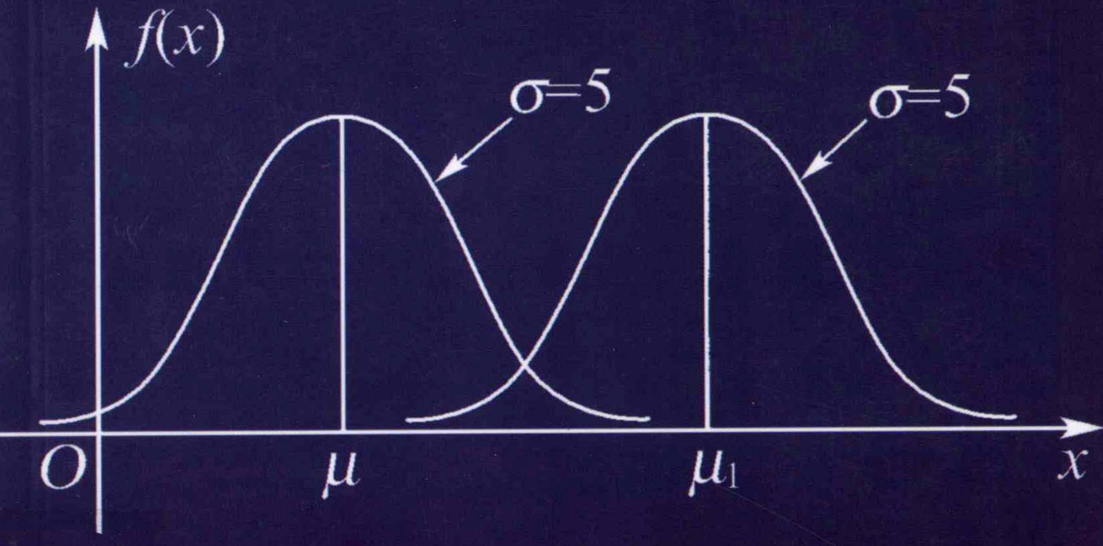
GAILULUN YU SHULI TONGJI

# 概率论与数理统计

主编◎韦 俊




东南大学出版社
Southeast University Press

# 概率论与数理统计

主　编　韦　俊
副主编　陈万勇　黄素珍

东 南 大 学 出 版 社
·南京·

## 内容简介

本书共分十章，内容包括随机事件与概率、一维随机变量及其分布、二维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、线性统计模型、MATLAB在数理统计中的应用。本书内容丰富，选材恰当，重点突出，叙述精练、准确，便于自学。每章后面均有习题，书后附有答案。

本书适用于高等院校本科各专业学生，特别适用于应用型本科院校的学生，也可供相关专业的工程技术人员、经济管理人员参考。

**图书在版编目(CIP)数据**

概率论与数理统计/韦俊主编. —南京：东南大学出版社，2010.12

ISBN 978-7-5641-2539-4

Ⅰ.①概… Ⅱ.①韦… Ⅲ.①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第231454号

概率论与数理统计

出版发行：东南大学出版社
社　　址：南京四牌楼2号　邮编：210096
出 版 人：江建中
责任编辑：史建农
网　　址：http://www.seupress.com
经　　销：全国各地新华书店
印　　刷：南京新洲印刷有限公司
开　　本：700mm×1000mm　1/16
印　　张：15.5
字　　数：310千字
版　　次：2011年1月第1版
印　　次：2011年1月第1次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5641-2539-4
印　　数：1～4500册
定　　价：29.80元

# 前　　言

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的一门学科. 它的思想与方法在农、工、商等社会、经济的许多领域以及自然科学的诸多学科中得到了广泛的应用,因而它已经成为高等院校各专业的一门重要的公共必修基础课程,也是一门应用性很强的课程.

本书以培养高等应用型人才为目标,以教育部颁布的高等学校(工科)本科基础课教学基本要求(概率统计部分)为依据,在内容的取舍上以必需、够用、简明为原则,力求用通俗的语言和生动的例子帮助读者建立概率统计的基本概念,用大量的例题帮助读者学习概率统计的基本方法,尽力做到叙述准确、简洁、通俗,选用例题与习题典型、规范、由浅入深、易于计算.

本书的第一章至第五章是概率论的基本理论,第六章至第九章是数理统计的基本内容;同时,为方便学生学习概率论与数理统计的实验知识,特意增加了MATLAB软件在数理统计中的应用作为第十章. 本教材将概率统计实验内容写入教材,不仅给学生一个提高和加深对本学科理解的机会,也给教师一种根据需要对讲授内容进行选择的余地,是一种新的教学改革尝试.

本书由韦俊担任主编,陈万勇、黄素珍担任副主编,胡忠、陈丽娟、卞小霞参加了编写. 由韦俊负责全书的统稿和定稿.

本书由杨载朴教授担任主审,杨教授认真审阅了全书,对此表示衷心的感谢.

本书的出版受到盐城工学院教材基金资助,特此感谢.

由于编者水平所限,书中难免有疏漏差错之处,恳请同行及广大读者批评指正.

**编　者**

**2010 年 12 月**

# 目　　录

# 第一章　随机事件与概率

## 1.1　随机试验与随机事件

### 1.1.1　随机试验

人们在自己的实践活动中，常常会遇到两种现象，一种是确定性现象，另一种是随机现象. 所谓确定性现象是在一定条件下必然发生的现象，例如："太阳不会从西边升起"、"水从高处流向低处"、"同性电荷必然互斥"、"函数在间断点处不存在导数" 等等，其特征是条件完全决定结果. 而在一定条件下可能出现也可能不出现的现象称为随机现象. 随机现象的特征是条件不能完全决定结果，如：远距离射击较小的目标，可能击中，也可能击不中，每一次射击的结果是随机(偶然)的；自动车床加工的零件，可能是合格品，也可能是废品，结果也是随机的、不确定的.

随机现象在一次观察中出现什么结果具有偶然性，但在大量试验或观察中，这种结果的出现具有一定的统计规律性. 概率论是研究随机现象(偶然现象)的规律性的科学.

在事物的联系和发展过程中，随机现象是客观存在的. 在表现上是偶然性在起作用，这种偶然性又始终是受事物内部隐藏着的必然性所支配的.

现实世界上事物的联系是非常复杂的，一切事物的发展过程中既包含着必然性的方面，也包含着偶然性的方面，它们是互相对立而又互相联系的，必然性经常通过无数的偶然性表现出来.

科学的任务就在于，要从看起来是错综复杂的偶然性中揭露出潜在的必然性，即事物的客观规律性. 这种客观规律性是在大量现象中发现的.

在科学研究和工程技术中，我们会经常遇到，在不变的条件下重复地进行多次实验或观测，抽去这些实验或观测的具体性质，就得到概率论中试验的概念. 所谓试验就是一定的综合条件的实现，我们假定这种综合条件可以任意多次地重复实现. 大量现象就是很多次试验的结果，如果试验满足以下条件，则称该试验为随机试验(简称为试验)：

(1) 在相同的条件下可以重复进行；

(2) 试验的所有可能结果是预先知道的，且不止一个；

(3) 每做一次试验总会出现可能结果中的一个，但在试验之前不能预言会出现哪个结果.

随机试验通常用 $E$ 来表示.

**例 1.1.1** 抛掷一枚硬币，观察字面、花面出现的情况. 该试验可以在相同的条件下重复地进行，试验的所有可能结果是字面和花面，进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

同理可知下列试验都为随机试验.

**例 1.1.2** 抛掷一枚骰子，观察出现的点数.

**例 1.1.3** 从一批产品中依次任选三件，记录出现正品与次品的件数.

**例 1.1.4** 记录某公共汽车站某日上午某时刻的等车人数.

**例 1.1.5** 考察某地区 10 月份的平均气温.

**例 1.1.6** 从一批灯泡中任取一只，测试其寿命.

### 1.1.2 随机事件与样本空间

当一定的条件实现时，也就是在试验的结果中所发生的现象叫作事件. 如果在每次试验的结果中某事件一定发生，则这一事件叫作必然事件；相反地，如果某事件一定不发生，则叫作不可能事件.

在试验的结果中，可能发生也可能不发生的事件叫作随机事件(偶然事件).

如：抛掷一枚骰子，观察出现的点数. 试验中，骰子“出现 1 点”，“出现 2 点”，…，“出现 6 点”，以及“点数不大于 4”，“点数为偶数” 等都为随机事件；“点数不大于 6” 是必然事件；“点数大于 6”是不可能事件.

随机事件可简称为事件，并以大写英文字母 $A,B,C,\cdots$来表示.

例如：抛掷一枚骰子，观察出现的点数. 可设 $A=$“点数不大于 4”，$B=$ “点数为奇数” 等等. 必然事件用字母 $U$ 表示，不可能事件用字母 $V$ 表示.

为了深入理解随机事件，我们来叙述试验与样本空间和样本点的概念.

在不变的条件下重复地进行试验，虽然每次试验的结果中所有可能发生的事件是可以明确知道的，并且其中必有且仅有一个事件发生，但是在试验之前却无法预知究竟哪一个事件将在试验中的结果中发生. 随机试验 $E$ 的所有可能结果组成的集合称为 $E$ 的样本空间，通常记为 $\Omega$.

试验的结果中每一个可能发生的结果叫作试验的样本点，通常用字母 $\omega$ 表示.

在例 1.1.1 中有样本点：$H$ 表示“字面向上”，$T$ 表示“花面向上”，于是样本空间是由两个样本点构成的集合：$\Omega_1=\{H,T\}$.

在例 1.1.2 中有样本点：$i$ 表示骰子“出现 $i$ 点”，于是样本空间是由六个样本点构成的集合：$\Omega_2=\{1,2,3,4,5,6\}$.

在例 1.1.3 中有样本点：$N$ 表示“正品”，$D$ 表示“次品”，于是样本空间是由八个样本点构成的集合：

$$\Omega_3=\{NNN,NND,NDN,DNN,NDD,DDN,DND,DDD\}$$

在例 1.1.4 中有样本点：$i$ 表示“上午某时刻的等车人数”，则样本空间 $\Omega_4=\{0,1,2,3,\cdots\}$.

在例 1.1.5 中有样本点：$t$ 表示“平均温度”，则样本空间 $\Omega_5=\{t\mid T_1<t<T_2\}$.

在例 1.1.6 中有样本点：$t$ 表示“灯泡寿命”，则样本空间 $\Omega_6=\{t\mid t>0\}$.

因为样本空间 $\Omega$ 中任一样本点 $\omega$ 发生时，必然事件 $U$ 都发生，所以 $U$ 是所有样本点构成的集合，即必然事件 $U$ 就是样本空间 $\Omega$. 今后就把必然事件记作 $\Omega$.

又因为样本空间 $\Omega$ 中任一样本点 $\omega$ 发生时，不可能事件 $V$ 都不发生，所以 $V$ 是不含任何样本点的集合，即不可能事件 $V$ 是空集 $\varnothing$. 今后就把不可能事件记作 $\varnothing$.

### 1.1.3　随机事件的关系及运算

为了研究随机事件及其概率，我们需要说明事件之间的各种关系及运算.

从前面不难看出，任一随机事件都是样本空间的一个子集，所以事件之间的关系及运算与集合之间的关系及运算是完全类似的. 在下面的讨论中，我们叙述事件的关系及运算时所用的符号也是与集合的关系及运算的符号基本上一致的.

设试验 $E$ 的样本空间为 $\Omega$，而 $A,B,A_k(k=1,2,\cdots)$ 是 $\Omega$ 的子集.

1. 包含关系

若事件 $A$ 出现，必然导致 $B$ 出现，则称事件 $B$ 包含事件 $A$，记作 $A\subset B$.

**例 1.1.7**　某种产品的合格与否是由该产品的长度与直径是否合格所决定，“长度不合格”必然导致“产品不合格”. 记 $A$ 表示“长度不合格”，$B$ 表示“产品不合格”，则 $A\subset B$. 也称 $A$ 是 $B$ 的子事件.

2. 相等关系

若事件 $A$ 包含事件 $B$，而且事件 $B$ 包含事件 $A$，则称事件 $A$ 与事件 $B$ 相等，记作 $A=B$.

3. 事件 $A$ 与 $B$ 的并

“二事件 $A$ 与 $B$ 中至少有一事件发生”这一事件称为事件 $A$ 与事件 $B$ 的并，记作 $A\cup B$.

**例 1.1.8**　某种产品的合格与否是由该产品的长度与直径是否合格所决定，记 $A$ 表示“长度不合格”，$B$ 表示“直径不合格”，$C$ 表示“产品不合格”，则 $C=$

$A\cup B$.

两个事件的并可以推广到多个事件的并. 若"事件 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_s$ 中至少有一事件发生" 这一事件称为事件 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_s$ 的并,记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_s$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{s}A_i$. 用 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_s\cup\cdots$(即 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$)表示无数个事件 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_s,\cdots$ 的并.

4. 事件 $A$ 与 $B$ 的交

若"二事件 $A$ 与 $B$ 都发生"这一事件称为事件 $A$ 与事件 $B$ 的交,记作 $A\cap B$ 或 $AB$.

**例 1.1.9** 某种产品的合格与否是由该产品的长度与直径是否合格所决定,记 $A_1$ 表示"长度合格",$B_1$ 表示"直径合格",$C$ 表示"产品合格",则 $C=A_1\cap B_1$.

两个事件的交可以推广到多个事件的交. 若"事件 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_s$ 都发生"这一事件称为事件 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_s$ 的交,记为 $A_1\cap A_2\cap\cdots A_s$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{s}A_i$. 用 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_s\cap\cdots$(即 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$)表示无数个事件 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_s,\cdots$的交.

5. 事件 $A$ 与 $B$ 互不相容(互斥)

若二事件 $A$ 与 $B$ 不可能同时发生,则称事件 $A$ 与 $B$ 是互不相容的(或互斥的),即 $AB=\varnothing$.

例如:抛掷一枚硬币,"出现花面" 与 "出现字面" 是互不相容的两个事件.

如果 $s$ 个事件 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_s$ 中任何两个事件都不可能同时发生,则称这 $s$ 个事件是互不相容的(或互斥的).

通常把互不相容的事件 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_s$ 的并,记为 $A_1+A_2+\cdots+A_s$ 或 $\sum\limits_{i=1}^{s}A_i$.

6. 事件 $A$ 与 $B$ 的差

由事件 $A$ 出现而事件 $B$ 不出现所组成的事件称为事件 $A$ 与 $B$ 的差,记作 $A-B$.

例如:"长度合格但直径不合格" 是 "长度合格"与 "直径合格" 的差.

7. 若设 $A$ 表示"事件 $A$ 出现",则"事件 $A$ 不出现"称为事件 $A$ 的对立事件或逆事件,记作 $\overline{A}$.

例如: $A=$"骰子出现 1 点",则 $\overline{A}=$ "骰子不出现 1 点".

对于任意的事件 $A$,我们有 $\overline{\overline{A}}=A, A+\overline{A}=U, A\overline{A}=V$.

8. 若 $s$ 个事件 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_s$ 中至少有一事件发生,即 $\bigcup\limits_{i=1}^{s}A_i=\Omega$,则称这 $s$ 个事件 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_s$ 构成完备事件组;若 $s$ 个事件 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_s$ 满足 $\bigcup\limits_{i=1}^{s}A_i=\Omega$,且 $A_iA_j=\varnothing(i,j=1,2,\cdots,s$ 且 $i\neq j)$,则称这 $s$ 个事件 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_s$

构成互不相容的完备事件组.

在这里,我们用平面上的一个矩形表示样本空间 $\Omega$,矩形内的每个点表示一个样本点,用两个小圆分别表示事件 $A$ 和 $B$,则事件的关系与运算可用图 1-1 来表示,其中 $A\cup B$,$A-B$,$\overline{A}$ 分别为图中阴影部分.

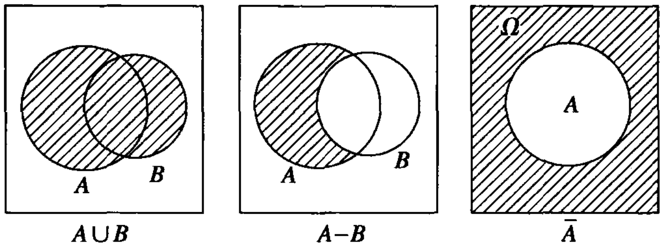



图 1-1

9. 事件间的运算规律满足以下性质

(1) 交换律: $A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$.

(2) 结合律: $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C, (AB)C=A(BC)$.

(3) 分配律: $A(B\cup C)=AB\cup AC$.

**推广**
$$A\left(\bigcup_{i=1}^{n}B_i\right)=\bigcup_{i=1}^{n}(AB_i)$$

(4) 德摩根定律: $\overline{A\cup B}=\overline{A}\overline{B}, \overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

**推广**
$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A}_i, \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A}_i$$

如果把事件 $A$(或 $B$)所包含的基本事件构成的集合简称为集合 $A$(或 $B$),则事件的关系及运算可以用集合的关系及运算表述如下:

| | | |
|---|---|---|
| $A\subset B$ | 事件 $A$ 包含于事件 $B$ | 集合 $A$ 是集合 $B$ 的子集 |
| $A=B$ | 事件 $A$ 与事件 $B$ 相等 | 集合 $A$ 与集合 $B$ 相等 |
| $A\cup B$ | 事件 $A$ 与事件 $B$ 的和事件 | 集合 $A$ 与集合 $B$ 的并集 |
| $A\cap B$ | 事件 $A$ 与事件 $B$ 的积事件 | 集合 $A$ 与集合 $B$ 的交集 |
| $AB=V$ | 事件 $A$ 与事件 $B$ 互不相容 | 集合 $A$ 与集合 $B$ 不相交 |
| $\overline{A}$ | 事件 $A$ 的对立事件 | 集合 $A$ 的余集 |

**例 1.1.10**　任意抛掷一颗骰子,观察出现的点数.设事件 $A$ 表示"出现偶数点",事件 $B$ 表示"出现的点数能被 3 整除",则下列事件 $\overline{A},\overline{B},A\cup B,AB,\overline{A\cup B}$分别表示什么事件?并把它们表示为样本点的集合.

**解**　设样本点 $\omega_i$ 表示"出现 $i$ 点",$i=1,2,\cdots,6$.

$\overline{A}=\{\omega_1,\omega_3,\omega_5\}$，表示“出现奇数点”；

$\overline{B}=\{\omega_1,\omega_2,\omega_4,\omega_5\}$，表示“出现的点数不能被 3 整除”；

$A\cup B=\{\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_6\}$，表示“出现的点数能被 2 或 3 整除”；

$AB=\{\omega_6\}$，表示“出现的点数能被 6 整除”；

$\overline{A\cup B}=\{\omega_1,\omega_5\}$，表示“出现的点数既不能被 2 整除也不能被 3 整除”.

**例 1.1.11** 设 $A,B,C$ 表示三个随机事件，试将下列事件用 $A,B,C$ 表示出来：

(1) 仅 $A$ 发生；

(2) $A,B,C$ 都不发生；

(3) $A$ 不发生，且 $B,C$ 中至少有一事件发生；

(4) $A,B,C$ 至少有一事件发生；

(5) $A,B,C$ 中最多有一事件发生.

分析：此类题涉及事件的关系，首先要弄清楚定义，其次注意有时表达式不唯一.

**解** (1) $A\overline{B}\overline{C}$；(2) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$；(3) $\overline{A}(B\cup C)$；(4) $A\cup B\cup C$；(5) $\overline{A}\overline{B}\cup\overline{B}\overline{C}\cup\overline{C}\overline{A}$.

## 1.2 随机事件的概率

随机事件 $A$ 在一次试验中可能发生也可能不发生，事前是无法预知的. 但是在大量重复试验中，它发生的可能性的大小有一定的规律，可以用一个数来表示，这个数就是事件的概率，用 $P(A)$来表示.

### 1.2.1 概率的统计定义

设随机事件 $A$ 在 $n$ 次试验中发生了 $m$ 次，则比值 $\frac{m}{n}$ 叫作随机事件 $A$ 的相对频率(简称频率)，记作 $f_N(A)$. 用公式表示如下：

$$f_N(A)=\frac{m}{n} \tag{1-1}$$

显然，任何随机事件的频率是介于 0 与 1 之间的一个数，即

$$0\leqslant f_N(A)\leqslant 1 \tag{1-2}$$

对于必然事件，在任何试验序列中我们有 $m=n$，所以必然事件的频率恒等于 1，即

$$f_N(U)=1 \tag{1-3}$$

对于不可能事件,我们有 $m=0$,所以不可能事件的频率恒等于 0,即

$$f_N(V)=0 \tag{1-4}$$

经验证明,当试验重复多次,随机事件 $A$ 的频率具有一定的稳定性.也就是说,在不同的试验序列中,当试验次数充分大时,随机事件 $A$ 的频率常在一个确定的数字附近摆动.

我们来看下面的实验结果.表 1-1 中 $n$ 表示抛掷硬币的次数,$m$ 表示徽花向上的次数,$W=\frac{m}{n}$表示徽花向上的频率.

**表 1-1**

| 实验序号 | $n=5$ | | $n=50$ | | $n=500$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $m$ | $W$ | $m$ | $W$ | $m$ | $W$ |
| 1 | 2 | 0.4 | 22 | 0.44 | 251 | 0.502 |
| 2 | 3 | 0.6 | 25 | 0.50 | 249 | 0.498 |
| 3 | 1 | 0.2 | 21 | 0.42 | 256 | 0.512 |
| 4 | 5 | 1.0 | 25 | 0.50 | 253 | 0.506 |
| 5 | 1 | 0.2 | 24 | 0.48 | 251 | 0.502 |
| 6 | 2 | 0.4 | 21 | 0.42 | 246 | 0.492 |
| 7 | 4 | 0.8 | 18 | 0.36 | 244 | 0.488 |
| 8 | 2 | 0.4 | 24 | 0.48 | 258 | 0.516 |
| 9 | 3 | 0.6 | 27 | 0.54 | 262 | 0.524 |
| 10 | 3 | 0.6 | 31 | 0.62 | 247 | 0.494 |

从表 1-1 我们可以看出,当抛掷硬币的次数较少时,徽花向上的频率是不稳定的;但是,随着抛掷硬币次数的增多,频率越来越明显地呈现出稳定性.如上表最后一列所示,我们可以说,当抛掷硬币的次数充分多时,徽花向上的频率大致是在 0.5 这个数的附近摆动.

类似的例子可以举出很多.这说明随机事件在大量重复试验中存在着某种客观规律性——频率的稳定性.因为它是通过大量统计显示出来的,所以称为统计规律性.

由随机事件的频率的稳定性可以看出,随机事件发生的可能性可以用一个数来表示.这个刻画随机事件 $A$ 在试验中发生的可能性大小的、介于 0 与 1 之间的数叫随机事件 $A$ 的概率,记作 $P(A)$.概率的这个定义通常称为概率的统计定义.

当试验次数充分大时,随机事件 $A$ 的频率正是在它的概率 $P(A)$的附近摆动.

在上面的例子中，我们可以认为徽花向上的概率等于 0.5.

直接估计某一事件的概率是非常困难的，甚至是不可能的，仅在比较特殊的情况下才可以计算随机事件的概率. 概率的统计定义实际上给出了一个近似计算随机事件的概率的方法：我们把多次重复试验中随机事件 $A$ 的频率 $f_N(A)$ 作为随机事件 $A$ 的概率 $P(A)$ 的近似值，即当试验次数 $n$ 充分大时，有

$$P(A)\approx f_N(A)=\frac{m}{n}$$

因为必然事件的频率恒等于 1，所以必然事件的概率等于 1，即

$$P(U)=1$$

又因为不可能事件的频率恒等于 0，所以不可能事件的概率等于 0，即

$$P(V)=0$$

这样，任何事件 $A$ 的概率满足不等式

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1$$

### 1.2.2　古典概型

在叙述概率的古典定义以前，我们先介绍“事件的等可能性”的概念.

如果试验时，由于某种对称性条件使得若干个随机事件中每一事件发生的可能性在客观上是完全相同的，则称这些事件是等可能的.

例如，任意抛掷一枚钱币，“徽花向上”与“字向上”这两个事件发生的可能性在客观上是相同的，也就是等可能的；又如，抽样检查产品质量时，一批产品中每一个产品被抽到的可能性在客观上是相同的，因而抽到任一产品是等可能的.

现在我们叙述概率的古典定义：

设试验的样本空间总共有 $N$ 个等可能的基本事件，其中有且仅有 $M$ 个基本事件是包含于随机事件 $A$ 的，则随机事件 $A$ 所包含的基本事件数 $M$ 与基本事件的总数 $N$ 的比值叫作随机事件 $A$ 的概率，记作 $P(A)$，即

$$P(A)=\frac{M}{N}$$

**例 1.2.1**　从 0，1，2，…，9 十个数字中任取一个数字，求取得奇数数字的概率.

**解**　基本事件的总数 $N=10$，设事件 $A$ 表示“取得奇数数字”，则它所包含的基本事件数 $N=5$. 因此，所求的概率

$$P(A)=\frac{5}{10}=0.5$$

**例 1.2.2**　在一批 $N$ 个产品中有 $M$ 个次品，从这批产品中任取 $n$ 个产品，求其中恰有 $m$ 个次品的概率.

**解**　基本事件的总数为 $C_N^n$，随机事件所包含的基本事件数为 $C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}$，因此，所求的概率

$$P(A)=\frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

**例 1.2.3**　袋内有 $a$ 个白球与 $b$ 个黑球，每次从袋中任取一个球，取出的球不再放回去，接连取 $k$ 个球($k\leqslant a+b$)，求第 $k$ 次取得白球的概率.

**解**　由于考虑到取球的顺序，这相当于从 $a+b$ 个球中任取 $k$ 个球的选排列，所以基本事件的总数为

$$A_{a+b}^{k}=(a+b)(a+b-1)\cdots(a+b-k+1)$$

设事件 $B_k$ 表示“第 $k$ 次取得白球”，则因为第 $k$ 次取得的白球可以是 $a$ 个白球中的任一个，有 $a$ 种取法；其余 $k-1$ 个球可在前 $k-1$ 次中顺次地从 $a+b-1$ 个球中任意取中，故基本事件数为

$$A_{a+b-1}^{k-1}\cdot a=(a+b-1)(a+b-2)\cdots(a+b-k+1)\cdot a$$

因此，所求概率

$$P(B_k)=\frac{(a+b-1)\cdots(a+b-k+1)\cdot a}{(a+b)(a+b-1)\cdots(a+b-k+1)}=\frac{a}{a+b}$$

值得注意的是，这个结果与 $k$ 的值无关，这表明无论哪一次取得白球的概率都是一样的，或者说，取得白球的概率与先后次序无关.

因此，随机事件 $A$ 所包含的基本事件数 $M\geqslant 0$，且不大于基本事件的总数 $N$，所以由概率的古典定义易知

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1$$

显然，当且仅当所论事件包含所有的基本事件时概率等于 1. 这就是说，必然事件的概率等于 1，即以下等式成立：

$$P(U)=1$$

当且仅当所论事件不包含任一基本事件时概率等于 0. 这就是说，不可能事件的概率等于 0，即以下等式成立：

$$P(V)=0$$

## 1.3　概率的加法定理

我们可将相对复杂的事件用简单事件的关系及运算来表示，那么它们的概率之间有没有关系呢？这一节我们先讨论概率加法定理.

### 1.3.1　互不相容事件的加法定理

**定理 1.3.1**　两个互不相容事件的并的概率等于这两个事件的概率的和，即

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

**证明**　我们就概率的古典定义来证明这个定理. 设试验的样本空间共有 $N$ 个等可能的基本事件，而随机事件 $A$ 包含其中的 $M_1$ 个基本事件，随机事件 $B$ 包含其中的 $M_2$ 个基本事件. 由于事件 $A$ 与事件 $B$ 是互不相容，因而它们所包含的基本事件应该是完全不相同的. 所以，事件 $A$ 与事件 $B$ 的和 $A+B$ 所包含的基本事件共有 $M_1+M_2$ 个，于是得到

$$P(A+B)=\frac{M_1+M_2}{N}=\frac{M_1}{N}+\frac{M_2}{N}=P(A)+P(B)$$

这一定理不难推广到有限多个互不相容事件的情形，因此有下面的定理.

**定理 1.3.2**　有限个互不相容事件的和的概率等于这些事件的概率的和，即

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

由此可得下面的推论.

**推论 1**　如果事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成互不相容的完备事件组，则这些事件的概率的和等于 1，即

$$P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)=1$$

事实上，因为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成完备组，所以它们之中至少有一事件一定发生，即这些事件的和 $A_1+A_2+\cdots+A_n$ 是必然事件，所以

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=1$$

由此，根据定理 1.3.2，即得.

特别的，对于仅由两个互不相容事件构成的完备组，即这两个事件是对立事件，我们有下面的推论.

**推论 2**　对立事件的概率的和等于 1，即

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$