

大專科技用書

量子物理學

原子、分子、固態
原子核、基本粒子

QUANTUM PHYSICS

of Atoms, Molecules, Solids,
Nuclei, and Particles

單溥、陳自強、黃棟洲譯著

Robert Eisberg

University of California, Santa Barbara

and

Robert Resnick

Rensselaer Polytechnic Institute

復漢出版社印行

大專科技用書

量子物理學

原子、分子、固態
原子核、基本粒子

QUANTUM PHYSICS

of Atoms, Molecules, Solids,
Nuclei, and Particles

單溥、陳自強、黃棟洲譯著

Robert Eisberg

University of California, Santa Barbara

and

Robert Resnick

Polytechnic Institute

復漢出版社印行

中華民國六十九年十二月一日出版

量子物理學

原著者：EISBERG · RESNICK

譯著者：單溥、陳自強、黃棟洲

出版者：復漢出版社

地址：台南市德光街六五一號

郵政劃撥三一五九一號

發行人：沈岳林

印刷者：國發印刷廠

地址：台南市安平路五五六號

打字者：克林照相植字排版打字行

地址：台南市海安路和平街一二七巷一二號

本社業經行政院新聞局核准登記局版台業字第〇四〇二號

版權所有
翻印必究

原序

本書的基本目的是希望由基本量子力學的觀點將幾乎所有重要量子系統的性質的處理方法明白而正確的呈現出來。僅有量子力學不斷的發展才能達到此一目的，所以我們的重點是着重在理論的應用而非理論本身。既然如此，我們希望此書內容能被時下剛開始修量子物理課程的學生接受，當學生了解量子力學的重要性後，他們就會希望能對此理論多瞭解一點，因此，我們希望選用本書作教本的課程能繼續採用一本正式的量子力學課本作教本。

本書可作為一年課程的教本，學生須已瞭解微積分與微積分程度的基本古典物理，但本書也可用作較短時間課程的教本。第一至四章介紹早期量子物理的各種現象而發展出舊量子論的基本觀念。這幾章可以很快帶過，尤其是對那些已經瞭解過量子力學的學生更應如此。第五至八章及第九章的前四節包括量子力學的基本要點與其應用至一與二電子原子上的情形。這些重點可以在半年內完全瞭解，所以在短期課程中，教者可以加入以下各個獨立的專題：多電子原子與分子，量子統計與固體，原子核與基本粒子。

須要對量子力學作較深入瞭解的教師可以採用愛斯柏格所著的基本近代物理學（Fundamentals of Modern Physics）。須要多瞭解一點相對論的教師可以參考蘭士尼克所著的特殊相對論入門（Introduction to Special Relativity）、（John Wiley & Sons, 1968）。

我們在母校及附近四個學校任教時已經先出版了好幾本書，最後由愛斯柏格執筆完成本書，所以他是本書的主要作者。蘭士尼克曾校正最後一本基本版本並準備近代物理部份的手稿，所以他也是該書的主要作者。

本書曾採用一些其他教本所未採用的外貌，此點在教室教過後已證明甚為明確，這些外貌為：每章開始時的細節大綱，衆多之已解出的例題，可選擇的題材及附錄，結論，表格，問題，習題，與部份習題解答。本書寫作非常謹慎，故必適合自修之用。

我們雖採用MKS（或SI）單位制，但在一些實用上也採用了其他單位。

我們應感謝 Drs. Harriet Forster, Russell Hobbie, Stuart Meyer, Gerhard Salinger 與 Paul Yerghm 諸人幫我們校正，Dr. David Swedlow 幫我們解題，Dr. Ben Jamin Chi 幫我們繪圖，Mr. Donald Deneck 幫我們編纂，Mrs Cassie Yonng 與 Mrs Carolyn Clemente 幫我們打字及其他協助。

Santa Barbara, California
Troy, New York

愛斯柏格（Robert Eisberg）
蘭士尼克（Robert Resnick）

譯 序

量子理論的發現，是人類近代文明史上極大的成就之一，量子現象涉及範圍很廣，舉凡，電子、物理、化學、生物……等基本學科或應用學科均須利用量子理論來解釋許多現象。

純粹討論量子現象理論結構的書籍是非常艱深難懂的，但是 Robert Eisberg, Robert Resnick 二氏所寫的量子物理一書便放棄了這種困難而複雜的討論，改採較為觀念性的介紹，同時也強調一些量子現象理論上的重點，所以這本書極適合一般初學量子物理的讀者採用。

我們覺得這本好書對理工學院的學生幫助極大，目前採用本書作教材的科、系也很多。爲使各位讀者能更深入瞭解原書意義，爲使這本好書能更普及，我們花了整整十個月的時間將此書譯爲中文，經過一再校正及復漢出版社的全力支持、協助，此書中文譯本才得以完成，我們除了感激所有幫助我們完成翻譯工作的人以外，並希望讀者給我們批評、指正！

譯者 單溥，陳自強，黃棟洲

67年2月20日

量子物理學（上册）

目 次

第 一 章	熱輻射與蒲朗克假說.....	1
第 二 章	光子——輻射的質點性.....	29
第 三 章	德布拉里假說——質點之波性質.....	63
第 四 章	原子的波爾模型.....	99
第 五 章	量子力學的薛丁格理論.....	147
第 六 章	不隨時變的薛丁格方程式解.....	213
第 七 章	單電子原子.....	279
第 八 章	磁偶極矩，自旋及躍遷率.....	327
第 九 章	多電子原子——基態與X射線激發.....	373

量子物理學 (下冊)

目 次

第 十 章	多電子原子——光學激發.....	425
第 十一 章	量子統計學.....	459
第 十二 章	分 子.....	515
第 十三 章	固體——導體與半導體.....	517
第 十四 章	固體——超導體及磁性.....	587
第 十五 章	核之模型.....	613
第 十六 章	原子核衰變與核反應.....	667
第 十七 章	基本粒子.....	741
附 錄 A	特殊相對論.....	795
附 錄 B	加速電荷的軸射.....	813
附 錄 C	波茲曼分佈.....	817
附 錄 D	拉瑟福散射軌跡.....	823
附 錄 E	複 數.....	827
附 錄 F	在方阱位能內與時間無關的薛丁格方程式之數值 解.....	831
附 錄 G	方阱位能內與時間無關之薛丁格方程式的分析解 法.....	837
附 錄 H	簡諧震盪位能之與時間無關之薛丁格方程式的級 數解.....	845
附 錄 I	在球座標中的拉普拉斯及角動量算符.....	853
附 錄 J	湯姆遜進動.....	857
附 錄 K	互斥原理在LS 耦合的運用.....	861

熱輻射與蒲朗克假說

Thermal Radiation and Planck's Postulate

1 - 1	緒論 Introduction	3
	舊量子論；量子物理與古典物理間的關係；蒲朗克常數所扮演的角色	
1 - 2	熱輻射 Thermal Radiation	3
	熱輻射的性質；黑體；光輻射量；分佈函數輻射量；史蒂芬定律；史蒂芬 - 波茲曼常數；維恩定律；空穴輻射；能量密度；克希荷夫定律	
1 - 3	空穴輻射的古典理論 Classical Theory of Cavity Radiation ...	8
	空穴中的電磁波；駐波；計算容許頻率；能量均分；波茲曼常數；雷利 - 珍斯光譜	
1 - 4	空穴輻射的蒲朗克理論 Planck's Theory of Cavity Radiation ..	15
	波茲曼分佈；不連續能量；每均分性之矛盾；蒲朗克常數；蒲朗克光譜	
1 - 5	蒲朗克輻射律在量熱學上的應用 The Use of Planck's Radiation Law in Thermometry	22
	光度計；宇宙 3°K 輻射與霹靂理論	
1 - 6	蒲朗克假說及其蘊含 Planck's Postulate and Its Implications	23

假說的一般性陳述；量子化能量；量子狀態；量子數；巨視單擺

1-7 簡述量子歷史 A Bit of Quantum History25

蒲朗克的原始工作；希望使量子化與古典物理協調一致

問題..... 25

習題..... 26

熱輻射與蒲朗克假說

Thermal Radiation and Planck's Postulate

1-1 緒論 Introduction

1900年12月14日，馬克思·蒲朗克（Max planck）在德國物理學會的一次會議中宣讀了一篇報告：“正則光譜能量分佈率的理論”。這篇起先並不太引人注目的論文，却是日後物理革命的開始，雖然等了25年以後才有了正式的近代量子力學，但是仍然把宣讀這篇論文的那一天當做量子物理的誕生日，而我們現在所熟知的量子力學，却是由薛丁格（Schroedinger）及其他人所推衍出來。有很多種不同的途徑以得到我們現在所熟知的事實，而每一種都顯示了古典物理在某一方面的失敗，在此章以及隨後的三章裏面，我們將討論俗謂的古典量子理論，而由此導出近代量子力學，我們將討論的實驗現象，包括力學、熱動學、統計力學以及電磁學，每一種都一再地證明了古典定律的矛盾，而由量子觀念為出發點，解決了這些矛盾，由此證明了我們需要以量子力學來解釋已知的物理現象。為了使讀者對從第五章開始講起的量子力學能夠有更深入的了解，所以我們現在先學習古典量子理論。

由於相對論的存在，（將在附錄A裏給予簡短的討論）我們可以把量子物理當作古典物理的推廣，就像相對論把物理定律推廣到更高運動速度的範圍。同樣地，量子物理的應用範圍也可以擴大到微觀尺度，光速 C 是相對論裏面的基本常數，而蒲朗克常數 h 却是量子物理裏面的基本常數，此常數第一次出現在蒲朗克於1900年所發表的那篇論文裏，所以我們現在開始討論熱輻射（Thermal radiation）由此我們可以得到蒲朗克常數，以及量子物理裏最重要的觀念：能量的不連續。我們也將發現熱輻射理論的重要性，
 *2例如：在天文物理裏面，此種現象可以決定各種宇宙起源論的正誤。

1-2 熱輻射 Thermal Radiation

我們將一物體的各種溫度所釋放出來的輻射能稱為熱輻射，所有的物體

*1：此推涵蓋著古典定律為其特例。

*2：一物體由於其溫度而釋放。

都釋放此種輻射能於外界，也自外界吸收此種輻射，如果一個物體比它的外界熱，它就會因為釋放出來的能量比所吸收的能量多而變冷，當熱平衡的時候，熱的吸收率和放射率一樣。

物質在凝結的狀態（如：固體或液體），所釋放出來的熱輻射將是連續光譜。此種光譜的性質幾乎和此光譜是由何種物質所釋放沒有關係。但却和溫度有密切的關係。在正常溫度下，大多數的物質之所以能被我們看到，並不是因為它們所輻射出來的光，而是因為它們所反射出來的光。假如沒有光照射它們的話，我們就看不到它們了，但是在高溫下，物體却能自己發光，在暗室裏，我們將看到它們呈熾熱狀態，然而即使在數千度K的溫度下，仍有90%以上的輻射是我們所看不到的，它們大都屬於電磁能譜的紅外光部份，所以自己發光的物體都是非常熱的。

例如：我們把一根鐵針擺在火裏加到很高的溫度，而且在各種不同的溫度裏觀察，我們將會發現在一個比較低的溫度裏它祇有輻射熱，但却看不出它很熱，假如溫度愈來愈高，我們將會發現此鐵針所釋放出來的輻射量增加得愈來愈快，而且可視現象愈來愈顯著。這個鐵針先是暗紅色，然後鮮紅，在很高的溫度下就變成藍白色。所以溫度愈高物體所釋放出的熱輻射越多，且其頻率越高。

我們可以利用上述現象製造一種Optical Pyrometer，如果我們能觀察到一個物體熱輻射的顏色或者構成此種輻射的頻率，我們就可以應用此儀器來測量這個熱體的溫度，而我們眼睛所看到的顏色是呈現在熱輻射連續光譜的可見光區域。例如：木炭、燈絲以及太陽。

一般來說，熱輻射光譜的細微性質仍和構成熱體的物質組成有關。但是實驗者却證明有一類物體所釋放出來的輻射光譜具有一種通性，此種物體稱作黑體（Black body）照射在此種物體表面的熱輻射全部被其吸收，因為此種物體不反射任何光譜而成黑色，故稱為黑體。例如：將一物體覆以一層如燈之煤烟等黑色顏料，即構成一黑體。不論組成物質為何，所有黑體在相同的溫度所釋放出來的熱輻射都具有相同的光譜，此事實可由古典熱動平衡的理論得到證實，但是此光譜的特殊形式却無法由古典熱力學的理論而求出，由於黑體輻射的共通性使得物理學家對它們產生特殊的理論興趣，並且尋求此種光譜的解釋。

黑體輻射的光譜分佈由 $R_T(\nu)$ ，光輻射量（spectral radiancy）所定義的，而 $R_T(\nu)d\nu$ 則等於在絕對溫度 T 時每單位面積單位時間所釋放出來的熱輻射的能量，而其頻率介於 ν 到 $\nu + d\nu$ 之間在1899年，Lummer &

Pringsherim第一次對於此種能量作了精確的度量，他們應用一種類似於菱鏡光度計的儀器。但爲了使低頻率的熱輻射亦能透過，把鏡片與菱鏡都改用比較特殊的物質，其結果如圖 1-1。

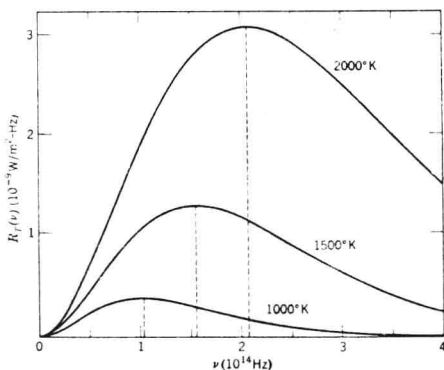


圖 1-1：將黑體輻射的光輻射量當作輻射頻率的函數，對應於不同的溫度 1000°K，1500°K，2000°K 所做的圖，注意最強輻射發生的頻率隨著溫度的增加而線性的增加，每平方尺的輻射總能量隨著溫度急速的增加。

在物理裏面，分佈函數 (distribution function) 的觀念非常重要，例如：馬克思·威爾速率分佈函數 (Maxwellian speed distribution function) (與圖 1-1 的某條曲線非常類似)，告訴我們在固定的壓力與溫度下氣體分子如何依其速率而分佈，另外一個分佈函數的例子就是輻射活性的原子核衰變時間的分佈。

以圖 1-1 對應於 1000°K 的黑體輻射的輻射量分佈函數告訴我們：(1) 當頻率遠小於 10^{14} Hz 時，在某一個頻率範圍 $d\nu$ 內所輻射出來的能量非常小，當 ν 趨近於 0 時，輻射強度也趨近於 0。(2) 當 ν 由非常低的值增加時，在 $d\nu$ 範圍內的輻射強度也迅速增加。(3) 當 $\nu \approx 1.1 \times 10^{14}$ Hz 輻射強度爲最大，亦即輻射能量在此頻率最密。(4) 頻率高於 $\approx 1.1 \times 10^{14}$ Hz 輻射強度隨着 ν 增加而緩慢地連續減低，而當 $\nu \approx \infty$ 時，輻射強度等於 0。

而對應於溫度等於 1500°K 與 2000°K 的曲線告訴我們：(5) 發生輻射能量最密的頻率隨着溫度的增加而增加，由觀察可知此增加量是隨着溫度成線性增加。(6) 對所有頻率熱輻射的總和隨着溫度的增加而增加，且其增加的速度比線性增加要快，在某一特殊溫度下輻射能量的總和可由此曲線下的面積 $\int_0^\infty R_T(\nu) d\nu$ 求得，因爲 $R_T(\nu) d\nu$ 是頻率由 ν 到 $\nu + d\nu$ 之間的輻射強度。

光輻射量 $R_T(\nu)$ 在所有 ν 範圍內的積分即代表此一黑體在溫度 T 時單位面積單位時間所釋放出的總能量，稱做輻射量 (radiancy) R_T ，亦即

$$R_T = \int_0^{\infty} R_T(\nu) d\nu \quad (1-1)$$

由前面關於圖 1-1 的討論中可以知道， R_T 隨溫度的增加而迅速增加，事實上，此敘述即為史蒂芬定律 (Stefan's law)，於 1879 年由實驗而得到的方程式：

$$R_T = \sigma T^4 \quad (1-2)$$

$$\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$$

σ 為史蒂芬-波茲曼常數 (Stefan-Boltzman constant)。由圖 1-1 中亦可得知，當 T 增加時，能譜向更高頻率處偏移，此結果即為維恩位移定律 (Wien's displacement law)：

$$\nu_{\max} \propto T \quad (1-3a)$$

$\nu_{\max}$ 代表當 T 時， $R_T(\nu)$ 具有極大值時的頻率 ν ，而當 T 增加時， $\nu_{\max}$ 偏向於更高頻率處。所有的這些結果都和前面的實驗經驗相符合，例如：熱輻射量隨溫度之增加而急遽增加 (鐵棒在更高溫度時輻射出更多的能量)，此輻射的主要頻率 (principle frequency) 在 T 增加時變得更高 (鐵棒的顏色由暗紅色轉變為藍紅色)。

現再考慮另一個黑體的例子，此例對吾人而言深具重要性。假設一物體的內部有一空穴，此空穴僅藉一小洞與外界相通，如圖 1-2。外界經由此小洞而射入此空穴的輻射，在此空穴的周壁間來回反射，最後終被這些周壁吸收。若此小洞的大小和穴內的面積相比是很小的話，則僅有一點點可忽略的入射輻射再經由此小洞反射出去，而原則上可假設這些入射輻射通通被吸收了，所以這個「洞」必定具有了黑體表面所該有的性質。在實驗室中的多數黑體皆由此原則製成。

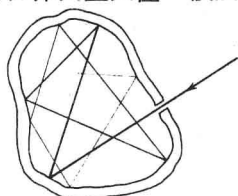


圖 1-2 物體內一空穴藉著一小洞與外界聯通，入射在洞上的輻射經穴內壁上的數次反射後完全被吸收。此洞即類似一黑體。相反的過程中離開洞的輻射係由穴之內側表面所提供，此洞即似黑體。

現在假設此空穴的周壁被均勻的加熱至溫度 T ，則此周壁將釋放出熱輻射並充滿此空穴，一小部分射至洞上的輻射將會穿過此洞而至外界，故此又是一個熱輻射的釋放者。因為此洞必須具有黑體表面的性質，所以它輻射出的能譜必是和黑體輻射相同的能譜，但此洞只是穴內輻射的一個代表，故穴內的整個輻射必也是黑體輻射，而事實上，此穴內的輻射即具有一個溫度為 T 時黑體輻射的特性，因為在此系統內， T 是唯一被定義的溫度。由此一小洞所釋放出的能譜則由 energy flux $R_T(\nu)$ 所定義。但我們亦可將此空穴內的輻射能譜，稱作空穴輻射 (cavity radiation) 改由能量密度 (energy density) $\rho_T(\nu)$ 所定義，而 $\rho_T(\nu)$ 之意義為：在溫度 T 時，此空穴中單位體積內所包含的頻率，介於 $\nu, \nu + d\nu$ 之間的能量。顯然，此二量互成比例：

$$\rho_T(\nu) \propto R_T(\nu) \quad (1-4)$$

所以在相同的溫度 T 時，一個黑體的輻射能譜和一空穴內的輻射能譜具有相同的特性。所以有關於黑體理論的討論，即可完全以空穴模型來討論。
例 1-1 .. (a) 因為 $\lambda\nu = c$ ，所以 (1-3a) 亦可改成下列形式：

$$\lambda_{\max} T = \text{const} \quad (1-3b)$$

此處 $\lambda_{\max}$ 為在某溫度 T 時 $R_T(\nu)$ 具有極大值時的波長。維恩位移常數的實驗值為 $2.898 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot ^\circ\text{K}$ 。如果我們假設星星的表面是一個黑體，則由度量 $\lambda_{\max}$ ，即可估計出此星星的溫度。例如，對太陽而言， $\lambda_{\max} = 5100 \text{ \AA}$ ，對北極星而言 $\lambda_{\max} = 3500 \text{ \AA}$ ，試求此二星的表面溫度。

對太陽而言， $T = 2.898 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot ^\circ\text{K} / 5100 \times 10^{-10} \text{ m} = 5700^\circ\text{K}$ ，而北極星， $T = 2.898 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot ^\circ\text{K} / 3500 \times 10^{-10} \text{ m} = 8300^\circ\text{K}$

在 5700°K 時，太陽表面的輻射接近於大部分輻射都屬於可見光範圍的輻射；這使我們聯想到很可能在人類進化史上，我們的眼睛已對太陽輻射能特別敏感。

(b) 用史蒂芬定律，(1-2) 即(a)之結果，試求星星表面上 1 cm^2 之面積所輻射出之能量。

$$\begin{aligned} \text{太陽: } R_T &= \sigma T^4 = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{K}^4 \times (5700^\circ\text{K})^4 \\ &= 5.90 \times 10^7 \text{ W/m}^2 \simeq 6000 \text{ W/cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{北極星: } R_T &= \sigma T^4 = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{K}^4 \times (8300^\circ\text{K})^4 \\ &= 2.71 \times 10^8 \text{ W/m}^2 \simeq 27000 \text{ W/cm}^2 \end{aligned}$$

例 1-2. 有二不透明的小物體，由細絲綫支持而相距很遠的擺在一個很大的真空覆體內，而此覆體為不透明且溫度為 T 。在此情形下，此物體和壁面僅能靠輻射的形式以交換能量。令 e 代表物體的輻射率， a 代表吸收率，試證明在平衡時：

$$\frac{e_1}{a_1} = \frac{e_2}{a_2} = 1 \quad (1-5)$$

(1-5) 式即為克希荷夫輻射律 (Kirchhoff's law for radiation)

在平衡時，此覆蓋系統內的溫度皆相同，而在此情形下，任一物體的熱輻射吸收率及輻射率必須相等，所以，

$$e_1 = a_1, \quad e_2 = a_2,$$

故

$$\frac{e_1}{a_1} = 1 = \frac{e_2}{a_2}$$

假如某一物體，例如 2，是一黑體，則因黑體的吸收率要比非黑體之吸收率好，所以 $a_2 > a_1$ ，故 $e_2 > e_1$ ，由實驗的事實亦知，好的吸收者必為好的放射者。

1-3 空穴輻射的古典理論

Classical Theory of Cavity Radiation

二十世紀初期，雷利和珍斯對空穴（黑體）輻射的能量密度做一計算後發現，由古典理論所得的結果和實驗結果有一個嚴重的矛盾。而後面所將討論的一些計算亦展示了此種情形，此處，我們將詳細討論並先述其一般步驟。

若一具有金屬壁的空穴被均勻的加熱至溫度 T ，則此壁將輻射出熱能，我們已熟知此熱能係因金屬內電子由熱激動所引起的加速運動而輻射出。（看附錄 B）現在主要是討論此空穴內電磁波的行為。雷利和珍斯之步驟如下：第一，古典電磁理論告訴我們此空穴內的輻射必是以駐波的形式存在，而其節點（node）就在金屬壁上。用幾何論證，可求出在 ν 及 $\nu + d\nu$ 範圍內的駐波數目與 ν 的關係。則在熱平衡時，可用古典動力論求出這些駐波的平均總能量。而在古典理論中，總能量僅和 T 有關。在某一頻率範圍內的駐波數目乘以這些波的平均能量再除此空穴的體積，即可求得在此一頻率範

圍內單位體積所包含的能量。此即為 $\rho_T(\nu)$ 。

爲簡單起見，假設充滿電磁輻射的金屬壁空穴，其形狀爲每邊長 a 的正立方體，如圖 1-3。於是輻射在壁間來回反射，可將其沿著腔緣方向；因分成三個互相垂直的分量來分析，因每對壁互相平行，三分量互不混淆而可分別處理。現先考慮 x 分量，並以其中一面金屬壁上取爲 $x = 0$ 。此分量的所有輻射到壁上的都被反彈回來，而入射和反射波即形成駐波。今因電磁波的電場向量 E 爲垂直於傳播方向的橫向振動，又因此分量的傳播方向垂直射於腔壁上，故其 E 與壁平行。但金屬壁對於平行於表面的電場無法抗持，因此恒有電荷流動，以造成一個電場來中和外來的電場，故此分量的 E 在壁上之值恒等於 0，即 x 分量的輻射駐波在 $x = 0$ 處必有節點。又在

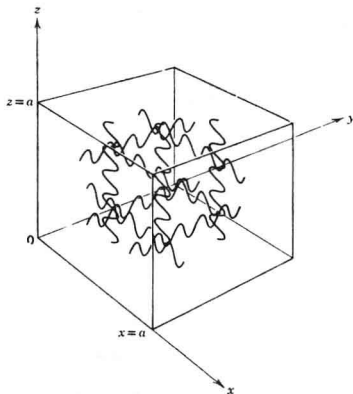


圖 1-3 一金屬製成之立方空穴內充滿電磁波，示出此輻射在壁間來回振動時三個互不干涉的分量。

$x = a$ 處亦應有節點，此因該處對應一金屬壁而亦不能有電場之故，應用同樣的討論可知， y 分量在 $y = 0$ 和 $y = a$ 處之駐波亦有節點，而 $z = 0$ ， $z = a$ 處之 z 分量駐波亦有節點。這些條件限制了空穴內電磁輻射可能具有的波長，亦即，頻率亦受限制。

現在我們設法求波長介於 λ 至 $\lambda + d\lambda$ 且節點在空穴面上駐波的數目。爲了能將注意力集中於計算過程中的觀念上，我們先考慮 x 分量，亦即人工化的“1-維空穴”且其長爲 a 。一當我們求得此情形下之解，則將結果推廣至 3-維空穴的方法是顯然易見的。

一維電磁駐波的電場可用下一數學函數描述：

$$E(x, t) = E_0 \sin(2\pi x/\lambda) \sin(2\pi \nu t) \quad (1-6)$$

λ 爲此波之波長， ν 爲其頻率， E_0 爲其最大振幅。且

$$\nu = c/\lambda \quad (1-7)$$

c 爲電磁波的傳播速度。(1-6) 式代表一個具有振幅隨空間成正弦變化

$\sin(2\pi x/\lambda)$ 及隨時間以頻率 ν 振動的波，若位置滿足下式：

$$2x/\lambda = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1-8)$$

則振幅在任何時間都顯然為 0，即，此時為一駐波。因為在一維空穴內，此波在兩端點都得具有節點，我們以 x 軸的原點為此空穴的一端點，而另一端點 ($x = a$) 必滿足：

$$x = a \text{ 時} \quad 2x/\lambda = n \quad (1-9)$$

而

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

這個條件決定了被允許的特定波長 λ 。對於這些容許值，這些駐波的振幅圖形具有如圖 1-4 的樣子。這些圖形亦可形容為由一個兩端固定的振動繩所形成。此一真實的物理系統亦滿足 (1-6) 式。而在此處，這圖樣却代表電磁駐波。

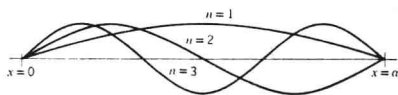


圖 1-4：介於二壁 $x=0$ ， $x=a$ 中的一維空穴的駐波振幅的圖形，此處僅列出前三個值。

若以容許頻率為基礎來繼續討論將比用容許波長方便的多。這些頻率為 $\nu = c/\lambda$ ，而 $2a/\lambda = n$ ，亦即

$$\nu = cn/2a, \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (1-10)$$

對於這些容許的頻率值，我們可以把他們畫一個坐標軸線上，每一個整數 n 對應於軸綫上的一點。所以在這個圖形上，對應於某一個 n 的容許頻率就等於 $\frac{c}{2a}$ 乘上由原點到此點的距離 d ，或者， d 等於 $2a/c \times \nu$ 。這些關係可由圖 1-5 中看出。計算在 ν 及 $\nu + d\nu$ 中的容許頻率值的時候，這個圖形非常有用，而 $N(\nu)d\nu$ 則定義為 ν 及 $\nu + d\nu$ 之間的容許頻率的數目。在求此值時，我們僅須計算數軸上對應於 ν 及 $\nu + d\nu$ 二點之間的點即可，而因這些點是均勻分佈在此數軸，所以介於二端點之間的點僅正比於 $d\nu$ ，而