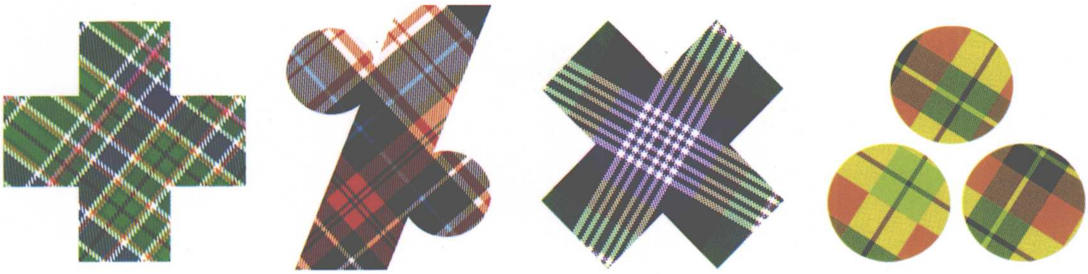
提分攻略系列

# 常考题型训练题典

CHANGKAO TIXING XUNLIAN TIDIAN



## 高中 数学 5

（选修）



主编 蔡晔

龍門書局 | 龙门品牌 · 学子至爱
www.longmenbooks.com

提分攻略系列

# 常考题型训练题典

CHANGKAO TIXING XUNLIAN TIDIAN

## 高中 数学5

(必修)



丛书主编 蔡晔
丛书副主编 冯素梅
编 者 周冬松 骆世举 张开琪



龍門書局
北京

举报电话:(010) 64031958,13801093426 (打假办)
邮购电话:(010) 64034160,88937471

**图书在版编目(CIP)数据**

提分攻略　常考题型训练题典　高中数学 5(选修)/蔡晔主编;周冬松,骆世举,张开琪编..—北京:龙门书局,2011.6
ISBN 978-7-5088-3131-2

Ⅰ.①提…　Ⅱ.①蔡…　②周…　③骆…　④张…　Ⅲ.①中学数学课—高中—习题集　Ⅳ.①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 118519 号

责任编辑:潘恭华　高　鹏/封面设计:浩蓝书籍设计

龍　門　書　局 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
www.longmenbooks.com
新　蕾　印　刷　厂 印刷
科学出版社总发行　各地书店经销

*

2011年6月第　一　版　　开本: B5
2011年7月第二次印刷　　印张: 13
字数:258 000

**定　价:20.00 元**

(如有印装质量问题,我社负责调换)

# 前言

新课标教学和新课改理念越来越重视对学生的思维能力、实践能力和创新能力的培养。《考试大纲》告诉我们高考的命题将全面落实新课改理念，把以能力测试为主导的命题指导思想落实到每一道题中，在继承和发展传统命题优势的情况下，高考将更加注重对学生各种能力的考查，并真正把对能力的考查放在首要位置。

《提分攻略》系列图书正是在这种背景下应运而生，它包含《疑难与规律详解》和《常考题型训练题典》两大子系列，涉及数学、物理、化学、生物和英语五大学科，供中学各年级教师和学生使用。《常考题型训练题典》系列丛书由多位优秀的一线骨干教师和研究员，结合新课标教学理念和考试大纲的要求分学科、分模块、分年级编排成册，总的说来本书有以下特点：

## 体例切合学习认知规律

本丛书从学生学习认知的心理规律出发，以母题与衍生的形式呈现知识内容，每一个题型都让学生经过学、悟、练的过程，进而将需要掌握的知识快速地内化到自己的知识结构中，帮助学生提高理解和运用知识的效率。

## 题型牢牢把握考试动向

本丛书在编写过程中，本着“遵循教材但不拘泥于教材”的原则，以考试大纲为指导，将各分册知识内容以题型的形式科学系统地归纳整理，考点、重点、难点一目了然，让同学们在学习的过程中目标明确、有的放矢。

## 题型全面总结通式通法

本书在全面梳理各节考点、重点、难点的同时，兼顾各题型中涉及的解题方法、规律并以解题锦囊的形式高度总结通式通法，全面科学地归纳各节的知识特点，揭示解题技巧，提升解题能力；并通过易错题、探究题、创新题等综合题型的专项训练，进一步提升同学们运用知识解决综合性问题的能力。

## 编写思路新颖

本丛书一改传统题典类图书的简单罗列例题的形式，采取了考点归类、举一反三的方式，全面梳理各种常考题型。并提炼出题中能够激发思维的重要内容，强化记忆，引导学生思考、研究、学习、提升。

编　者

2011.5.20

# 目 录

# 目 录

# 选修 2-1

# 第一章　常用逻辑用语

## 第 1 节　命题的转化及真假的判断

### 题型一　命题的判断

**母题 1** ★★ 下列语句中是命题的有________.

①等边三角形难道不是等腰三角形吗?

②垂直于同一条直线的两条直线必平行吗?

③一个数不是正数就是负数;

④大角所对的边大于小角所对的边;

⑤若 $x+y$ 为有理数,则 $x$、$y$ 也都是有理数;

⑥作$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

【解析】①反问句,不是真命题. ②疑问句. 没有对垂直于同一直线的两条直线是否平行作出判断,不是命题. ③是假命题. 0 既不是正数也不是负数. ④是假命题. 没有指明是在同一个三角形中. ⑤是假命题. 如 $x=\sqrt{3}$,$y=-\sqrt{3}$. ⑥祈使句. 不是命题. 故①③④⑤是命题.

【答案】①③④⑤

**指点迷津**

判断一个语句是否为命题,关键在于能否判断其真假,即对某件事情是否作出了明确判断.

**解题锦囊** 1. 解决本题型的关键在于能否对某一语句作出真假判断. 如果能够判断其真假,则为命题,否则不是命题,如疑问句、祈使句等就不是命题.

2. 命题一般由两部分组成:条件和结论,常常写成"若 $p$,则 $q$"或者"如果……那么……"的形式. 因此,也可以通过命题的形式判断某一语句是否为命题.

**母题 2** ★★★ 下列命题是真命题的为　　(　　)

A. 若$\frac{1}{x}=\frac{1}{y}$,则 $x=y$　　B. 若 $x^2=1$,则 $x=1$

C. 若 $x=y$,则$\sqrt{x}=\sqrt{y}$　　D. 若 $x<y$,则 $x^2<y^2$

【解析】A 中,$\frac{1}{x}=\frac{1}{y}$,两边同时乘以 $xy$,得 $x=y$. 可通过举反例排除 B、C、D,例如由 $x^2=1$ 可得 $x=\pm1$;当 $x=y=-2$ 时,$\sqrt{x}\neq\sqrt{y}$;当 $x=-3$,$y=2$ 时,有 $x<y$,但是 $x^2=9$,$y^2=4$,显然有 $x^2>y^2$.

【答案】A

**指点迷津**

通过举反例判断一个命题为假命题,是判断命题真假常见的一种解题策略.

**解题锦囊** 1. 本题型的一般解题思路:首先看某一语句是否对某一事件作出真假判断,然后再对是命题的语句作出是真命题还是假命题的判定.

2. 判断一个命题为假命题,只需举出反例即可,但是要说明一个命题是真命题,则需要严格的理论证明.

## 衍生训练

**衍生1 ★★★** 判断下列语句是否为命题.若是,判断其真假,并说明理由.

(1)求证:$\sqrt{3}$是无理数;

(2)若 $x\in\mathbf{R}$,则 $x^2+2x+5>0$;

(3)你是高二学生吗?

(4)垂直于同一平面的两条直线互相平行;

(5)一个正数不是素数就是合数.

【分析】紧扣命题的定义,即能够判断真假的语句叫命题.

【解答】(1)、(3)不是命题,因为(1)是祈使句,(3)是疑问句.而(2)、(4)、(5)是命题,其中(5)是假命题,如正数$\frac{1}{3}$既不是素数也不是合数,(2)、(4)是真命题,$x^2+2x+5=(x+1)^2+4>0$恒成立,由立体几何知识可知垂直于同一平面的两条直线互相平行.

**指点迷津**

解决本题的关键是剖析每一个语句能否判断其真假.

**衍生2 ★★★★** 把下列命题改写成"若 $p$,则 $q$"的形式,并判断其真假.

(1)2 是有理数;

(2)奇函数的图象关于原点对称;

(3)垂直于同一个平面的两个平面垂直.

【分析】找准命题的条件和结论是解题的关键,要注意大前提的写法.

【解答】(1)改写:若一个数等于2,则这个数是有理数,真命题.

(2)改写:若一个函数是奇函数,则它的图象关于原点对称,真命题.

(3)改写:若 $\alpha$、$\beta$、$\gamma$ 为三个不同平面,且 $\alpha\perp\gamma$,$\beta\perp\gamma$,则 $\alpha\perp\beta$,假命题.

**指点迷津**

首先注意分清一个命题的条件和结论,然后再判断其真假.

## 题型二　命题间的相互转换

**母题1 ★★★** 命题"若 $x^2<1$,则 $-1<x<1$"的逆否命题是(　　)

A. 若 $x^2\geqslant1$,则 $x\geqslant1$ 或 $x\leqslant-1$

B. 若 $-1<x<1$,则 $x^2<1$

C. 若 $x>1$ 或 $x<-1$,则 $x^2>1$

D. 若 $x\geqslant1$ 或 $x\leqslant-1$,则 $x^2\geqslant1$

【解析】该命题的条件是:$x^2<1$,结论是:$-1<x<1$,其逆否命题是:若 $x\geqslant1$ 或 $x\leqslant-1$,则 $x^2\geqslant1$.故选 D.

【答案】D

**指点迷津**

先找出原命题的条件和结论,然后根据原命题与逆否命题之间的关系直接写出.

**解题锦囊** 1.本题型的一般思路是首先写出原命题的条件和结论,然后根据四种命题之间的相互关系写出四种命题的任何一种形式.

2.解决本题型的关键在于分清原命题的条件和结论,然后按要求进行改写.要分清一个命题的条件和结论,一般是先将原命题改写成"若 $p$,则 $q$"或"如果……那么……"的形式,"若"或"如果"后为条件,"则"或"那么"后为结论.

**母题 2** ★★★ 给出命题:若函数 $y=f(x)$ 是幂函数,则函数 $y=f(x)$ 的图象不过第四象限.在它的逆命题、否命题、逆否命题三个命题中,真命题的个数是 ( )

A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. 0

**【解析】**原命题与逆否命题等价,而原命题为真,所以逆否命题为真命题.原命题的逆命题为:若 $y=f(x)$ 的图象不过第四象限,则函数 $y=f(x)$ 是幂函数,显然此命题为假.又因为逆命题与否命题同真假,所以否命题为假,故选 C.

**【答案】**C

**解题锦囊** 1. 本题型的一般思路是首先根据要求写出相应的命题的形式,然后再判断其真假.

2. 判断四种命题的真假性常用的技巧是遵循互为逆否命题的两个命题具有相同的真假性.区分怎样的两个命题互为逆否命题,是解决问题的实质所在.

3. 本题型常用到的思想方法有等价转化的思想.如正面很难判断一个命题的真假时,不妨判断该命题的逆否命题的真假,从而再确定该命题的真假.

> **指点迷津**
> 解题的关键是运用"若两个命题互为逆否命题,则它们有相同的真假性".

## 衍生训练

**衍生 1** ★★ 命题"若一个数是负数,则它的平方是正数"的逆命题是 ( )

A. 若一个数是负数,则它的平方不是正数

B. 若一个数的平方是正数,则它是负数

C. 若一个数不是负数,则它的平方不是正数

D. 若一个数的平方不是正数,则它不是负数

**【解析】**因为一个命题的逆命题是将原命题的条件与结论进行交换,因此逆命题为"若一个数的平方是正数,则它是负数".故选 B.

**【答案】**B

> **指点迷津**
> 写一个命题的逆命题、否命题、逆否命题时,关键是要弄清它们之间的关系.本题容易出错的是会丢掉"一个数"这关键的字眼.

**衍生 2** ★★★ 写出下列命题的逆命题、否命题和逆否命题,并判断其真假.

(1)若四边形的对角互补,则该四边形是圆的内接四边形;

(2)若 $a+1$ 是无理数,则 $a$ 是无理数.

**【分析】**理解四种命题之间的相互关系,是处理这类问题的有效策略.

**【解答】**(1)逆命题:若四边形是圆的内接四边形,则该四边形的对角互补,是真命题.

否命题:若四边形的对角不互补,则该四边形不是圆的内接四边形,是真命题.

逆否命题:若四边形不是圆的内接四边形,则该四边形的对角不互补,是真命题.

> **指点迷津**
> 判断四种命题之间的真假关系,首先要区分哪两个命题是互否,哪两个命题是互为逆否,然后再判断其真假性,进行验证即可.

学习心得

(2)逆命题:若 $a$ 是无理数,则 $a+1$ 是无理数,是真命题.

否命题:若 $a+1$ 不是无理数,则 $a$ 不是无理数,是真命题.

逆否命题:若 $a$ 不是无理数,则 $a+1$ 不是无理数,是真命题.

衍生3 ★★★ 一个命题的逆命题是"若 $x=1$,则 $x^2-2x<0$",试写出该命题的原命题.

【分析】知道一个命题的逆命题,要求写出该原命题,只需分清该命题的逆命题的题设和结论.

【解答】该命题的原命题是:"若 $x^2-2x<0$,则 $x=1$".

## 第2节　反 证 法

### 题型一　反证法

母题 ★★★ 已知函数 $y=f(x)$ 对其定义域内任意两个实数 $a,b$,当 $a<b$ 时,都有 $f(a)<f(b)$,试用反证法证明:函数 $y=f(x)$ 的图象与 $x$ 轴至多有1个交点.

【分析】本题从正面证明比较困难,故应采用间接证明的方法,用反证法证明.

【证明】假设至少有两个交点,记为 $(x_1,0)$,$(x_2,0)$,不妨设 $x_1<x_2$.

由题设可知当 $a<b$ 时,都有 $f(a)<f(b)$,所以 $f(x_1)<f(x_2)$,从而与 $f(x_1)=f(x_2)=0$ 矛盾,所以假设错误,所以函数 $y=f(x)$ 的图象与 $x$ 轴至多有1个交点.

**指点迷津**

用反证法证明时,第一步的假设不能出错,如"至多有1个交点"的反面是"至少有两个交点".

解题锦囊 1.用反证法证明命题的一般步骤是:(1)假设命题的反面成立;(2)从假设出发,经过推理论证,得出矛盾;(3)由矛盾判断假设不成立,从而肯定原命题成立.

2.运用反证法证题的关键在于利用反设和已知条件,通过推理得到矛盾(在推理过程中,必须利用反设,否则就不是反证法).推出的矛盾可以是:与已知条件矛盾;与假设矛盾;与定义、公理、定理矛盾;自相矛盾.

3.运用反证法证题常用的方法技巧有:(1)至多、至少问题,直接证明比较复杂,多用反证法.

(2)反证法证明中的第一步反面假设,即对原命题的结论加以否定,一定要是全盘否定,如"大于"的否定应是"不大于"或者是"小于等于".反证法证明中的第二步归谬时,一定要从反面假设入手,即用反面假设推出矛盾.

## 衍生训练

**衍生 1** ★★★★ 若 $a,b,c$ 均为实数,且 $a=x^2-2y+\frac{\pi}{2}$,$b=y^2-2z+\frac{\pi}{3}$,$c=z^2-2x+\frac{\pi}{6}$,

求证:$a,b,c$ 中至少有一个大于 0.

【分析】直接从已知条件入手进行推理,方向不明,较难证明,因此用反证法.

【证明】假设 $a,b,c$ 都不大于 0,即 $a\leqslant 0,b\leqslant 0,c\leqslant 0$,则 $a+b+c\leqslant 0$.

由题意知:

$a+b+c=\left(x^2-2y+\frac{\pi}{2}\right)+\left(y^2-2z+\frac{\pi}{3}\right)+\left(z^2-2x+\frac{\pi}{6}\right)$

$=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2+\pi-3$.

因为 $\pi-3>0,(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\geqslant 0$,

显然 $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2+\pi-3>0$,

即 $a+b+c>0$,这与 $a+b+c\leqslant 0$ 矛盾.

因此假设不成立,故 $a,b,c$ 中至少有一个大于 0.

> **指点迷津**
> 当证明一个命题从正面进行较难时,可以考虑反面证法,即反证法.用反证法时,应随时审视每个推理的结论是否与题设或某定义、定理、公理、公式、法则等矛盾,甚至自相矛盾等等.

# 第 3 节 充要条件的判断与证明

## 题型一 充要条件的判断

**母题** ★★★★ 下列各题中,$p$ 是 $q$ 的什么条件(指充分不必要,必要不充分,充要,既不充分又不必要)?并说明理由.

(1)$p:x>1$ 且 $y>1$,$q:x+y>2$ 且 $xy>1$;

(2)$p:x=1$ 或 $x=-1$,$q:|x|=1$;

(3)$p$:两个三角形面积相等,$q$:这两个三角形全等;

(4)$p:x>y$,$q:\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$.

【分析】利用充分条件、必要条件、充要条件的定义解题,并注意结合相关的数学知识.

【解答】(1)由 $p:x>1$ 且 $y>1$ 得 $x+y>2$.

又 $x>1>0$ 且 $y>1>0$,得 $xy>1$.

$\therefore p\Rightarrow q$.

设 $x=1,y=2$,满足 $x+y=3>2,xy=2>1$,

但 $x=1$,不满足 $x>1$,

$\therefore q\nRightarrow p$.

则 $p$ 是 $q$ 的充分不必要条件.

(2)由 $x=1$ 或 $x=-1$,得 $|x|=1$,即 $p\Rightarrow q$.

又由 $|x|=1$,得 $x=1$ 或 $x=-1$,即 $q\Rightarrow p$.

> **指点迷津**
> 处理本题首先要分清命题的条件和结论,然后分析由前者能否推出后者,由后者能否推出前者,也可利用反例来推证.

$\therefore p$ 是 $q$ 的充要条件.

(3)两个三角形面积相等$\nRightarrow$这两个三角形全等,即 $p\nRightarrow q$.

两个三角形全等$\Rightarrow$这两个三角形面积相等,即 $q\Rightarrow p$.

则 $p$ 是 $q$ 的必要不充分条件.

(4)取 $x=2,y=-1$,满足 $x>y$,

但$\frac{1}{x}=\frac{1}{2},\frac{1}{y}=-1$,不满足$\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$,

$\therefore p\nRightarrow q$.

取 $x=-1,y=1$,满足$\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$,

但不满足 $x>y$,$\therefore q\nRightarrow p$.

则 $p$ 是 $q$ 的既不充分又不必要条件.

**解题锦囊** 1.本题型的一般解题思路是首先分清命题的条件和结论,然后判断“$p\Rightarrow q$”及“$q\Rightarrow p$”的真假,再根据定义下结论.

2.若直接判断充要条件比较困难时,可把它转化为与之等价的命题进行判断.解决此类问题时常常会用到等价转化的思想.

学习心得

## 衍生训练

**衍生1** ★★★ 已知条件 $p:x>1$,条件 $q:\frac{1}{x}<1$,则 $p$ 是 $q$ 成立的________条件.

【解析】本题主要考查充分条件、必要条件、充要条件的概念及命题的转化关系.由$\frac{1}{x}<1$,解之得 $x<0$ 或 $x>1$,显然 $p\Rightarrow q$ 且 $q\nRightarrow p$,故 $p$ 是 $q$ 成立的充分非必要条件.

【答案】充分非必要

**指点迷津**

判断是成立的什么条件,关键是要看条件之间的推出关系.

**衍生2** ★★★★ 记实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中的最大数为 $\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,最小数为 $\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$.已知$\triangle ABC$的三边长为 $a,b,c$ $(a\leqslant b\leqslant c)$,定义它的倾斜度为 $l=\max\left\{\frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{c}{a}\right\}\cdot\min\left\{\frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{c}{a}\right\}$,则“$l=1$”是“$\triangle ABC$为等边三角形”的　(　　)

A.必要而不充分的条件　　B.充分而不必要的条件

C.充要条件　　D.既不充分也不必要条件

【解析】若$\triangle ABC$为等边三角形时,即 $a=b=c$,则$\max\left\{\frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{c}{a}\right\}=\min\left\{\frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{c}{a}\right\}=1$,则 $l=1$;若$\triangle ABC$为等腰三角形,如 $a=2,b=2,c=3$ 时,则 $\max\left\{\frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{c}{a}\right\}=\frac{3}{2}$,$\min\left\{\frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{c}{a}\right\}=\frac{2}{3}$,此时 $l=1$ 仍成立,但$\triangle ABC$不为等边三角形,所以A正确.

【答案】A

**指点迷津**

本题考查充分、必要条件的判断,其中涉及最大值与最小值的知识,需要通过举例的方法进行验证.

衍生3 ★★★★ 若不等式$|x-m|<1$成立的充分不必要条件是$\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$，求实数$m$的取值范围.

【分析】先解不等式$|x-m|<1$，然后根据充分不必要条件的定义进行求解.

【解答】由$|x-m|<1$，得$-1+m<x<1+m$.

又因为不等式$|x-m|<1$成立的充分不必要条件是$\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$，

则有$\begin{cases}-1+m\leqslant\frac{1}{3},\\1+m\geqslant\frac{1}{2},\end{cases}$解之得$-\frac{1}{2}\leqslant m\leqslant\frac{4}{3}$，

则实数$m$的取值范围是$-\frac{1}{2}\leqslant m\leqslant\frac{4}{3}$.

> **指点迷津**
> 紧扣"充分不必要条件"的定义进一步列出不等式组是解题的关键.

## 题型二　充要条件的探究与证明

母题 ★★★★★ 设$a,b,c$为$\triangle ABC$的三边，求证：方程$x^2+2ax+b^2=0$与$x^2+2cx-b^2=0$有公共根的充要条件是$\angle A=90°$.

**【分析】**根据充要条件的定义，先证必要性，再证充分性.

**【证明】**(1)必要性：设方程$x^2+2ax+b^2=0$与$x^2+2cx-b^2=0$有公共根$x_0$，则$x_0^2+2ax_0+b^2=0$，$x_0^2+2cx_0-b^2=0$，

两式相减可得$x_0=\frac{b^2}{c-a}$，将此式代入$x_0^2+2ax_0+b^2=0$，

可得$b^2+c^2=a^2$，故$\angle A=90°$；

(2)充分性：$\because\angle A=90°$，

$\therefore b^2+c^2=a^2$，$b^2=a^2-c^2$.　①

将①式代入方程$x^2+2ax+b^2=0$，

可得$x^2+2ax+a^2-c^2=0$，

即$(x+a-c)(x+a+c)=0$.

将①代入方程$x^2+2cx-b^2=0$，

可得$x^2+2cx+c^2-a^2=0$，

即$(x+c-a)(x+c+a)=0$.

故两方程有公共根$x=-(a+c)$.

所以方程$x^2+2ax+b^2=0$与$x^2+2cx-b^2=0$有公共根的充要条件是$\angle A=90°$.

> **指点迷津**
> 充要条件的证明需要分别证明充分性和必要性，即证明充分性时：条件⇒结论；证明必要性时：结论⇒条件. 证题的关键点是要分清条件和结论.

**解题锦囊** 1. 本题型解题的关键在于分清条件与结论，防止出现把充分性当必要性来证明(或求解)的错误. 若从条件推出结论，就是证明(或求解)充分性；若从结论推出条件，就是证明(或求解)必要性.

2. 在处理本题型时常用等价法，即从条件(或结论)开始，以等价的形式逐步推出结论(或条件)，但要注意每步都是可逆的.

3. 等价转化的数学思想是处理这类问题时常用的数学思想方法之一.

> **指点迷津**
> 处理充分条件、必要条件、充要条件的探求等问题时，需要理解题意，明确要探求的是什么条件，切忌不分条件和结论盲目推证.

## 衍生训练

**衍生1** ★★★★ 已知 $M=\{(x,y)\mid y^2=2x\}$，$N=\{(x,y)\mid (x-a)^2+y^2=9\}$，求 $M\cap N\neq\varnothing$ 的充要条件.

【分析】弄清楚 $M\cap N\neq\varnothing$ 的意义是解题的关键.

【解答】$M\cap N\neq\varnothing$ 的充要条件是方程组 $\begin{cases}y^2=2x,\\(x-a)^2+y^2=9\end{cases}$ 至少有一实数解，

即 $x^2+2(1-a)x+a^2-9=0$ 至少有一个非负根，由 $\Delta\geqslant 0$ 得 $a\leqslant 5$，

又因为上述方程有两个负根 $x_1,x_2$ 的充要条件是 $x_1+x_2<0$ 且 $x_1\cdot x_2>0$，

即 $-2(1-a)<0$ 且 $a^2-9>0$，解得 $a<-3$，

于是这个方程至少有一个非负根的 $a$ 的范围是 $-3\leqslant a\leqslant 5$，此即为所求的充要条件.

> **指点迷津**
> 充分性、必要性两方面都要证明，不能遗漏.

**衍生2** ★★★★ 证明一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一正根和一负根的充要条件是 $ac<0$.

【分析】首先分清条件和结论，然后从充分、必要两方面理解.

【证明】充分性：若 $ac<0$，则 $b^2-4ac>0$，且 $\frac{c}{a}<0$，

$\therefore$ 方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个相异实根，且两根异号，即方程有一正根和一负根.

必要性：若一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一正根和一负根，则 $\Delta=b^2-4ac>0$，$x_1x_2=\frac{c}{a}<0$，$\therefore ac<0$.

综上所述，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一正根和一负根的充要条件是 $ac<0$.

# 第4节　复合命题和全称量词、存在量词

## 题型一　对复合命题的考查

> **指点迷津**
> 正确理解逻辑联结词“或”、“且”、“非”的含义，是写出“$p$ 或 $q$”、“$p$ 且 $q$”、“非 $p$”形式的命题的关键.

**母题1** ★★★ 分别写出由下列各命题构成的“$p$ 或 $q$”、“$p$ 且 $q$”、“非 $p$”形式的命题.

(1) $p$：$0\in\{1,2,3\}$；$q$：$0\in\{0,2,4,6\}$；

(2) $p$：3是21的约数；$q$：3是方程 $x^2-4x+3=0$ 的解.

【分析】理解“$p$ 或 $q$”、“$p$ 且 $q$”、“非 $p$”形式的命题的结构特征，再写出各复合命题.

【解答】(1) $p$ 或 $q$：$0\in\{1,2,3\}\cup\{0,2,4,6\}$；

$p$ 且 $q$：$0\in\{1,2,3\}\cap\{0,2,4,6\}$；

非 $p$：$0\notin\{1,2,3\}$；

(2) $p$ 或 $q$：3是21的约数或3是方程 $x^2-4x+3=0$ 的解；

$p$ 且 $q$：3既是21的约数，又是方程 $x^2-4x+3=0$ 的解；

非 $p$：3不是21的约数.

**解题锦囊** 1. 本题型的一般思路是首先区分出两个简单命题 $p$、$q$，然后再用逻辑联结词"或"、"且"、"非"联接即可.
2. 解决本题型的关键在于正确理解逻辑联结词"或"、"且"、"非"的含义.
3. 在用逻辑联结词"或"、"且"、"非"联接成复合命题时，要特别注意命题的形式，如"方程 $x^2+x-2=0$ 的解是 $x=-2$ 或方程 $x^2+x-2=0$ 的解是 $x=1$"是"$p$ 或 $q$"形式的命题，如果改写成"方程 $x^2+x-2=0$ 的解是 $x=-2$ 或 $x=1$"就不是"$p$ 或 $q$"形式的命题.

**母题 2** ★★★ 已知命题 $p$：所有的有理数都是实数，命题 $q$：正数的对数都是负数，则下列命题中为真命题的是　（　　）

A. $(\neg p)\vee q$　　B. $p\wedge q$
C. $(\neg p)\wedge(\neg q)$　　D. $(\neg p)\vee(\neg q)$

【解析】先判断出 $p$、$q$ 的真假，再判断 $\neg p$，$\neg q$ 的真假，最后由真值表判断各复合命题的真假. $p$ 为真，$\neg p$ 为假，$q$ 为假，$\neg q$ 为真，故 D 为真命题.

【答案】D

**指点迷津**
处理本题的关键是判断命题 $p$，$q$ 的真假，然后再根据真值表判断其复合命题的真假.

**解题锦囊** 判断含有逻辑联结词的复合命题的真假，一般可以按下面的步骤进行：判断复合命题的构成形式→判断 $p$，$q$ 的真假→根据真值表判断复合命题的真假.

## 衍生训练

**衍生 1** ★★★ 分别用"$p$ 或 $q$"、"$p$ 且 $q$"、"非 $p$"填空：

(1)命题"方程 $x^2-3x+2=0$ 的解集不是 $\{1,2\}$"是________形式；
(2)命题"$x^2\geqslant 0$"是________形式；
(3)命题"$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形"是________形式.

【解析】(1)非 $p$，其中 $p$：方程 $x^2-3x+2=0$ 的解集是 $\{1,2\}$.
(2)$p$ 或 $q$，其中 $p$：$x^2>0$，$q$：$x^2=0$.
(3)$p$ 且 $q$，其中 $p$：$\triangle ABC$ 是等腰三角形，$q$：$\triangle ABC$ 是直角三角形.

【答案】(1)非 $p$；(2)$p$ 或 $q$；(3)$p$ 且 $q$.

**指点迷津**
本题考查逻辑联结词"或"、"且"、"非"的识别，弄清命题的构成形式是解答此题的关键.

**衍生 2** ★★★ 已知命题 $p$、$q$，则"命题 $p$ 或 $q$ 为真"是"命题 $p$ 且 $q$ 为真"的　（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件
C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【解析】"$p$ 或 $q$ 为真"说明：$p$、$q$ 中有一真一假，或两个真；"$p$ 且 $q$ 为真"说明：$p$、$q$ 均为真. 故"$p$ 或 $q$ 为真"$\nRightarrow$"$p$ 且 $q$ 为真"，"$p$ 且 $q$ 为真"$\Rightarrow$"$p$ 或 $q$ 为真".

【答案】B

**指点迷津**
本题的思路是首先分析"$p$ 或 $q$ 为真"与"$p$ 且 $q$ 为真"的含义，然后判断它们之间的互相推出关系.

**衍生 3** ★★★★ 已知命题 $p$：函数 $f(x)=x^2+mx+1$ 在 $(1,2)$ 上有且只有一个零点，命题 $q$：方程 $4x^2+4(m-2)x+1=0$ 无实数根，若"$p$ 或 $q$"为真命题，"$p$ 且 $q$"为假命题，求实数 $m$ 的取值范围.

【分析】由“$p$或$q$”为真命题”,“$p$且$q$”为假命题知$p$与$q$为一真一假.

【解答】易知$p: f(1)\cdot f(2)<0$,即$-\frac{5}{2}<m<-2$且$\neg p: m\leqslant -\frac{5}{2}$或$m\geqslant -2$.

$q: \Delta=16(m-2)^2-16<0$,即$1<m<3$且$\neg q: m\leqslant 1$或$m\geqslant 3$.

由“$p$或$q$”为真命题”,“$p$且$q$”为假命题得$\begin{cases}p\text{真}\\q\text{假}\end{cases}$或$\begin{cases}p\text{假}\\q\text{真}\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}-\frac{5}{2}<m<-2,\\ m\leqslant 1\text{或}m\geqslant 3,\end{cases}$或$\begin{cases}m\leqslant -\frac{5}{2}\text{或}m\geqslant -2,\\ 1<m<3,\end{cases}$

即$-\frac{5}{2}<m<-2$或$1<m<3$,

$\therefore m\in\left(-\frac{5}{2},-2\right)\cup(1,3)$.

## 题型二 全称量词与存在量词

**母题1** ★★★ 下列四个命题中,真命题的序号是为________.

(1) $\forall x\in\mathbf{R}, 2x+1$是整数;(2) $\exists x\in\mathbf{R}, \sin x>1$;(3) $\exists x\in\mathbf{Z}, x^2=3$;(4) $\forall x\in\mathbf{R}, x^2+x+1>0$.

【解析】第(1)题,取$x=\frac{1}{3}$,则$2x+1=\frac{5}{3}$显然不是整数;第(2)题,$\forall x\in\mathbf{R}, -1\leqslant\sin x\leqslant 1$;第(3)题不存在$x\in\mathbf{Z}$,使$x^2=3$;第(4)题,$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$,故真命题的序号为(4).

【答案】(4)

**解题锦囊** 1. 本题型的一般思路是首先看是全称量词还是存在量词,然后再判断是全称命题还是存在性命题,最后判断其真假.

2. 要说明全称命题是真命题,应给出证明,要说明全称命题是假命题,只要举一反例;要说明存在命题是真命题,只要找出一个满足条件的例子,要说明存在性命题是假命题,则要给出证明.

**母题2** ★★★ 命题“存在$x_0\in\mathbf{R}, 2^{x_0}\leqslant 0$”的否定是 ( )

A. 不存在$x_0\in\mathbf{R}, 2^{x_0}>0$  B. 存在$x_0\in\mathbf{R}, 2^{x_0}\geqslant 0$

C. 对任意的$x_0\in\mathbf{R}, 2^{x_0}<0$  D. 对任意的$x_0\in\mathbf{R}, 2^{x_0}>0$

【解析】存在性命题的否定为全称命题,故本题选D.

【答案】D

**解题锦囊** 1. 对含有一个量词的命题的否定的一般思路是首先否定量词,即全称量词变为存在量词,存在量词变为全称量词,然后再否定结论.

2. 处理本题型的关键在于弄清楚量词的构成,从而进一步明白该命题是全称命题还是存在性命题.

3. 对一些量词的否定技巧:一般来讲全称量词的否定为存在量词,存在量词的否定为全称量词.

**指点迷津**
处理这类问题首先尽量把命题$p$,$q$简化,再依条件“$p$或$q$”为真命题,“$p$且$q$”为假命题推出所有可能的情况.

**指点迷津**
本题考查全称命题和存在命题真假的判断,关键是要熟悉全称命题和存在命题的真假的判断方法.

**指点迷津**
写出命题的否定要特别注意命题的形式,这一点容易被同学们忽视.并且还要注意全称命题的否定是存在性命题,存在性命题的否定是全称命题.

## 衍生训练

**衍生1 ★★★** 判断下列命题是否是全称命题或存在性命题，若是，用符号表示，并判断其真假：

(1)有一个实数 $\alpha$，$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\neq1$；

(2)任何一条直线都存在斜率；

(3)所有的实数 $a$，$b$，使得方程 $ax+b=0$ 恰有唯一解；

(4)存在实数 $x$，使得 $x^3\leqslant0$.

【分析】首先明确命题中的量词，再确定命题的名称.

【解答】(1)是一个存在性命题，用符号表示为：$\exists\alpha\in\mathbf{R}$，$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\neq1$. 是一个假命题.

(2)是一个全称命题，用符号表示为：$\forall$ 直线 $l$，$l$ 都存在斜率，是一个假命题.

(3)是一个全称命题，用符号表示为：$\forall a,b\in\mathbf{R}$，方程 $ax+b=0$ 恰有唯一解，是一个假命题.

(4)是一个存在性命题，用符号表示为：$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^3\leqslant0$，真命题.

**衍生2 ★★★** 写出下列命题的否定，并判断其真假：

(1)不论 $m$ 取何实数，方程 $x^2+mx-1=0$ 必有实数根；

(2)有的三角形的三条边相等；

(3)菱形的对角线互相垂直；

(4)$\exists x\in\mathbf{N}$，$x^2-2x+1\leqslant0$.

【分析】首先分析命题所含的量词，然后再判断命题是全称命题还是存在性命题，最后对命题否定并判断真假.

【解答】(1)存在一个实数 $m$，使方程 $x^2+mx-1=0$ 没有实数根，假命题.

(2)所有三角形的三条边不全相等，假命题.

(3)所有的菱形的对角线都互相垂直，真命题.

(4)$\forall x\in\mathbf{N}$，$x^2-2x+1>0$. 假命题.

**衍生3 ★★★★** 已知命题 $p$：$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2+2ax+a\leqslant0$. 若命题 $p$ 是假命题，求实数 $a$ 的取值范围.

【分析】弄清命题是假命题的含义是解题的关键.

【解答】因为命题 $p$ 是假命题，

则有 $\forall x\in\mathbf{R}$，都有 $x^2+2ax+a>0$ 为真命题，

即 $\Delta=(2a)^2-4a<0$，

解之得 $0<a<1$，

故实数 $a$ 的取值范围是 $0<a<1$.

**指点迷津**

有些命题中量词并不明显，做题需注意分辨.

**指点迷津**

对含有一个量词的命题的否定，先对量词进行变化，全称量词变为存在量词，存在量词变为全称量词，然后否定结论即可.

**指点迷津**

对于存在性命题是假命题，实际上可以通过否定转化为全称命题，再由全称命题是真命题得出结论.