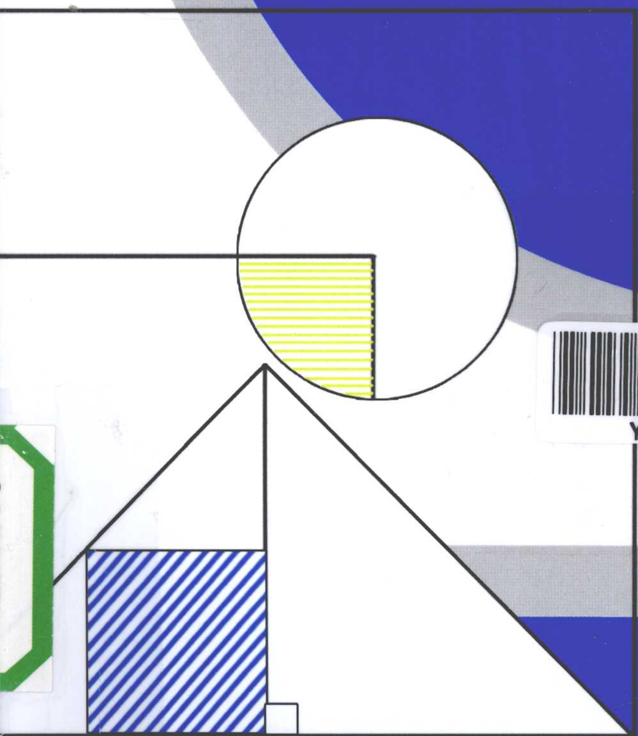
读书是最美的姿态 Reading is most graceful

总策划：毛文凤 教育学博士后

同步培优

PEIYOUXINKETANG

新课堂



数学

9年级

吉林出版集团有限责任公司

总策划:毛文凤 教育学博士后

同步培优

PEIYOUXINKETANG

新课堂

九年级

数 学

吉林出版集团有限责任公司

图书在版编目(CIP)数据

同步培优新课堂. 九年级数学 / 《同步培优新课堂》编写组主编. —长春：吉林出版集团有限责任公司，2011.5

ISBN 978-7-5463-4821-6

Ⅰ.①同… Ⅱ.①同… Ⅲ.①中学数学课—初中—教学参考资料 Ⅳ.①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 068327 号

同步培优新课堂 九年级数学

主　　编 本书编写组
出 版 人 毛文凤
责任编辑 李敏芳
责任校对 戴耀萍
封面设计 猫头鹰工作室
开　　本 787mm×1092mm 1/16
字　　数 160 千字
印　　张 12
版　　次 2011 年 5 月第 1 版
印　　次 2011 年 5 月第 1 次印刷

出　　版 吉林出版集团有限责任公司
(长春市人民大街 4646 号 邮编:130021)
发　　行 江苏可一出版物发行集团有限公司
(南京市山西路 67 号世贸中心 4 楼 邮编:210009)
电　　话 总编办:0431-85600386
市场部:025-66989810
网　　址 www.keyigroup.com
印　　刷 南京玄武湖印刷实业有限公司

ISBN 978-7-5463-4821-6　　定价:20.00 元

前　言

我国著名的心理学家朱智贤、林崇德说过："培养学生良好的思维品质是发展思维能力的突破口；是提高教育质量，减轻学生负担的好途径；是应试教育向素质教育转轨的一项重要任务。""新课程标准"也明确指出：中学数学教学要有意识地培养学生良好的思维品质。

正因为如此，我们聘请多年在一线教学工作岗位的特高级教师，根据教育部颁布的新课标的要求，编写了这套《同步培优新课堂》，目的是让学生们在学习本数学专题时对这部分知识内容有深刻的理解和掌握。

本套丛书共分三册，可供中学阶段不同年级师生使用。为了便于学生自学和家长指导，每一章节分为"知识链接"、"典例精讲"、"学力训练"三个部分，"名师技法"贯穿全书，意在介绍各种思维方式与解题技巧，指导学生打开思路，帮助学生提升能力，体现"培优"精髓。可满足各年级不同能力学生的学习需要。

本套丛书兼顾不同版本教材学生的需要，在编写中体现了以下几个方面的特点：

一、源于课标、高于教材。　本丛书注重体现新课程理念，源于教材，又高于教材。

二、阶梯提升，便于自学。　本丛书坚持由浅入深的原则，由典型例题入手，归纳整理解题思路，透析解题过程，点拨解题技巧，总结思维规律。

三、边学边练，举一反三。　本丛书每个典型例题后均配有习题若干，演练结合，便于学生活学活用，举一反三。在数学这门学科中，知识的各个部分是有关联的，但各知识点都有自己的特征。因此，在学习过程中，数学各专题知识独特的规律就需要学生们细心把握。

为使广大读者更方便地使用本书，本书按从易到难的梯度编写，这样，对本专题知识没有吃透的学生就可以迅速掌握本专题的知识；中等水平的学生在精读本书提高篇后会使自己更上一层楼；优秀的学生可以通过竞赛入门篇的训练使自已处在更高的水平。

充分阅读本书，通过这种阶梯式的训练，任何学生都能迅速有效地掌握各章节的内容，从而达到有效并熟练地掌握知识的目的。

丛书编委会

目　　录

第1讲 数据的离散程度

方差、极差、标准差都是反映数据离散程度的量，全面理解、掌握它们的用法，应从以下方面入手：

一 知识链接 透彻理解数学概念，提升你的数学内涵！

(1)用一组数据的最大值减去最小值所得的差来反映这组数据的变化范围，用这种方法所得到的差就叫做极差，极差是用来反映一组数据变化范围大小和刻画数据离散程度的一个统计量.

(2)极差的计算公式为：极差＝最大值－最小值.

(3)极差仅仅只表示一组数据变化范围的大小，只对数据两个极端值最为敏感，它为数据分组提供依据，而不能表示其他更多的意义.

(4)方差是一组数据中各数据与平均数之差的平方的平均数，其计算步骤为："先平均，再求差，然后平方，最后再平均". 求出的方差再开平方，这就是标准差. 方差刻画了一组数据的波动情况，方差越大，波动越大，即稳定性越差；方差越小，波动越小，即稳定性越好.

(5)计算公式为：$S^2=\frac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]$，其中"$\overline{x}$"表示一组数据的平均数，"$x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$"表示各个数据.

(6)方差是用来描述一组数据波动情况的特征数，常常用来比较两组数据的波动大小，方差较大波动较大，方差较小波动较小，通常可以用样本方差来估计总体方差的方法去考察数据总体的波动情况.

(7)标准差

在计算方差的过程中，可以看出方差的数量单位与原数据的单位不一致，在实际应用时常常将求出的方差再开平方，此时得到的量为这组数据的标准差.

即标准差＝$\sqrt{方差}$.

(8)方差和标准差都是用来描述一组数据波动情况的量，常用来比较两组数据的波动大小. 两组数据中极差大的那一组并不一定方差也大. 在实际问题中有时用到标准差，是因为标准差的单位和原数据的单位一致，且能缓解方差过大或过小的现象.

(9)方差性质1：若一组实数的方差为零，则该组数据均相等，且都等于该组数据的平均数.

方差性质2：将数据$x_1,x_2,x_3\cdots,x_n$都同时减去一个常数，得到一组新数据$x'_1,x'_2,x'_3,\cdots,x'_n$，记原数据的方差为$S^2$，新数据的方差为$S'^2$，则$S^2=S'^2$.

方差性质3：若一组数据$x_1,x_2,\cdots,x_n$的平均数为$\overline{x}$，方差为S^2，则新数据$mx_1+p,mx_2+p,\cdots,mx_n+p$的平均数为$m\overline{x}+p$，方差为$m^2S^2$.

方差性质4：任何一组实数的方差都是非负实数.

典例精讲 参与数学解题过程，品味数学内在魅力！

例1 从甲、乙两种玉米苗中各抽10株，分别测得它们的株高如下：(单位:cm)

甲:21 42 39 14 19 22 37 41 40 25

乙:27 16 40 16 16 44 40 40 27 44

(1)根据以上数据分别求甲、乙两种玉米的极差、方差；

(2)哪种玉米的苗长得高？

(3)哪种玉米的苗长得齐？

【分析】 本题既是一道和极差、方差计算有关的问题，又是一道利用方差解决实际问题的题目.要求极差，只要用数据中最大值减去最小值，求到差值即可.利用方差的计算公式可以求得方差.

【解】 甲的极差：42－14＝28(cm)，

乙的极差:44－16＝28(cm).

甲的平均值：

$\overline{x}_甲=\frac{1}{10}(21+42+39+14+19+22+37+41+40+25)=30(\text{cm})$，

乙的平均值：

$\overline{x}_乙=\frac{1}{10}(27+16+40+16+16+44+40+40+27+44)=31(\text{cm})$.

甲的方差：

$S_甲^2=\frac{(21-30)^2+(42-30)^2+\cdots+(25-30)^2}{10}=104.2(\text{cm}^2)$，

乙的方差：

$S_乙^2=\frac{(27-31)^2+(16-31)^2+\cdots+(44-31)^2}{10}=128.8(\text{cm}^2)$.

(2)因为甲种玉米的平均高度小于乙种玉米的平均高度，所以乙种玉米的苗长得高.

(3)因为 $S_甲^2<S_乙^2$，所以甲种玉米的苗长得整齐.

【技巧提升】 判断玉米苗生长得整齐与否就是看数据的方差.

例2 市体校准备挑选一名跳高运动员参加全市中学生运动会，对跳高运动队的甲、乙两名运动员进行了8次选拔比赛.他们的成绩(单位:m)如下：

甲:1.70 1.65 1.68 1.69 1.72 1.73 1.68 1.67

乙:1.60 1.73 1.72 1.61 1.62 1.71 1.70 1.75

(1)甲、乙两名运动员的跳高平均成绩分别是多少？

(2)哪位运动员的成绩更为稳定？

(3)若预测，跳过1.65 m就很可能获得冠军，该校为了获得冠军，可能选哪位运动员参赛？若预测跳过1.70 m才能得冠军呢？

【分析】 本题是一道与数据分析有关的实际问题，主要考查数据的平均数、方差的计算方法及处理数据的能力.根据平均数及方差的计算公式可得.

【解】 (1)$\overline{x}_甲=\frac{1}{8}(1.70+1.65+\cdots+1.67)=1.69(\text{m})$，

$\bar{x}_乙=\frac{1}{8}(1.60+1.73+\cdots+1.75)=1.68(m)$.

(2)$S^2_甲=\frac{1}{8}[(1.70-1.69)^2+(1.65-1.69)^2+\cdots+(1.67-1.69)^2]=0.0006(m^2)$,

$S^2_乙=\frac{1}{8}[(1.60-1.68)^2+(1.73-1.68)^2+\cdots+(1.75-1.68)^2]=0.0035(m^2)$,

因为 $S^2_甲<S^2_乙$,所以甲的成绩稳定.

(3)可能选甲参加,因为甲 8 次成绩都跳过 1.65 m 而乙有 3 次低于 1.65 m;可能选乙参加,因为甲仅 3 次跳过 1.70 m,而乙有 5 次跳过 1.70 m.

【技巧提升】 看谁的成绩更稳定主要看谁的成绩的方差较小.

例 3 甲、乙两班各有 8 名学生参加数学竞赛,成绩如下:

甲班	65	74	70	80	65	66	69	71
乙班	60	75	78	61	80	62	65	79

请比较两个班学生成绩的优劣.

【分析】 评价成绩的优劣不能只从一个方面讨论,应从多方面考虑.

【解】 首先计算两个班学生的平均成绩和方差,$\bar{x}_甲=\frac{1}{8}(65+74+\cdots+71)=70$,$\bar{x}_乙=(60+75+\cdots+79)=70$,$S^2_甲=23$,$S^2_乙=67.5$.从平均成绩看,甲、乙两班的成绩相同,但 $S^2_甲<S^2_乙$,一般认为甲班的成绩更稳定,好于乙班.就这个实际问题,方差不应作为评判成绩优劣的指标.就此题而言,平均成绩相同,再比较高分情况或优秀率(75 分以上为优秀).高分情况:如 80 分都是一人,持平;75 分以上(含 75 分)甲班为 1 人,乙班为 4 人,乙班优于甲班;优秀率:甲为 12.5%,乙为 50%,乙班优于甲班.从这个角度来评价两班成绩的优劣才是客观的、准确的.

【技巧提升】 综上所述,并不能说方差小了就好,而要具体问题具体分析.把方差大小作为评判成绩好坏的标准,这是对方差概念的误解,方差只是反映一组数据的波动大小情况,至于波动大了好还是波动小了好,亦即方差大了好还是方差小了好,那要看这组数据所反映的实际问题.

例 4 一组数据的方差为 S^2,将该组数据中的每一个数据都乘 2,所得到的一组新数据的方差为 ( )

A. S^2 B. $4S^2$ C. $2S^2$ D. $\frac{1}{4}S^2$

【分析】 根据方差的性质 3 可得.

【解】 若一组数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的平均数为 $\bar{x}$,方差为 S^2,则新数据 $mx_1+p,mx_2+p,\cdots,mx_n+p$ 的平均数为 $m\bar{x}+p$,方差为 m^2S^2.该数据都乘 2,所以方差是原方差的 4 倍,故选 B.

【技巧提升】 牢记方差的四个性质是解决问题的关键.

例 5 已知 $x+y=8,xy-z^2=16$,求 $x+y+z$ 的值.

【分析】 利用方差的性质 1 和性质 4 能快速解答本题.

【解】 $\because x$、y 的平均数为 $\frac{x+y}{2}=4$,$xy=16+z^2$,

$\therefore x$、y 的方差

$$S^2=\frac{1}{2}[(x-4)^2+(y-4)^2]=\frac{1}{2}[x^2+y^2-8(x+y)+32]$$
$$=\frac{1}{2}[(x+y)^2-2xy-8(x+y)+32]$$
$$=\frac{1}{2}[64-2(16+z^2)-64+32]=-z^2.$$

由性质4,得$-z^2\geqslant0$,$\therefore z^2\leqslant0$. $\therefore z^2=0$,$z=0$. $\therefore S^2=0$. 由性质1,得 $x=y=4$. $\therefore x+y+z=4+4+0=8$.

【技巧提升】 熟记方差的性质会达到事半功倍的效果.

例6 一次期中考试中,A、B、C、D、E五位同学的数学、英语成绩等有关信息如下表所示:(单位:分)

	A	B	C	D	E	平均分	标准差
数学	71	72	69	68	70		$\sqrt{2}$
英语	88	82	94	85	76	85	

(1)求这五位同学在本次考试中数学成绩的平均分和英语成绩的标准差;

(2)为了比较不同学科考试成绩的好与差,采用标准分是一个很好的选择,标准分的计算公式是:标准分=(个人成绩-平均成绩)÷成绩标准差.

从标准分看,标准分大的考试成绩更好,请问A同学在本次考试中,数学与英语哪个学科考得更好?(注:标准差$=\sqrt{方差}$)

【解】 (1)数学成绩的平均分$\bar{x}_{数学}=\frac{1}{5}(71+72+69+68+70)=70$(分).

英语成绩的标准差

$$S_{英语}=\sqrt{\frac{1}{5}[(88-85)^2+(82-85)^2+(94-85)^2+(85-85)^2+(76-85)^2]}=6.$$

(2)设A同学数学成绩的标准分为$P_{数学}$,英语成绩的标准分为$P_{英语}$,则$P_{数学}=(71-70)\div\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$;$P_{英语}=(88-85)\div6=\frac{1}{2}$. 因为$P_{数学}>P_{英语}$,所以从标准分来看,A同学的数学比英语考得更好.

例7 姚明是我国著名的篮球运动员,他在2010~2011赛季NBA常规赛中表现非常优异.下面是他在这个赛季中,分别与"超音速"队和"快船"队各四场比赛中的技术统计.

场次	对阵"超音速"			对阵"快船"		
	得分	篮板	失误	得分	篮板	失误
第一场	22	10	2	25	17	2
第二场	29	10	2	29	15	0
第三场	24	14	2	17	12	4
第四场	26	10	5	22	7	2

(1)请分别计算姚明在对阵“超音速”队和“快船”队两队的各四场比赛中，平均每场得多少分.

(2)请你从得分的角度分析，姚明在与“超音速”队和“快船”队的比赛中，对阵哪一个队的发挥更稳定.

(3)如果规定“综合得分”为：平均每场得分×1＋平均每场篮板×1.5＋平均每场失误×(－1.5)，且综合得分越高表现越好. 那么请你利用这种评价方法，来比较姚明在分别与“超音速”队和“快船”队的各四场比赛中，对阵哪一个队表现更好.

【分析】 本题是一道与平均数、方差以及加权平均数的应用有关的实际问题. 根据平均数的计算方法可以计算出在对阵“超音速”队和“快船”队的四场比赛中，各自平均每场得分；要判断对阵哪一队发挥得更稳定，则需要分别计算对阵“超音速”队和“快船”队得分的方差，方差小的成绩稳定.

【解】 (1)姚明在对阵“超音速”队的四场比赛中，平均每场得分为：

$\overline{x}_{超}=\frac{1}{4}(22+29+24+26)=25.25$(分).

在对阵“快船”队的四场比赛中，平均每场得分为：

$\overline{x}_{快}=\frac{1}{4}(25+29+17+22)=23.25$(分).

(2)姚明在对阵“超音速”队的四场比赛中得分的方差为 $S_1^2=6.6875$，

姚明在对阵“快船”队的四场比赛中得分的方差为 $S_2^2=19.1875$.

因为 $S_1^2<S_2^2$，所以姚明在对阵“超音速”队的比赛中发挥更稳定.

(3)设姚明在对阵“超音速”队的四场比赛中的综合得分为 P_1，则：

$P_1=25.25\times1+11\times1.5+\frac{11}{4}\times(-1.5)=37.625$(分).

在对阵“快船”队的四场比赛中的综合得分为 P_2，则：

$P_2=23.25\times1+\frac{51}{4}\times1.5+2\times(-1.5)=39.375$(分).

因为 $P_1<P_2$，所以姚明在对阵“快船”队的比赛中表现更好.

【技巧提升】 由于本题涉及的计算比较多，在解题时除了掌握算术平均数、方差及加权平均数的计算方法，还应注意计算的准确性.

例 8 新星公司到某大学从应届毕业生中招聘公司职员，对应聘者的专业知识、英语水平、参加社会实践与社团活动等三项进行测试或成果认定，三项的得分满分都为 100 分，三项的分数分别按 5∶3∶2 的比例记入每人的最后总分，有 4 位应聘者的得分如下表所示.

项目 / 得分 / 应聘者	专业知识	英语水平	参加社会实践与社团活动等
A	85	85	90
B	85	85	70
C	80	90	70
D	90	90	50

(1)写出4位应聘者的总分;

(2)就表中专业知识、英语水平、参加社会实践与社团活动等三项的得分,分别求出三项中4人所得分数的方差;

(3)由(1)和(2),你对应聘者有何建议?

【分析】 (1)按照比例分别计算出总分;(2)根据方差公式计算出方差;(3)答案不唯一,合理即可.

【解】 (1)应聘者A总分为86分;应聘者B总分为82分;应聘者C总分为81分;应聘者D总分为82分.

(2)4位应聘者的专业知识测试的平均分数$\overline{x_1}=85$,

方差为:$S_1^2=\frac{1}{4}[(85-85)^2+(85-85)^2+(80-85)^2+(90-85)^2]=12.5$.

4位应聘者的英语水平测试的平均分数$\overline{x_2}=87.5$,

方差为:$S_2^2=\frac{1}{4}\times2.5^2\times4=6.25$.

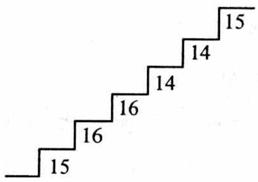
4位应聘者参加社会实践与社团活动等的平均分数$\overline{x_3}=70$,

方差为:$S_3^2=\frac{1}{4}[(90-70)^2+(70-70)^2+(70-70)^2+(50-70)^2]=200$.

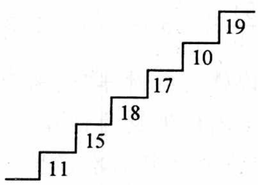
(3)应聘者的专业知识、英语水平的差距不大,但参加社会实践与社团活动等方面的差距较大,影响应聘者的最后成绩,将影响应聘者就业.应聘者不仅应注重自己的文化知识的学习,更应注重社会实践与社团活动的开展,从而促进自身综合素质的提升.

【技巧提升】 评价好坏应从各个方面入手.

例9 在某旅游景区上山的一条小路上,有一些断断续续的台阶,下图是其中甲、乙两段台阶路的示意图.请你用所学过的有关统计知识(平均数、中位数、方差和极差)回答下列问题:



甲路段



乙路段

(1)两段台阶路有哪些相同点和不同点?

(2)哪段台阶路走起来更舒服?为什么?

(3)为方便游客行走,需要重新整修上山的小路,对于这两段台阶路,在台阶数不变的情况下,请你提出合理的整修建议.

【分析】 (1)通过计算可以找到两段台阶的相同点和不同点;(2)哪段台阶路走起来更舒服主要是看两段台阶数量的波动大小,方差越小,波动越小,越稳定.因为甲路段方差小,所以走起来更舒服一些;(3)根据方差越小越好的原则,使方差为0最好,所以每个台阶高度一样最好了.

【解】 (1)$\bar{x}_甲=\frac{1}{6}\times(15+16+16+14+14+15)=15$,$\bar{x}_乙=\frac{1}{6}\times(11+15+18+17+10+$

19)＝15，$S^2_{甲}=\frac{1}{6}\times[(15-15)^2\times2+(14-15)^2\times2+(16-15)^2\times2]=\frac{1}{6}\times4=\frac{2}{3}$，$S^2_{乙}=\frac{1}{6}\times[(19-15)^2+(10-15)^2+(17-15)^2+(18-15)^2+(15-15)^2+(11-15)^2]=\frac{1}{6}\times70=\frac{35}{3}$. 甲路段的极差为：16－14＝2，乙路段的极差为：19－11＝8，所以两段台阶的相同点是：两段台阶路高度的平均数相同；不同点是：两段台阶路高度的中位数、方差和极差均不相同.(2)甲路段走起来更舒服一些，因为它的台阶高度的方差小.(3)每个台阶高度均为 15 cm，使方差为 0.

例 10 已知数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的平均数为 a，方差为 b.

求证：数据 $tx_1,tx_2,\cdots,tx_n$ 的方差为 t^2b.

【分析】 根据方差和平均数的公式证明即可.

【证明】 $tx_1,tx_2,\cdots,tx_n$ 的平均数为：

$$t\bar{x}=\frac{1}{n}(tx_1+tx_2+\cdots+tx_n)=\frac{1}{n}t(x_1+x_2+\cdots+x_n)=ta$$

又 $b=\frac{1}{n}[(x_1-a)^2+(x_2-a)^2+\cdots+(x_n-a)^2]$

∴所求数据的方差为：

$$S'^2=\frac{1}{n}[(tx_1-ta)^2+(tx_2-ta)^2+\cdots+(tx_n-ta)^2]=\frac{1}{n}[t^2(x_1-a)^2+t^2(x_2-a)^2+\cdots+t^2(x_n-a)^2)]=\frac{1}{n}t^2[(x_1-a)^2+(x_2-a)^2+\cdots+(x_n-a)^2)]=t^2b$$

三 学力训练 检测自己能力，体验成功乐趣！

1. 选择题：

(1)有一组数据 3、5、7、a、4，如果它们的平均数是 5，那么这组数据的方差是 (　　)

A. 2　　B. 5　　C. 6　　D. 7

(2)今年 3 月份某周，我市每天的最高气温(单位：℃)为：12，9，10，6，11，12，17，则这组数据的中位数与极差分别是 (　　)

A. 8，11　　B. 8，17

C. 11，11　　D. 11，17

(3)10 名同学分成甲、乙两队进行篮球比赛，他们的身高(单位：cm)如下表所示：

	队员 1	队员 2	队员 3	队员 4	队员 5
甲队	177	176	175	172	175
乙队	170	175	173	174	183

设两队队员身高的平均数依次为 $\bar{x}_{甲}$，$\bar{x}_{乙}$，身高的方差依次为 $S^2_{甲}$，$S^2_{乙}$，则下列关系中完全正确的是 (　　)

A. $\bar{x}_{甲}=\bar{x}_{乙}$，$S^2_{甲}>S^2_{乙}$　　B. $\bar{x}_{甲}=\bar{x}_{乙}$，$S^2_{甲}<S^2_{乙}$

C. $\bar{x}_{甲}>\bar{x}_{乙}$，$S^2_{甲}>S^2_{乙}$　　D. $\bar{x}_{甲}>\bar{x}_{乙}$，$S^2_{甲}<S^2_{乙}$

(4)甲、乙两班举行电脑汉字输入比赛，参赛学生每分钟输入汉字的个数统计结果如下表：

班级	参赛人数	中位数	方差	平均数
甲	55	149	191	135
乙	55	151	110	135

某同学分析上表后得出如下结论：

①甲、乙两班学生成绩平均水平相同；

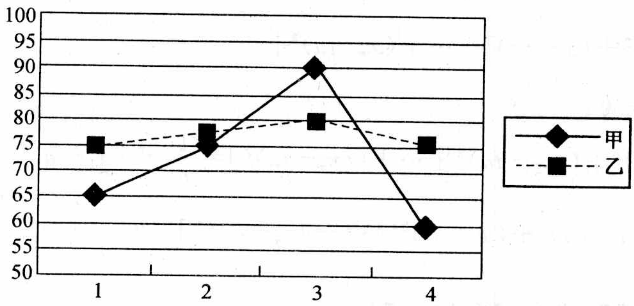
②乙班优秀的人数多于甲班优秀的人数(每分钟输入汉字≥150 个为优秀)；

③甲班成绩的波动比乙班大.

上述结论正确的是 （ ）

A. ①②③　　B. ①②　　C. ①③　　D. ②③

(5)如图是甲、乙两位同学某学期的四次数学考试成绩的折线统计图，则这四次数学考试成绩中 （ ）



A. 乙成绩比甲成绩稳定　　B. 甲成绩比乙成绩稳定

C. 甲、乙两成绩一样稳定　　D. 不能比较两人成绩的稳定性

2. 填空题：

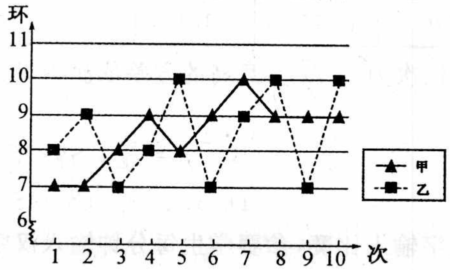
(1)为了考察甲、乙两种小麦的长势，分别从中抽出 20 株测得其高度，并求得它们的方差分别为 $S_{甲}^2=3.6$，$S_{乙}^2=15.8$，则________种小麦的长势比较整齐.

(2)甲、乙两人 5 次射击命中的环数如下：

甲：7　9　8　6　10　　乙：7　8　9　8　8

则这两人 5 次射击命中的环数的平均数 $\overline{x}_{甲}=\overline{x}_{乙}=8$，方差 $S_{甲}^2$________$S_{乙}^2$.(填“>”、“<”或“=”)

(3)如图是甲、乙两射击运动员的 10 次射击训练成绩(环数)的折线统计图，观察图形，甲、乙这 10 次射击成绩的方差 $S_{甲}^2$、$S_{乙}^2$ 之间的大小关系是________.



(4)一组数据有 n 个数，方差为 S^2. 若将每个数据都乘 3，所得到的一组新的数据的方差是________.

3. 某工厂甲、乙两名工人参加操作技能培训. 现分别从他们在培训期间参加的若干次测试成绩中随机抽取 8 次，记录如下：

甲	95	82	88	81	93	79	84	78
乙	83	92	80	95	90	80	85	75

(1)请你计算这两组数据的平均数、中位数；

(2)现要从中选派一人参加操作技能比赛，从统计学的角度考虑，你认为选派哪名工人参加合适？请说明理由.

4. 为了从甲、乙两名同学中选拔一人参加射击比赛，在同等的条件下，教练给甲、乙两名同学安排了一次射击测验，每人打 10 发子弹，下面是甲、乙两人各自的射击情况记录(其中乙的情况记录表上射中 9、10 环的子弹数被墨水污染看不清楚，但是教练记得乙射中 9、10 环的子弹数均不为 0 发)：

甲：

中靶环数	5	6	8	9	10
射中此环的子弹数(单位：发)	4	1	2	2	1

乙：

中靶环数	5	6	7	9	10
射中此环的子弹数(单位：发)	3	1	3		

(1)求甲同学在这次测验中平均每次射中的环数；

(2)根据这次测验的情况，如果你是教练，你认为选谁参加比赛比较合适，并说明理由(结果保留到小数点后第 1 位).

5. 设 m、n、p 均为正实数，且 $m^2+n^2-2p^2=0$，求 $\frac{p}{m+n}$ 的最小值.

6. 已知 $a+b+c=6$，$a^2+b^2+c^2=12$，求 $a+2b+3c$ 的值.

第 2 讲 一元二次方程及其解法

一元二次方程是初中阶段重要的思想方法之一——方程思想，是在学习了一次方程、二元一次方程组基础上的升华，是学习二次函数的基础．全面理解、掌握一元二次方程及其解法，应从以下方面入手：

一 知识链接 透彻理解数学概念，提升你的数学内涵！

(1)形如 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的方程叫一元二次方程，配方法、公式法、因式分解法是解一元二次方程的基本方法．而公式法是解一元二次方程的最普遍、最具有一般性的方法．

(2)一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的实数根，是由它的系数 a,b,c 的值确定的．根公式是：$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}(b^2-4ac\geqslant 0)$．

(3)根的判别式

①实系数方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 有实数根的充分必要条件是：$b^2-4ac\geqslant 0$．

②有理系数方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 有有理数根的判定是：b^2-4ac 是完全平方式$\Leftrightarrow$方程有有理数根．

③整系数方程 $x^2+px+q=0$ 有两个整数根$\Leftrightarrow p^2-4q$ 是整数的平方数．

(4)设 x_1,x_2 是 $ax^2+bx+c=0$ 的两个实数根，那么

①$ax_1^2+bx_1+c=0(a\neq 0,b^2-4ac\geqslant 0)$，$ax_2^2+bx_2+c=0(a\neq 0,\ b^2-4ac\geqslant 0)$；

②$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，$x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}(a\neq 0,b^2-4ac\geqslant 0)$；

③韦达定理：$x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$，$x_1x_2=\dfrac{c}{a}\ (a\neq 0,b^2-4ac\geqslant 0)$．

(5)方程整数根的其他条件

整系数方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 有一个整数根 x_1 的必要条件是：x_1 是 c 的因数．

特殊的例子有：

$c=0\Leftrightarrow x_1=0$，$a+b+c=0\Leftrightarrow x_1=1$，$a-b+c=0\Leftrightarrow x_1=-1$．

二 典例精讲 参与数学解题过程，品味数学内在魅力！

例 1 已知关于 x 的一元二次方程 $(1-2k)x^2-2\sqrt{k+1}x-1=0$ 有两个不相等的实数根，求 k 的值．

【分析】 利用根的判别式确定 k 的取值范围，但不要忽视二次项系数不为零这一条件．

【解】 由题意得 $\Delta=(-2\sqrt{k+1})^2+4(1-2k)>0$，得 $k<2$，又因为 $1-2k\neq 0$，$k+1\geqslant 0$，所以 $k\geqslant -1$ 且 $k\neq\dfrac{1}{2}$，所以，当 $-1\leqslant k<2$，且 $k\neq\dfrac{1}{2}$ 时原方程有两个不相等的实数根．

【技巧提升】 根的判别式是判定一元二次方程根的情况的主要依据，在运用时特别注意二次项系数不为0这一条件.

例2 解方程：$x^2-4|x|+3=0$.

【分析】 本题分两种情况进行讨论：$x\geqslant0$ 和 $x<0$.

【解】 当 $x\geqslant0$ 时，原方程可化为 $x^2-4x+3=0$，解得 $x_1=3,x_2=1$.

当 $x<0$ 时，原方程可化为 $x^2+4x+3=0$，解得 $x_3=-3,x_4=-1$.

故原方程的解有四个：$x_1=3,x_2=1,x_3=-3,x_4=-1$.

【技巧提升】 根据绝对值的意义分两种情况讨论.

例3 已知实数 $a\neq b$，且满足 $(a+1)^2=3-3(a+1)$，$3(b+1)=3-(b+1)^2$，则 $b\sqrt{\dfrac{b}{a}}+a\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 的值为（　　）

A. 23　　B. -23　　C. -2　　D. -13

【分析】 因为 a、b 满足 $(a+1)^2=3-3(a+1)$，$3(b+1)=3-(b+1)^2$. 所以把 a、b 看作是方程 $(x+1)^2+3(x+1)-3=0$ 的两根，利用韦达定理解答.

【解】 $\because a,b$ 是关于 x 的方程 $(x+1)^2+3(x+1)-3=0$ 的两个根，

整理此方程，得 $x^2+5x+1=0$，

$\because \Delta=25-4>0$，$\therefore a+b=-5$，$ab=1$. 故 a、b 均为负数.

因此 $b\sqrt{\dfrac{b}{a}}+a\sqrt{\dfrac{a}{b}}=-\dfrac{b}{a}\sqrt{ab}-\dfrac{a}{b}\sqrt{ab}=-\dfrac{a^2+b^2}{ab}\sqrt{ab}=-\dfrac{(a+b)^2-2ab}{\sqrt{ab}}=-23$. 选 B.

【技巧提升】 设 x_1,x_2 是二次方程的根，则利用根与系数的关系，可以解决诸如 $x_1^k+x_2^k$，$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$，$\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{x_1}{x_2}$ 等问题，但要注意前提条件 $\Delta\geqslant0$. 另外，有的竞赛试题还要求我们自己构造二次方程，如本题构造根为 a、b 的方程 $(x+1)^2+3(x+1)-3=0$，若构造根为 $a+1$，$b+1$ 的方程 $x^2+3x-3=0$ 则过程要多走弯路，读者不妨一试.

例4 若 $M=3x^2-8xy+9y^2-4x+6y+13$（x,y 是实数），则 M 的值一定是（　　）

A. 正数　　B. 负数　　C. 零　　D. 整数

【分析】 利用拆项、重新组合配方，根据非负数的性质判定 M 的值的情况.

【解】 因为 $M=3x^2-8xy+9y^2-4x+6y+13$

$=(2x^2-8xy+8y^2)+(x^2-4x+4)+(y^2+6y+9)$

$=2(x-2y)^2+(x-2)^2+(y+3)^2\geqslant0$，

显然 $x-2y=0$，$x=2$，$y=-3$ 不能同时成立，

所以，$M>0$，选 A.

【技巧提升】 配方是数学竞赛的一项基本功，需要借助一定的拆项、凑配技巧.

例5 已知 a,b 都是正整数，试问关于 x 的方程 $x^2-abx+\dfrac{1}{2}(a+b)=0$ 是否有两个整数解？如果有，请把它们求出来；如果没有，请给出证明.

【分析】 假设方程有两个整数解，然后利用韦达定理及相关知识解答.

【解】 不妨设 $a\leqslant b$，且方程的两个整数根为 $x_1,x_2(x_1\leqslant x_2)$，则有 $\begin{cases}x_1+x_2=ab,\\ x_1x_2=\dfrac{1}{2}(a+b),\end{cases}$

所以 $x_1x_2-x_1-x_2=\dfrac{1}{2}a+\dfrac{1}{2}b-ab$，$4(x_1-1)(x_2-1)+(2a-1)(2b-1)=5$.

因为 a,b 都是正整数，所以 x_1,x_2 均是正整数，

于是，$x_1-1\geqslant0,x_2-1\geqslant0,2a-1\geqslant1,2b-1\geqslant1$，

所以 $\begin{cases}(x_1-1)(x_2-1)=0,\\(2a-1)(2b-1)=5,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}(x_1-1)(x_2-1)=1,\\(2a-1)(2b-1)=1.\end{cases}$

(1)当 $\begin{cases}(x_1-1)(x_2-1)=0,\\(2a-1)(2b-1)=5\end{cases}$ 时，由于 a,b 都是正整数，且 $a\leqslant b$，可得 $a=1,b=3$，

此时，一元二次方程为 $x^2-3x+2=0$，它的两个根为 $x_1=1,x_2=2$.

(2)当 $\begin{cases}(x_1-1)(x_2-1)=1,\\(2a-1)(2b-1)=1\end{cases}$ 时，可得 $a=1,b=1$，

此时，一元二次方程为 $x^2-x+1=0$，它无整数解.

综上所述，当且仅当 $a=1,b=3$ 时，题设方程有整数解，且它的两个整数解为 $x_1=1$，$x_2=2$.

【技巧提升】 ①二次方程有整数根的充要条件(等价条件)至今没有找到，我们解决此类问题总是依赖于几个必要条件，如：两根之和为整数、两根之积为整数、Δ 是整数且是完全平方数；

②本题的关键一步在 $4(x_1-1)(x_2-1)+(2a-1)(2b-1)=5$. 这一步用到了“局部因式分解”，以及一个常见结论 $mn\pm m\pm n+1=(m\pm1)(n\pm1)$. 接下来作整数分析，求四元不定方程 $4xy+zw=5$ 的自然数解.

例 6 解下列方程：

(1)$x^4-x^2+2xy+y^2+1=0$；(2)$x^2+2xy+6x+2y^2+4y+10=0$.

【分析】 首先配方，然后根据非负数的性质降次然后解方程.

【解】 (1)$(x^4-2x^2+1)+(x^2+2xy+y^2)=0$.(折项，分组)

$(x^2-1)^2+(x+y)^2=0$.(配方)

根据“几个非负数的和等于零，则每一个非负数都应等于零”.

得 $\begin{cases}x^2-1=0\\x+y=0\end{cases}$.

$\therefore\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-1.\\y=1\end{cases}$

(2)$x^2+2xy+y^2+6x+6y+9+y^2-2y+1=0$.(折项，分组)

$(x+y)^2+6(x+y)+9+y^2-2y+1=0$.

$(x+y+3)^2+(y-1)^2=0$.(配方)

$\therefore\begin{cases}x+y+3=0.\\y-1=0\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}x=-4.\\y=1\end{cases}$

【技巧提升】 对于高次方程或未知数的个数多于方程的个数的方程通常采用配方，根据非