677,\cdots$ 是多项式 $p(x)-x$ 的零点. 由于任何多项式的零点必为有限个, 所有满足题设条件的多项式只有一种可能, 即 $p(x)-x\equiv 0$, 从而 $p(x)=x$.

例 2.5　设函数 $F(x)$ 对所有 $x\in\mathbb{R}$, $x\neq 0,1$ 都有定义, 并且满足

$$F(x)+F\left(\frac{1-x}{x}\right)=1+x \tag{2.3}$$

求符合条件的所有 $F(x)$ (第 32 届 Putnam 数学竞赛题, 1971).

显然, 像例 2.4 那样, 令 x 取一个一个的值来计算出 $F(x)$ 是不现实的. 一种思路是把 $F(x)$ 和 $F\left(\dfrac{1-x}{x}\right)$ 各自看成一个整体, 想办法将它们通过解方程组的形式解出来. 问题是如何得到包含 $F(x)$ 和 $F\left(\dfrac{1-x}{x}\right)$ 的另一个方程. 由于 x 可取不为 0 和 1 的任意实数值, 它当然也可取 $\dfrac{1-x}{x}$ 形式的值, 因此, 在题设条件 (2.3) 中, 将 x 替换为 $\dfrac{1-x}{x}$ 得到

$$F\left(\frac{1-x}{x}\right)+F\left(\frac{-1}{x-1}\right)=\frac{2x-1}{x} \tag{2.4}$$

同样, 在式 (2.4) 中仍将 x 替换为 $\dfrac{1-x}{x}$ 得到

$$F\left(\frac{-1}{x-1}\right)+F(x)=\frac{x-2}{x-1} \tag{2.5}$$

消去 $F\left(\frac{-1}{x-1}\right)$ 和 $F\left(\frac{1-x}{x}\right)$, 即式 (2.3)+ 式 (2.5)− 式 (2.4) 得

$$2F(x)=1+x+\frac{x-2}{x-1}-\frac{2x-1}{x}$$

从而求得

$$F(x)=\frac{x^3-x^2-1}{2x(x-1)}$$

前面的几个例题中, 本质上都是对应于变量或函数取特殊值的情形. 这样的思路需要根据具体问题灵活应对, 有时需要精巧的构思.

例 2.6 试求所有满足如下条件的实值连续函数 $f(x)$:

$$\frac{f(x)+f(y)}{f(x)-f(y)}=f\left(\frac{x+y}{x-y}\right) \tag{2.6}$$

首先注意到 $f(x)$ 不能为常数函数. 为了确定该函数, 从特殊的情况开始, 令 $y=0$ 得

$$\frac{f(x)+f(0)}{f(x)-f(0)}=f(1)$$

所以

$$(f(1)-1)f(x)=f(0)(1+f(1))$$

要使 $f(x)$ 不为常数函数, 必须 $f(1)=1$, $f(0)=0$. 进一步, $f(2)\neq 0$; 否则, $f\left(\frac{x+2}{x-2}\right)\equiv 1$, 这只能在 $f(x)$ 为常数时成立. 同理, 当 $y\neq 0$ 时皆有 $f(y)\neq 0$. 又令 $y=-x\neq 0$, 那么

$$f(x)+f(-x)=f(0)(f(x)-f(-x))=0$$

因此, $f(x)$ 为奇函数.

为了计算 $f(2)$, 将原题条件转化. 例如,

$$\frac{f(x)+f(x-2)}{f(x)-f(x-2)}=f(x-1),\quad \frac{f(x-1)+f(1)}{f(x-1)-f(1)}=f\left(\frac{x}{x-2}\right)$$

将前者代入后者得到

$$f\left(\frac{x}{x-2}\right)=\frac{f(x)}{f(x-2)}$$

于是

$$f(x)=\frac{f(x-1)+1}{f(x-1)-1}f(x-2)$$

特别地, 有

$$f(2)=\frac{f(4)}{f(2)},\quad f(3)=\frac{f(2)+1}{f(2)-1}$$

$$f(5)=\frac{f(4)+1}{f(4)-1}f(3)=\frac{f(2)^2+1}{(f(2)-1)^2}$$

另外, 由定义式有

$$f(5)=\frac{f(3)+f(2)}{f(3)-f(2)}=\frac{f(2)^2+1}{1+2f(2)-f^2(2)}$$

故有 $(f(2)-1)^2=1+2f(2)-f^2(2)$, 从而 $f^2(2)=2f(2)$, 即 $f(2)=2$. 于是 $f(4)=4$, $f(3)=3$, $f(5)=5$, 因而猜想: 对任何自然数 n 都有 $f(n)=n$.

事实上, 假设对 $n=0, 1, 2, \cdots, k$ 都有 $f(k)=k$, 那么

$$f(k+1)=\frac{f(k)+1}{f(k)-1}f(k-1)=\frac{k+1}{k-1}(k-1)=k+1$$

由数学归纳法可知, $f(x)=x$ 对所有整数都成立.

现在, 取 $y=xz\,(z\neq 1)$, 那么

$$\frac{f(x)+f(xz)}{f(x)-f(xz)}=f\left(\frac{x+xz}{x-xz}\right)=f\left(\frac{1+z}{1-z}\right)=\frac{1+f(z)}{1-f(z)}$$

所以 $f(xz)=f(x)f(z)$. 特别地, 取 $z=1/x\,(x\neq 0)$, 那么

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{f(x)}$$

因此, 对任何有理数 $x=p/q$ $(p, q\in\mathbb{Z}, q\neq 0)$ 有

$$f(x)=f\left(\frac{p}{q}\right)=f\left(p\cdot\frac{1}{q}\right)=f(p)f\left(\frac{1}{q}\right)=\frac{f(p)}{f(q)}=\frac{p}{q}=x$$

这表明 $f(x)=x$ 对所有有理数都成立. 由于任何实数都是某个有理数列的极限, 因而 $f(x)=x$ 对所有实数也都成立.

在例 2.6 验证 $f(x)=x$ 的分析中, 首先考虑 x 为整数的情况, 然后又考虑了 x 为有理数的情况, 最后讨论了 x 为实数的情况. 这一过程从特殊到一般, 从简单到复杂, 从一种最简单的情形开始检验, 然后逐步扩大探索范围, 而在每一步的检验中, 又总是以前一步的推理和结论为基础, 像爬坡一样, 一步一步地克服难点而达到解决问题的目的. 这种思路称为**逐步逼近目标法**(也称为**爬坡式推理**)[2], 是处理数学问题时常用的一种做法.

以简单情形为起点来思考问题, 关键是要找到足够简单而又富有启发意义的简单情形. 从运算的角度来看, 四则运算是简单的; 从函数或方程的角度来看, 线性的是简单的, 初等函数是简单的.

例 2.7 设 $f(x)\geqslant 0$ 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数, 计算

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x\right)^{1/n}$$

为简单起见, 设 $b>a>0$. 从简单的做起. 如果 $f(x)=c$ (其中 c 为常数), 则

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b c^n\mathrm{d}x\right)^{1/n}=c\cdot\lim_{n\to+\infty}(b-a)^{1/n}=c$$

看不出什么规律, 再算! 设 $f(x)=x$, 则

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b x^n\mathrm{d}x\right)^{1/n}=b\cdot\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}\left(1-\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}\right)\right)^{1/n}=b$$

继续算! 取 $f(x)=x^2$, 则

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b x^{2n}\mathrm{d}x\right)^{1/n}=b\cdot\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2n+1}\left(1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2n+1}\right)\right)^{1/n}=b^2$$

结果只与端点处的值有关. 再算一个. 取 $f(x)=1/x$, 那么

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b x^{-n}\mathrm{d}x\right)^{1/n}=\lim_{n\to+\infty}a^{(1-n)/n}\left(\frac{1}{-n+1}\left(1-\left(\frac{b}{a}\right)^{-n+1}\right)\right)^{1/n}=\frac{1}{a}$$

注意: 上面取的函数都是单调函数, 积分值对应于该函数在区间上的最大值. 因此, 猜想所求极限就是 $f(x)$ 在此区间内的最大值, 即

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x\right)^{1/n}=\max_{a\leqslant x\leqslant b}f(x)\tag{2.7}$$

下面证明这一猜想. 由连续性, 存在 $x_0\in[a,b]$, 使得

$$f(x_0)=\max_{a\leqslant x\leqslant b}f(x)$$

这样对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap[a,b]$ 时有

$$f(x_0)-\varepsilon\leqslant f(x)\leqslant f(x_0)$$

从而利用被积函数的非负性, 若 $x_0=a$ 或 $x_0=b$, 则有

$$(f(x_0)-\varepsilon)\delta^{1/n}\leqslant\left(\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x\right)^{1/n}\leqslant f(x_0)(b-a)^{1/n}$$