全国技工学校通用教材

下册

数　学

（第二版）

SHU XUE

中国劳动出版社

全国技工学校通用教材

数　　学

（第二版）

下　册

劳动部培训司组织编写

数　学
（第二版）
下　册
劳动部培训司组织编写
责任编辑：金　龄
中国劳动出版社出版
（北京市和平里中街12号）
地质出版社印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行
787×1092毫米　32开本　7.25印张　160千字
1985年3月北京第1版　1990年3月北京第2版
1991年3月北京第13次印刷　印数：300000册
ISBN 7-5045-0447-5/O·019（课）　定价：1.95元

本书是根据劳动部培训司审定颁发的《数学教学大纲》编写和修订，供技工学校招收初中毕业生使用的统编教材。本教材也可作青工和职工自学用书。

本书分上、下两册。本册内容包括：直线与平面，多面体与旋转体，直线，二次曲线，参数方程与极坐标。

本书这次修订，增加了初中数学的有关内容，对偏深、偏难的章节作了删除或修改，使第一版中存在的主要问题得到了解决。在修订过程中，得到北京第二光学仪器厂技校、首都钢铁公司技校、国营751厂技校、郑州电缆厂技校、洛阳拖拉机厂技校的大力支持，特在此表示感谢。

本书第一版由沈炎金、崔复升、王志和、古文卿编写，沈炎金主编；陈泉亮、杜韵合审稿，陈泉亮主审。第二版由沈炎金、王志和、古文卿编写，沈炎金主编；王迺玉、严造林审稿，王迺玉主审。

目　录

第九章　直线与平面

在初中的平面几何里，已经学习了平面图形的有关知识．现在我们要在平面图形的基础上，进一步研究空间图形的一些基本性质和这些性质的应用．

§9.1　平面和平面的基本性质

一、平面

桌面、平静的水面等，都给我们以平面的形象．几何里所说的平面就是从这样的一些物体抽象出来的．但几何里的平面是无限延展的．

当我们从适当的角度和距离观察桌面时，感到它很象平行四边形，因此，几何里通常用平行四边形来表示平面．画水平放置的平面时，通常把平行四边形的锐角画成45°，横边画成等于邻边的两倍（图 9.1）．当一个平面的一部分被另一个平面遮住时，把遮住部分的线段画成虚线或不画（图9.2）．

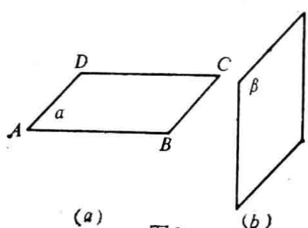


图9.1

图9.2

这样，看起来立体感强些。

因为几何里的平面是无限延展的，所以平行四边形仅是它所表示的平面的一部分。平面通常用一个希腊字母 α、β、γ 等来表示，如图 9.1 和图 9.2 中的平面可以记作平面 α、平面 β、平面 γ，有时也用表示平面的平行四边形的两个相对顶点的字母表示，如图9.1a的平面记作平面 AC。

二、平面的基本性质

人们在长期的生活和生产实践中，总结了有关平面的一些基本性质，我们把它们当作公理，作为进一步推理的基础。

公理1　如果一条直线上的两个点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内(图9.3a)。

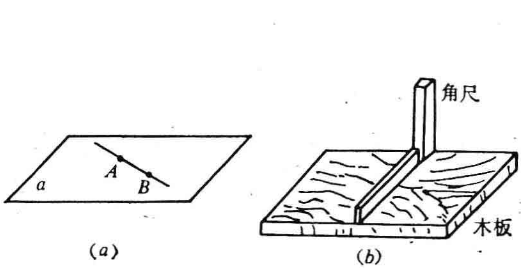


图9.3

如图9.3b，木工师傅用角尺的一条直角边在刚刨过的木板上任意移动，如果角尺的这条直角边处处与木板表面密合，就可以肯定板面是平面，这就是公理1的实际应用。

直线AB上的所有点都在平面α内，则说直线AB在平面α内，或说平面α经过直线AB。

直线和平面都可以看作点的集合，点A在直线AB上，记作$A\in AB$；点M在直线AB外，记作$M\notin AB$；点A在平面α内，记作$A\in\alpha$；点N在平面α外，记作$N\notin\alpha$；直线AB在平面α内，记作$AB\subset\alpha$。

公理2　如果两个平面有一个公共点，那么它们有且只有一条通过这个点的公共直线(图9.4)。

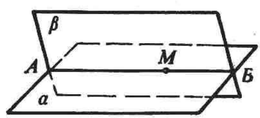


图9.4

例如教室内相邻的墙面，在墙角处交于一点，它们就交于过这个点的一条直线．如果两个平面α和β有一条公共直线AB，就说平面α和β相交，交线是AB，记作$\alpha\cap\beta=AB$。

公理3　经过不在同一条直线上的三点，有且只有一个平面(图9.5a)。

如图9.5b，工人在工件上划线时，在平台上要用三个顶足来放平工件．测量仪和照像机要用三脚架，就是公理3的实际应用。

“有且只有一个平面”也可以说成“确定一个平面”。图9.5a中A、B、C三点确定的平面，又可记作平面ABC。

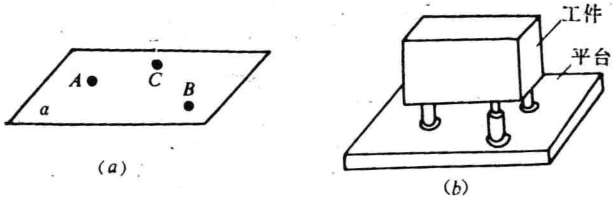


图9.5

根据上述公理，可以得出下面的推论.

推论 1　一条直线和这条直线外的一点，确定一个平面(图9.6a).

推论 2　两条相交直线，确定一个平面(图9.6b).

推论 3　两条平行直线，确定一个平面(图9.6c).

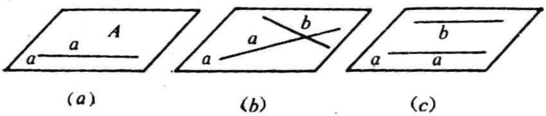


图9.6

工人师傅在吊运重物时，常把吊绳按图 9.7 所示式样拴住重物，就是这些推论的实际应用.

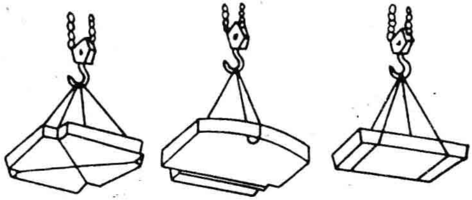


图9.7

例 1 过已知直线外一点与这条直线上的三点，分别画三条直线。证明这三条直线在同一个平面内。

已知 如图9.8，$A\in l$、$B\in l$、$C\in l$，$P\notin l$。

求证 PA、PB、PC在同一个平面内。

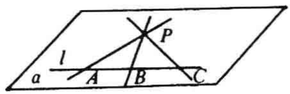


图9.8

证明 ∵ P与l确定平面α(推论1)，

又 $A\in l$，$B\in l$，$C\in l$，

∴ $A\in\alpha$，$B\in\alpha$，$C\in\alpha$，

∴ $PA\subset\alpha, PB\subset\alpha, PC\subset\alpha$ （公理1），

即直线PA、PB、PC都在平面α内。

空间的几条直线(或几个点)，如果在同一个平面内，叫做这几条直线（或这几个点）共面。

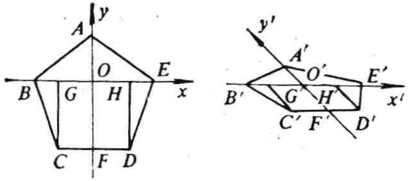
三、直观图的画法

在纸上画空间图形时，不是画它的真实形状，而是画它的直观图。例如，图9.5b是长方体工件和平台的直观图，它是一个平面图形，但具有较强的立体感。要画空间图形的直观图，首先要学会水平放置的平面图形的直观图的画法。下面举例说明画法。

例 2 画水平放置的正五边形的直观图。

画法 （1）在已知正五边形$ABCDE$中，取对角线BE所在的直线为x轴，取对称轴AF为y轴。过点C、D分别作y轴的平行线CG、DH，并与x轴分别交于G、H（图9.9a)。

（2）画对应的x'轴、y'轴，使$\angle x'O'y'=135°$（或



(a) (b) (c)

图9.9

45°)。在 x' 轴上截取 $O'G'=OG$，$O'H'=OH$，$O'B'=OB$，$O'E'=OE$。在 x' 轴的同一侧画线段 $G'C' \parallel y'$ 轴，$H'D' \parallel y'$ 轴，且使 $G'C'=\frac{1}{2}GC$，$H'D'=\frac{1}{2}HD$；在 y' 轴上截取 $O'A'=\frac{1}{2}OA$(图9.9b)。

(3)连结 $A'B'$、$B'C'$、$C'D'$、$D'E'$、$E'A'$，则所得的五边形 $A'B'C'D'E'$ 就是正五边形 $ABCDE$ 的直观图。图画好后擦去辅助线 x' 轴、y' 轴及画图添加线 $C'G'$、$D'H'$(图 9.9c)。

上面画直观图的方法叫做斜二测画法。这种画法是：

(1)在已知图中选取互相垂直的 x 轴、y 轴，并画适当的辅助线（如图 9.9a 中的 CG 和 DH）；

(2)画对应的 x' 轴、y' 轴，使 $\angle x'O'y'=135°$（或45°)，它们确定的平面就是直观图所在的水平平面；

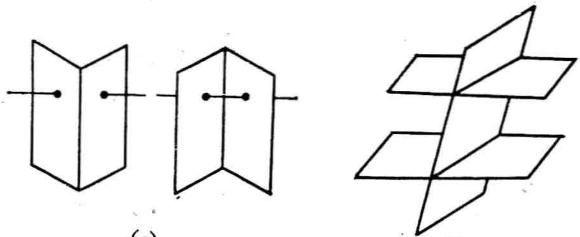
(3)在已知图形中平行于 x 轴或 y 轴的线段，在直观图中分别画成平行于 x' 轴或 y' 轴的线段；且在已知图形中平行于 x 轴的线段在直观图中保持原长，平行于 y 轴的线段取其原长的一半。

画水平放置的多边形的直观图时，主要是确定直观图中多边形的顶点的位置。

习 题 一

1. （1）观察题图 9.1a 中两个图形的位置有什么不同.

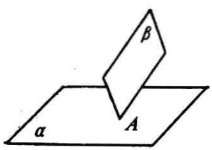
（2）仿照题图 9.1b 画出图形，再用虚线表示被平面遮住的线段，并用字母表示各个平面.



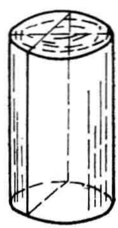
(a)　　　　(b)

题图9.1

2. 题图 9.2 表示两个平面有公共点 A，它们相交于一点还是一条直线？



题图9.2



题图9.3

3. （1）平板仪和照相机为什么用三脚架？用四脚架好不好？为什么？

（2）如题图 9.3，木工锯板时，为什么要在圆木的两侧弹出两条平行线，然后沿线锯板？

4. 画出交于同一直线的三个平面.

5. 一个点能不能确定一个平面？两个点呢？怎样的三点才能确定一个平面？

6. 空间有四个点，它们中间任何三点都不在一条直线上，那么过其中每三点作一个平面，一共可作几个平面？

7. 共点的三条直线最多可确定几个平面？

8. 空间的三条直线两两平行且不共面，如果经过其中每两条直线作一个平面，一共可作几个平面？

9. 平行四边形、三角形、梯形是否一定是平面图形？为什么？

10. 证明：两两相交且不过同一个点的三条直线必在同一个平面内。

11. 四条线段顺次首尾连接，所得的图形一定是平面图形吗？为什么？

12. 怎样用两根细绳来检查一张桌子的四条腿的下端是否在同一个平面内。

§9.2 空间两条直线

一、两条直线的位置关系

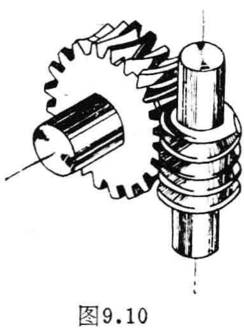


图9.10

我们知道在同一个平面内的两条不重合的直线，它们之间的位置关系只有两种：平行或相交．但空间两条直线之间还有另外一种位置关系．观察图9.10的蜗轮蜗杆机构两轴的中心线，可以看出它们既不相交也不平行，显然这样的两条直线是不共面

的，这种不同在任何一个平面内的两条直线叫做**异面直线**。

因此空间两条不重合直线的位置关系有以下三种：

（1）相交——两条直线在同一平面内，有且只有一个公共点；

（2）平行——两条直线在同一平面内，没有公共点；

（3）异面——两条直线不同在任何一个平面内，没有公共点。

观察图 9.11 长方体的棱 AA_1 和 CC_1 所在的直线，它们虽然不同在长方体的任何一个表平面内，但同在平面 AC_1 内，所以它们不是异面直线。棱 AB 和 B_1C_1 所在的直线，不同在任何一个平面内，所以它们是异面直线。

画异面直线时，要把这两条直线画在不同的平面内（图9.12），这样就容易显示出异面直线的特点。

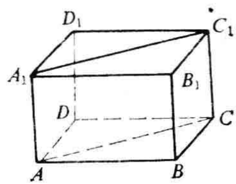


图9.11

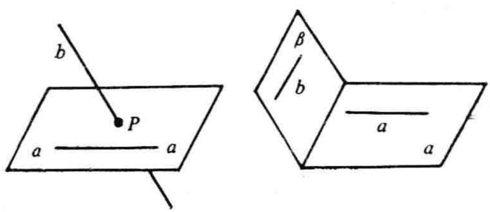


图9.12

二、平行直线

在平面几何里我们学过：“在同一平面内，如果两条直线都和第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行”。例如，在一张纸上画三条直线 a、b、c，使 $a \parallel b$、$c \parallel b$，则有

$a \parallel c$。若以中间的直线b为折痕把纸折成如图 9.13，这时 a、b、c三条直线虽然不同在一个平面内，但是我们可以看出a和c仍然是平行的，这说明对于空间的三条直线也具有上述的性质，我们把它作为公理。

公理 4　平行于同一条直线的两条直线互相平行.

例 1　证明四个顶点不共面的四边形（叫做空间四边形）各边的中点共面.

已知　如图 9.14中，$ABCD$是空间四边形，E、F、G、H分别是AB、BC、CD、DA的中点.

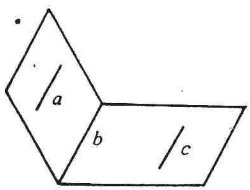


图9.13

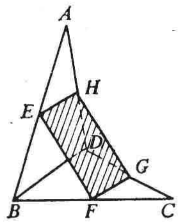


图9.14

求证　E、F、G、H四点共面.

证明　连结BD、EH、FG.

∵　EH是$\triangle ABD$的中位线，

∴　$EH \parallel BD$.

同理　$FG \parallel BD$.

∴　$EH \parallel FG$（公理 4）.

因此　EH、FG确定一个平面EG.

∵　$E \in EH$，$H \in EH$，$F \in FG$，$G \in FG$，

∴　点E、F、G、H都在平面EG内.

在平面几何里，我们已经知道对应边平行并且方向相同的两个角相等，在空间也有相同的定理.

定理　如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行并且方向相同，那么这两个角相等。

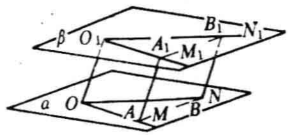


图9.15

已知　如图9.15，$\angle MON$ 和$\angle M_1O_1N_1$的边$OM \parallel O_1M_1$，$ON \parallel O_1N_1$，并且方向相同。

求证　$\angle MON=\angle M_1O_1N_1$。

证明　在OM、O_1M_1、ON、O_1N_1上分别取$OA=O_1A_1$，$OB=O_1B_1$，连结OO_1、AA_1、BB_1、AB、A_1B_1。

$\because$　$OA \mathrel{\underline{\parallel}} O_1A_1$，

$\therefore$　OAA_1O_1为平行四边形，

$\therefore$　$OO_1 \mathrel{\underline{\parallel}} AA_1$。

同理可证　$OO_1 \mathrel{\underline{\parallel}} BB_1$。

$\therefore$　ABB_1A_1为平行四边形，

得　$AB=A_1B_1$，

$\therefore$　$\triangle AOB \cong \triangle A_1O_1B_1$，

得　$\angle AOB=\angle A_1O_1B_1$，

即　$\angle MON=\angle M_1O_1N_1$。

推论　如果两条相交直线和另两条相交直线分别平行，那么这两组直线所成的锐角（或直角）相等。

三、两条异面直线所成的角

设a、b是两条异面直线（图9.16a），经过空间任意一点O分别引直线$a_1 \parallel a$，$b_1 \parallel b$(图9.16b)，直线a_1、b_1所成的锐角(或直角）叫做**异面直线a和b所成的角**。

因为两条相交直线和另外两条相交直线分别平行时，两组直线所成的锐角（或直角）相等，所以两条异面直线a和b所成角的大小只由a和b的位置来确定，而和点O的位置无