21世纪高等院校创新教材

JINGJI SHUXUE JI YINGYONG

经济数学及应用

吕同富◎编著

中国人民大学出版社

21世纪高

JINGJI SHUXUE JI YINGYONG

经济数学及应用

吕同富◎编著

·北京·

图书在版编目（CIP）数据

经济数学及应用/吕同富编著. —北京：中国人民大学出版社，2011.11
21世纪高等院校创新教材
ISBN 978-7-300-14601-0

Ⅰ.①经… Ⅱ.①吕… Ⅲ.①经济数学 Ⅳ.①F224.0

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第212340号

21世纪高等院校创新教材
经济数学及应用
吕同富　编著
Jingji Shuxue ji Yingyong

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街31号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com（人大教研网）		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京市易丰印刷有限责任公司		
规　　格	200 mm×255 mm　16开本	**版　　次**	2011年11月第1版
印　　张	20.25 插页1	**印　　次**	2011年11月第1次印刷
字　　数	501 000	**定　　价**	39.80元

内容简介

作者以基于实际应用的课程开发设计模式，编写了新版高职高专院校数学教材《经济数学及应用》．本书内容包括：极限与连续；导数及应用；积分及应用；常微分方程初步；线性代数初步；概率论初步；数理统计初步．

基于实际应用的课程开发设计模式是本书的特色，基本应用技能和数学建模思想贯穿始终，本书学习目的明确，实际问题具体，有大量翔实的应用实例可供参考，有相当数量的应用问题可供实践．同时配有数字教学资源，极大地满足广大师生的教学需要．

本书可作为高职高专院校财经类专业“高等数学”课程教材或参考书，也可作为应用型本科和成人高校相关教材．

序

数学是研究现实世界数量关系和空间形式的科学，在它产生和发展的历史长河中，一直和各种各样的应用问题紧密相关．数学的特点不仅在于概念的抽象性、逻辑的严密性，结论的明确性和体系的完整性，而且在于它应用的广泛性．科学技术的迅速发展和计算机的日益普及，使得数学的应用越来越广泛和深入，数学已经成为一种能够普遍实施的技术，培养学生应用数学的意识和能力已经成为数学教学的一个重要方面．

近20年(1992－2011)的实践证明，大学生数学建模竞赛活动，不仅培养了学生的应用能力，而且推动了高等数学的教学改革和发展．《经济数学及应用》一书，在将数学建模的思想和方法与高等数学知识有机地融合方面进行了大胆的探索和有益的尝试，该书有以下显著特点：

1．作者借鉴国内外优秀教材，结合数学知识的介绍，精选了经济学中大量常用或有趣的“应用实例”引出问题，这是目前国内同类教材中不多见的，也是本书的亮点．这样的安排既有利于学生对数学概念和基础知识的理解，也有利于激发学生的学习兴趣和求知欲望，更有利于培养学生运用所学的数学知识解决实际问题的意识和能力．

2．与传统的教材相比，作者引入了更多的知识背景、更多的实际应用、更多的插图，并努力融文化性于数学内容，很多实际问题涉及国民经济各个领域，通而不同，很有启发性和趣味性．全书选材既注意到了内容的实用性，也注意到了高等数学知识体系的基础性和系统性．虽然在部分数学内容的介绍中舍弃了一些比较烦琐的抽象概念或理论证明，但这并不影响学生对高等数学基本内容的理解和掌握．

3．编写一本好的基础课教材是一项原创性的思维活动，应当鼓励不断创新、百花齐放．从选材上来讲，大致可以有两种不同的处理方式：一是写得精炼些即少写一点，让教师讲授时有更多自由发挥和引导同学进行推广、扩展的余地；二是写得全面些即多写一点，让教师有更多的选择空间，可以根据实际需要自主取舍，也更方便学生自学．该书应该是属于后一种类型．

仅仅有一本好的教材还不能保证一定有好的教学效果．在实际教学中，教师如何根据学时限制和自己所面对的学生的基础，用好教材、讲好每堂课，对保证教学效果尤为重要．课堂教学是一项师生互动、极富创造性的活动，需要第一线的教师们付出艰苦的努力、展现出独特的个人魅力，才能达到满意的教学效果，真正获得教学改革的成功．

综观全书，这是一本很有特色的高职高专院校财经类专业的数学教材，希望其出版能对我国目前数学教材、数学教育，特别是高职高专的数学教育改革起到一定的促进作用．

谢金星

2011年10月于清华园

前 言

温家宝在第四次全国教育工作会议上强调，推进教育事业改革和发展是一项长期而艰巨的任务．《国家中长期教育改革和发展规划纲要》的制定和实施只是一个新的起点．实现教育科学发展，根本出路在改革创新．要解放思想，实事求是，敢于冲破传统观念和体制的束缚，允许和鼓励各地进行探索和试验，通过改革创新使教育发展更加符合时代发展的潮流，更加符合建设中国特色社会主义对人才的需要，更加符合广大人民群众对教育的殷切期望．

改革是永恒的主题．《国家中长期教育改革和发展规划纲要》要求我们各级学校都要积极地开展各个领域的改革，要求在改革中求生存求发展．然而数学作为高职教育的基础课，教学改革发展缓慢，举步维艰．为了进一步适应高职数学教学改革的需要，作者做了艰苦的探索和研究，历时两年完成了这本《经济数学及应用》，希望它能在改革的大潮中激起一点浪花．

本书突出“高职”特色，注重培养学生的实践能力，基础理论以“实用为主、够用为度”，基础知识广而不深、要求学生会用就行．基本应用技能和数学建模思想贯穿始终．文字叙述准确，简明扼要，通俗易懂．“以例释理”，理论联系实际．全书共分三部分，一元微积分；线性代数初步；概率统计初步．各部分知识相对独立完整，具有一定的可剪裁性和拼接性，可根据不同的培养目标将内容裁剪拼接，使前后课程互相衔接，浑然一体．内容覆盖面广，满足了经济类专业大类对理论、技能及其基本素质的要求．同时还配有数字教学资源：电子教案(由金明华、黄美金、佘卫强、蔡建刚、许建艺制作完成)，Mathematica实验，Excel实验等内容供师生参考(相关数字教学资源可到中国人民大学出版社网上下载)．

本书内容紧密结合专业要求，站在专业的最前沿，与生产实际紧密相连，与相关专业的市场接轨，渗透专业素质的培养；以介绍成熟、稳定、广泛应用的数学知识为主线，同时介绍新知识、新方法、新技术等，并适当介绍科技发展的趋势，使学生能够适应未来技术进步的需要；与职业培养目标保持一致，及时更新了教材中过时的内容，增加了市场迫切要求的新知识，使学生在毕业时能够适应企业的要求；强调用情景真实的“实际问题”，营造现实工作过程中待解决问题的情境；主张用问题启动学生的思维，鼓励学生基于解决问题的学习、基于“实际应用”的学习；通过设计各种情境真实的“实际问题”，开拓学生的创新思维与想象空间；充分利用各种信息为学生提供跨学科的知识链接，提高学生的综合素质与能力．

本书取材新颖、阐述严谨、内容丰富、重点突出、推导简捷、思路清晰、深入浅出、富有启发性，便于教学与自学．图文并貌，有各种插图152张，不仅从不同的视角展现了计算机及其相关数学软件在现代数学教学中的作用，更使抽象的数学变得生动直观．基于实际应用是本书的特色，书中引入了168个应用实例(还引入了传统意义的例题151个)，简要地介绍了“数学”在国民经济各领域里的实际应用，展示了“数学”的强大威力和不可替代的重要地位．

全书在中国人民大学出版社的指导下，由中国数学会会员、中国职业技术教育学会教学工作委员会高职数学研究会委员吕同富教授编写.

全国大学生数学建模组委会秘书长、清华大学博士生导师谢金星教授，认真地审阅了书稿，从科学谋篇到整体布局、从开篇序论到内容细节等，提出了很多宝贵的修改意见. 中国人民大学出版社潘旭燕副编审也提出了很多宝贵的修改建议，特别是王美玲编辑认真细致地编辑了本书，纠正了原稿中很多疏漏和错误. 还有韦华教授，王英副教授，赵荣凯副教授审阅了部分书稿. 正是由于他们的辛勤劳动使本书增色不少，在此向他们及本书所列参考文献的作者们，以及为本书出版给予热心支持和帮助的朋友们，表示衷心的感谢.

本书可作为高职高专院校财经类相关专业“高等数学”课程教材，也可作为本科院校财经类专业“高等数学”课程参考用书.

《经济数学及应用》是高职数学教学改革的一个尝试，效果如何还有待实践的检验. 希望广大师生和同仁在使用过程中能给作者以指教，把高等数学教学改革进一步推向深入.

吕同富

ltongfu@126.com

2011年10月

目录

第一章　极限与连续

学习目标与要求

1. 了解一些典型经济函数.
2. 理解极限与连续的概念，会用极限方法分析解决实际问题.
3. 掌握用极限方法判断函数在某点的连续性.
4. 掌握闭区间连续函数的性质.

§ 1.1 经济数学中的函数

函数是描述变量间相互依赖关系的数学模型. 在自然现象和社会现象中，往往同时存在多个变量，这些变量按一定规律相互联系，函数是描述这种规律的一个法则. 下面介绍经济数学中一些常用的函数.

1. 价格函数

一般地，价格是商品销售量的函数. 在实际活动中可以看到，买的商品越多，消费者砍价的幅度就可以越大.

实际问题 1.1 杯子的批发价

某批发商批发1 000只杯子给零售商，批发价20元/只，若批发商每次多批发200只杯子，相应的批发价格降低1元/只，现在杯子的存货只有2 000只，杯子的最小批发量是1 000只，求价格函数.

解　设批发量为q，则批发价为

$$p(q) = 20 - \left[\frac{q - 1\,000}{200}\right] \quad (q \in [1\,000, 2\,000]),$$

其中［$\cdot$］为不大于$\cdot$的整数部分.

2. 需求函数

商品需求量是指在一定时间内，消费者对某商品有支付能力而且愿意购买的商品数量. 需求受多种因素影响，如商品的市场价格、消费者的喜好、季节、收入、人口分布等，其中商品的市场价格是影响商品需求量的主要因素. 为了便于讨论，假设商品的需求量仅受市场价格的影响. 因此可把商品的需求量q_d看作价格p的函数，即$q_d = q_d(p)$.

一般情况下，商品价格上涨会使需求量减少，即商品需求函数是商品价格的单调递减函数.

常用的需求函数有一次函数，二次函数，指数函数等.

实际问题 1.2 空调机降价促销

某空调厂为了促销，将空调的价格从3 000元/台降到2 500元/台，相应的需求量从3 000台增到5 000台，求线性需求函数.

解　设空调的需求函数(线性)为

$$q=-ap+b,$$

由题意得

$$\begin{cases}3\,000=-3\,000a+b\\5\,000=-2\,500a+b\end{cases},$$

解得$a=4,b=15\,000$，于是所求空调的需求函数为

$$q=-4p+15\,000.$$

3. 供给函数

商品的供给量是指在一定时间内生产者愿意生产并可向市场提供出售的商品数量. 供给价格是指生产者为提供一定量商品愿意接受的价格. 供给量也受多种因素影响，在这里不考虑其他因素的影响，把供给量q_s看作该商品的市场价格p的函数，即$q_s=q_s(p)$.

一般地，由于生产者向市场提供商品的目的是赚取利润，价格上涨会刺激生产者向市场提供更多的商品，使供给量增加；价格下跌会打击商品生产者的积极性，使供给量减少，即供给函数是价格p的单调增加函数.

常用的供给函数有一次函数、二次函数、指数函数等.

实际问题 1.3 鸡蛋的供给量

当鸡蛋收购价为6元/kg时，某收购站每月能收购5 000kg. 若收购价每千克提高0.2元，则收购量可增加500kg，求鸡蛋的线性供给函数.

解　设鸡蛋的线性供给函数为

$$q=ap-b,$$

由题意有

$$\begin{cases}5\,000=6a-b\\5\,500=6.2a-b\end{cases},$$

解得，$a=2\,500$，$b=10\,000$，故所求供给函数为

$$q=2\,500p-10\,000.$$

4. 市场均衡

对某种商品而言，当市场需求量q_d与供给量q_s相等时，商品的数量称为均衡数量，记为q_e，商品的价格称为均衡价格，记为p_e.

当市场价格高于均衡价格时，供给量增加而需求量相应减少，这时出现“供过于求”的现象；当市场价格低于均衡价格时，需求量大于供给量，此时出现“供不应求”的现象.

例如，由线性需求和供给函数构成的市场均衡模型可以写成

$$\begin{cases} q_d = -ap + b \quad (a > 0, b > 0) \\ q_s = cp - d \quad (c > 0, d > 0) \\ q_d = q_s \end{cases}.$$

解方程得均衡价格p_e和均衡供给量q_e，

$$p_e = \frac{b+d}{a+c}, \qquad q_e = \frac{bc-ad}{a+c},$$

由于$q > 0, a+c > 0$，因此有$bc > ad$.

当市场价格高于p_e时，需求量减少而供给量增加；反之，当市场价格低于p_e时，需求量增加而供给量减少. 利用供需均衡实现了市场对价格的调节.

实际问题 1.4 商品的均衡价格

某种商品的供给函数和需求函数分别为

$$q_s = 25p - 10, \qquad q_d = -5p + 200,$$

求该商品的均衡价格.

解　由供需均衡的条件$q_s = q_d$，可得

$$25p - 10 = -5p + 200,$$

因此，均衡价格为$p_e = 7$.

5. 成本与平均成本

成本是指在一定时期内，生产一定量产品所消耗的生产费用的总和. 成本包括固定成本和变动成本两部分. 其中固定成本是指在一定时期内不随产量变动而支出的费用，如厂房、设备等固定资产的折旧、管理者的固定工资等，记为C_0；变动成本是指随产品产量变动而变动支出的费用，如税收、原材料、电力燃料工人工资等，记为C_1. 这两部分成本的和称为成本，记为C，即$C = C_0 + C_1$. 假设固定成本不变(C_0为常数)，变动成本是产量q的函数($C_1 = C_1(q)$)，则成本为

$$C = C(q) = C_0 + C_1(q).$$

固定成本和变动成本是相对于某一时期而言. 在短期生产中固定成本不变，在长期生产中支出都是变动的. 实际应用中，因为产量q为正数，所以总成本函数是产量q的单调递增函数.

平均成本$\overline{C}$等于总成本C与产量q的比值，即$\overline{C} = C/q$.

实际问题 1.5 成本及平均成本

某厂生产某产品，每日最多生产100个单位. 日固定成本为130元，生产每一个单位产品的变动成本为6元，求该厂每日的总成本函数及平均成本函数.

解　设每日的总成本函数为C及平均成本函数为$\overline{C}$，因为成本为固定成本与可变成本之和，据题意有

$$C = C(q) = 130 + 6q \quad (q \in [0, 100]),$$

$$\overline{C} = \overline{C}(q) = \frac{130}{q} + 6 \quad (q \in [0, 100]).$$

6. 收益与利润

销售商品的收益R等于商品的销售量q与价格p的乘积，即$R = pq$. 利润是收益扣除成本后的剩余部分，记为L. 收益R减去变动成本C_1称为毛利润，再减去固定成本C_0称为纯利润. 平均收益等于总利润L与销售量q的比值.

$L = R - C > 0$ 盈利，

$L = R - C < 0$ 亏损，

$L = R - C = 0$ 盈亏平衡.

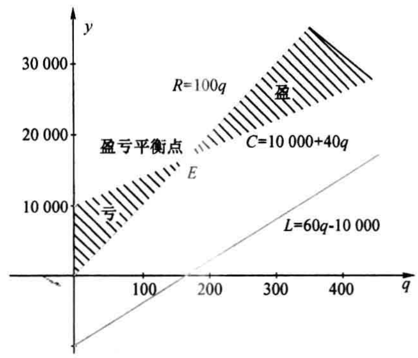

图 1.1　盈亏平衡

实际问题 1.6 总收益及平均收益

某商店以a元/件的价格出售某商品，若顾客一次购买该商品50件以上，则超出部分每件优惠10%，试将一次成交的总销售收益R表示为销售量q的函数及平均收益.

解　由题意，一次售出50件以内商品的总收益为$R = aq$，而售出50件以上的商品总收益为

$$R = 50a + (q - 50) \cdot a \cdot 90\%,$$

所以一次成交的销售总收益R是销售量q的分段函数

$$R = \begin{cases} aq & (q \in [0, 50]) \\ 50a + (q - 50) \cdot a \cdot 90\% & (q \in (50, \infty)) \end{cases},$$

平均销售收益为

$$\overline{R} = \begin{cases} a & (q \in [0, 50]) \\ (50a + (q - 50) \cdot a \cdot 90\%)/q & (q \in (50, \infty)) \end{cases}.$$

实际问题 1.7 商品的最大利润及平均利润

已知某产品的价格为p元，需求函数为$q = 50 - 5p$，成本函数为$C = 50 + 2q$元，求产量q为多少时利润L最大？最大利润是多少？

解　由$q = 50 - 5p$，得$p = \dfrac{50 - q}{5}$，所以收益函数为

$$R = pq = 10q - \frac{q^2}{5}.$$

利润函数

$$L = R - C = 8q - \frac{q^2}{5} - 50 = -\frac{1}{5}(q - 20)^2 + 30.$$

因此，$q = 20$时利润最大，且最大利润是30元.

商品产量q的平均利润为

$$\overline{L}=\frac{R-C}{q}=\frac{8q-q^2/5-50}{q}=8-\frac{q}{5}-\frac{50}{q}.$$

实际问题 1.8 盈亏平衡

某服装厂每年固定成本10 000元，要生产某样式服装q套，变动成本为40元 / 套，销售价为100元 / 套，求盈亏平衡点.

解 收益函数为$R=100q$，总成本为$C=10\,000+40q$，利润为$L=60q-10\,000$

由$100q=10\,000+40q$，得$q=500/3$. 如图 1.1所示.

7. 单利与复利

利息是指借款者向贷款者支付的报酬. 利息又有存款利息、贷款利息、债券利息、贴现利息等几种主要形式. 下面介绍单利与复利的计算公式.

例 1.1 单利和复利计算公式

设初始本金为p元，银行年利率为r，s_n表示第n年后欠银行的金额.

解 单利计算公式(单利计息，每期利息不计入下期本金)

$$s_1=p+rp=p(1+r),$$

$$s_2=p(1+r)+rp=p(1+2r),$$

$$\cdots$$

$$s_n=p(1+nr).$$

复利计算公式(复利计息，每期利息计入下期本金)

$$s_1=p+rp=p(1+r),$$

$$s_2=p(1+r)+rp(1+r)=p(1+r)^2,$$

$$\cdots$$

$$s_n=p(1+r)^n.$$

实际问题 1.9 住房按揭(抵押贷款)

抵押贷款指的是按规定的抵押方式以借款人或第三人的财产作为抵押物发放的贷款. 在抵押贷款中，最常见的是“住房按揭贷款”.

表1.1为2010年10月20日公布的公积金贷款利率(1~5年：3.5%，6~30年：4.05%)数据.

六年按揭贷款最不划算

从表1.1中可以发现，5年及5年以下的按揭贷款年利率是3.50%，6年及6年以上的按揭贷款年利率是4.05%. 银行在计算还款利息时并非是前5年按年利率3.50%计算，第6年才按年利率4.05%计

表 1.1　个人住房公积金贷款利率及万元还本息金额表(单位：元)

年份	月数	月利率(‰)	年利率(%)	月还款额	本息总额	总利息
1	12	2.917	3.50	到期还本息	10 350.00	350.00
2	24	2.917	3.50	432.03	10 368.65	368.65
3	36	2.917	3.50	293.02	10 548.75	548.75
4	48	2.917	3.50	223.56	10 730.88	730.88
5	60	2.917	3.50	181.92	10 915.05	915.05
6	72	3.375	4.05	156.68	11 280.94	1 280.94
7	84	3.375	4.05	136.92	11 501.14	1 501.14
8	96	3.375	4.05	122.13	11 724.05	1 724.05
9	108	3.375	4.05	110.64	11 949.65	1 949.65
10	120	3.375	4.05	101.48	12 177.95	2 177.95
...	...	...	...	...	...	...
29	348	3.375	4.05	48.88	17 011.51	7 011.51
30	360	3.375	4.05	48.03	17 290.88	7 290.88

算，而是只要按揭期超过了6年，就一律按年利率4.05%计算．因此，若要按揭贷款购房，按揭期要么选5年或5年以下，要么选10年或10年以上．

月利率的计算

比较表1.1中的月利率r_0与年利率r，可知银行计算的月利率是年利率r的$1/12$，即$r_0 = r/12$．也就是银行每年计息12次，每次计息的利率为$r_0 = r/12$．这种计息方式是否准确？

表 1.2

	r	$r_0 = r/12$	月利率计算的总利息/年	年利率提高的百分数
1~5年	3.50%	0.291 7%	355.71	0.057 1
6~30年	4.05%	0.337 5%	412.60	0.076

从表1.2可以看出：用年利率的$1/12$计算月利率，实际上已经把年利率提高0.5‰以上，如果你贷款30万元，每年要多付出1 500元以上．这是复利给银行带来的好处．

月还款额的计算

抵押贷款的还款方式有两种：一种是等额本息还款，即在还款期内，每月偿还等额贷款(包括本金和利息)，可以有计划地控制家庭收入的支出，也便于每个家庭根据自己的收入情况，确定还贷能力．另一种是等额本金还款，该方法根据剩余本金计算利息，初期本金较多，支付利息也较多，从而初期还款额较多，在随后的时间每月递减，这种方式的好处是，由于在初期偿还较大款项而减少利息的支出，比较适合还款能力较强的家庭．表1.1中所列出的月还款额是按等额本息还款方式给出的．下面推导等额本息还款方式的月还款额的计算公式．

设p为贷款本金，r_0为月利率，x为月还款额，n为贷款月数，s_n表示第n个月后仍欠银行的金额，则

$$\begin{aligned} s_1 &= p(1+r_0) - x \\ s_2 &= s_1(1+r_0) - x = p(1+r_0)^2 - x(1+(1+r_0)) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
s_3 &= s_2(1+r_0)-x=p(1+r_0)^3-x(1+(1+r_0)+(1+r_0)^2)\\
&\cdots\\
s_n &= p(1+r_0)^n-x(1+(1+r_0)+(1+r_0)^2+\cdots+(1+r_0)^{n-1})\\
&= p(1+r_0)^n-\frac{x((1+r_0)^n-1)}{r_0}.
\end{aligned}
$$

到第n个月，贷款还清，故$s_n=0$，可得月还款额为

$$x=\frac{pr_0(1+r_0)^n}{(1+r_0)^n-1}. \tag{1.1}$$

实际问题 1.10 公积金按揭30万

设一商品房价值为50万元，小张自筹20万元，需贷款30万元，按2010年10月公积金贷款利率计算利息，年利率为：1~5年是3.50%；5~30年是4.05%，准备10年还清，问小张具有什么能力才能贷款买房？还给银行的总利息是多少？

解　已知贷款额为$p=30$万元，月利率为$r_0=0.040\,5/12=3.375‰$，贷款月数为$n=12\times10=120$月

由公式 1.1得月还款额为

$$x=\frac{300\,000\times0.003\,375(1+0.003\,375)^{120}}{(1+0.003\,375)^{120}-1}\approx3\,044.49,$$

小张如果具备每月还贷3 044.49元的能力，则可以贷款了．到期还给银行的总利息为

$$3\,044.49\times120-300\,000=65\,338.8\text{元}.$$

经济学中常见的还有生产函数(生产中的投入与产出关系)、消费函数(国民消费总额与国民生产总值即国民收入之间的关系)、投资函数(投资与银行利率之间的关系)等.

§ 1.2 函数极限

1.2.1 函数极限

实际问题 1.11 圆的周长与面积(一个古老而经典的例子)

在生产和实践中，人类首先学会求正方形、矩形、三角形、平行四边形、梯形、任意多边形的周长和面积．我国三国时期数学家刘徽为了计算圆的周长和面积，于魏景元四年(公元263年)创立了“割圆术”．刘徽的做法是：作圆的第一个内接正多边形(正六边形)，平分每个边所对的弧作第二个内接正多边形(正十二边形)，以下用同样的方法，继续作圆的第三个内接正多边形(正二十四边形)，……如图 1.2所示．显然，每个圆内接正多边形的周长和面积都容易求得．于是，得到圆的内接正多边形周长序列：

$$P_6,P_{12},P_{24},\cdots,P_{2^{n-1}\times6},\cdots. \tag{1.2}$$