高等院校经济、管理类专业“十二五”规划教材

运筹学

主编 / 廖志高

YUNCHOUXUE

GAODENGYUANXIAOJINGJIGUANLILEIZHUANYESHIERWUGUIHUAJIAOCAI

中南大学出版社
www.csupress.com.cn

高等院校经济、管理类专业“十二五”规划教材

运筹学

YUNCHOUXUE

中南大學出版社
www.csupress.com.cn

主　编：廖志高
副主编：刘文芳
撰稿人：（按编写章节先后排序）
廖志高　吕　品　刘文芳　李　梅

内容提要

本书系统地介绍了运筹学的基本原理和方法，重点阐述应用最为广泛的线性规划、整数规划、运输规划、动态规划、图与网络、决策分析、库存论、对策论等定量分析理论与方法，并着重结合经济、管理类专业实际，强调建模和软件求解，具有较强的解决实际经济管理问题的导向能力。本书作为教材，适合理工科和文科背景的管理类专业本科生，以及要求相对全面地掌握运筹学知识的经济类专业研究生、管理类专业研究生、MBA、MPA 和工程硕士使用。

图书在版编目(CIP)数据

运筹学/廖志高主编. —长沙：中南大学出版社，2011.7
ISBN 978-7-5487-0332-7

Ⅰ.运...　Ⅱ.廖...　Ⅲ.运筹学　Ⅳ.022

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 135454 号

运筹学

主　编　廖志高
副主编　刘文芳

□责任编辑　秦瑞卿
□责任印制　文桂武
□出版发行　中南大学出版社
社址：长沙市麓山南路　　邮编：410083
发行科电话：0731-88876770　　传真：0731-88710482
□印　　装　长沙市宏发印刷厂

□开　　本　787×1092　1/16　□印张 11　□字数 267 千字　□插页 2
□版　　次　2011 年 7 月第 1 版　□2011 年 7 月第 1 次印刷
□书　　号　ISBN 978-7-5487-0332-7
□定　　价　22.00 元

高等院校经济、管理类专业“十二五”规划教材

编审委员会

前　言

运筹学,英语全称为 operational research(英国)或 operations research (美国),原意是操作研究、作业研究、运用研究、作战研究。译作运筹学,是借用了《史记》"运筹于帷幄之中,决胜于千里之外"一语中"运筹"二字,既显示其军事的起源,也表明它在我国已早有萌芽。有的学者把运筹学描述为就组织系统的各种经营作出决策的科学手段。P. M. Morse 与 G. E. Kimball 在他们的奠基作中给运筹学下的定义是:"运筹学是在实行管理的领域,运用数学方法,对需要进行管理的问题统筹规划,作出决策的一门应用科学。"运筹学的另一位创始人定义运筹学是:"管理系统的人为了获得关于系统运行的最优解而必须使用的一种科学方法。"它使用许多数学工具(包括概率统计、数理分析、线性代数等)和逻辑判断方法,来研究系统中人、财、物的组织管理、筹划调度等问题,以期发挥最大效益,它是研究人类对各种资源的运用及筹划活动,其目的在于了解和发现这种运用及筹划活动的基本规律,以便发挥有限资源的最大效益,达到整体、全体最优的目标。

运筹学作为一门现代科学,是在第二次世界大战期间首先在英美两国发展起来的,为对付德国的空袭,英国空军研制了针对防御的新雷达系统。但是,由雷达送来的信息常常是相互矛盾的,需要加以协调和关联,以改进作战效能,为此英国在皇家空军中组织了一批科学家,成立运筹学小组,对新战术实验和战术效率评价进行研究,取得了满意的效果。受英国运筹学对作战指挥成功运用的启发,美国也在自己军队中逐渐组建各种运筹学小组。运筹学小组在后续工作中,成功解决了许多战争课题,如:护航舰队保护商船队的编队问题;船队遭受德军潜艇攻击时如何使船队损失最小问题;通过改进深水炸弹投放的深度,提高德国潜艇的中弹率;以及根据飞机出动架次作出维修安排,提高飞机的作战效率等等。当时研究和解决的问题都是短期和战术性的。第二次世界大战结束后,英国、美国和加拿大军队中相继成立了更为正式的运筹学研究组织,运筹学工作者已经超过 700 人。其中以兰德公司(RAND)为首的一些组织开始着重研究战略性问题,未来的武器系统的设计和其可能合理运用的方法。到了 20 世纪 60 年代,除了军事方面的应用研究外,相继在工业、农业、经济和社会领域等各领域都有较为广泛的应用。

与此同时,运筹数学有了飞快的发展,并形成了运筹学的许多分支。如数学规划(线性规划、非线性规划、整数规划、目标规划、动态规划、随机规划等)、图论与网络、排队论、存储论、对策论、搜索论、可靠论、决策论、模拟论等。而奠定现代运筹学发展基础和雏形的早期先驱性工作可追溯到 20 世纪初。1914 年提出了军事运筹学中的兰彻斯特(Lanchester)战斗方程;1915 年 F. W. Harris 研究了库存论模型中的商业库存问题,其后 H. C. Levinson 提出了对现在库存论和决策论发展较大启示的最优发货量理论;1916 年 F. W. Lanchester 关于战争中兵力部署的理论是现代军事运筹规范的战争模型。1917 年丹麦工程师爱尔朗(Erlang)在哥本哈根电话公司研究电话系统时,提出了排队论的著名公式;1921 年 E. Borel 用数学方法研究博弈问题的基础上,引进了现代博弈论中最优策略的概念,对某些问题证明了最优策略的存在;1926 年 T. H. Boruvka 发现了拟阵与组合优化算法之间的关系;1932 年 A. Ya.

Shinchin 研究了机械维修问题,是现代可靠性数学理论最早的工作;1939 年 Leonid V. Kantorovich 于 1939 年总结其研究工作而成的《生产组织与计划中的数学方法》是现行规划对工业生产问题的典型应用;1944 年 J. Von Neumannn 与 O. Morgenstern 出版的《博弈论与经济行为》一书,标志着系统化与公理化的博弈论分支形成,发展了近代的决策效用理论,为决策分析中的效用函数奠定了公理基础;1947 年 G. B. Dantzig 研究了线性规划,提出了求解线性规划的单纯形法。单纯形法提出后很快受到经济学家的重视,如在第二次大战中从事运输模型研究的美国经济学家库普曼斯(T. C. Koopmans)很快看到线性规划在经济中应用的意义,并呼吁年轻的经济学家要关注线性规划。

20 世纪 40 年代后期,当战后的工业恢复繁荣时,由于组织内与日俱增的复杂性和专门化所产生的问题,使人们认识到这些问题基本上与战争中所曾面临的问题类似,只是具有不同的现实环境而已,运筹学就这样潜入工商企业和其他部门,在 50 年代以后得到了广泛的应用。而快速计算的出现,使一些复杂的问题能得到及时解决,从而使运筹学具有现实意义,又极大地促进了运筹学的发展。1953 年 R. Bellman 阐述了动态规划的最优化原理;同年,L. S. Shaply 研究了 Markov 决策过程的一种基本型,成为该分支发源性的工作;1953 年 J. Kiefer 首次提出优选的分数法与黄金分割法;1954 年 D. R. Dantzig 等研究旅行推销商问题时提出了分解的思想,萌芽了整数规划中两大方法——割平面法与分支定界法;L. J. Savage 把效用理论与主观概率结合成整体来研究统计决策问题,建立了严格的公理基础等等。在这样的强势下,运筹学理论方面得到了迅速发展。世界上不少国家已成立了致力于该领域及相关活动的专门学会,美国于 1952 年成立了运筹学会,并出版期刊《运筹学》,世界其他国家也先后创办了运筹学会与期刊。1959 年由英美法三国运筹学会发起成立了国际运筹学协会,进入 21 世纪,已有 48 个国家或地区的运筹学组织成为其正式会员。

20 世纪 50 年代中期在钱学森、许国志等老一辈科学家的推动下,运筹学由西方引入中国,并结合我国的特点在国内推广应用。在经济数学,特别是投入产出表的研究和应用开展较早,质量管理的应用也较有特色。而“打麦场的选址问题”和“中国邮递员问题”就是中国在当时提出并成功解决的问题。在此期间以华罗庚为首的一大批数学家加入到运筹学的研究队伍,使运筹学的许多分支很快跟上当时的国际水平,并且自 1965 年起 10 年间华罗庚在全国推广“优选法”和“统筹法”,对中国现代运筹学的研究和应用起到了巨大的推动作用。1980 年,中国数学学会运筹学分会在山东济南成立,1982 年加入国际运筹学会联盟并创刊《运筹学杂志》。1991 年中国运筹学会具有法人资格的全国性学会正式成立,并于 1992 年在成都科技大学(现四川大学)召开了第一届全国学术会议。

当前全世界运筹学出版物的数量和种类每年都在以惊人的速度增加,从而促使运筹学理论和应用研究得到快速发展,主要发展领域有运筹学应用、运筹科学和运筹数学。现代运筹学面临的新对象是经济、技术、社会、生态和政治等因素交叉在一起的复杂系统,因此在学习和研究过程中,必须注意大系统、注意与系统分析相结合,与未来学相结合,引入一些非数学的方法和理论,采用软系统的思考方法。总之,运筹学还在不断发展中,新的思想、观点和方法不断出现。

本书分工为:廖志高(广西工学院管理系)编写前言、第四章、第六章、第八章和附录;刘文芳(广西工学院管理系)编写第三章、第五章;吕品(广西工学院管理系)编写第一章、第二章;李梅(广西师范学院经济管理学院)编写第七章。本次编写先由各作者按总的编书原则,对自己承担的章节进行编写、修改和补充,最后由廖志高负责总纂。

目　录

第一章　线性规划

线性规划(linear programming，简记为 LP)是运筹学的一个重要分支。自 1947 年丹捷格(G. B. Dantzig)提出了线性规划问题求解的一般方法(单纯形法)之后，线性规划在理论上日益趋向成熟，在实践上日益广泛和深入。

第一节　线性规划问题及其数学模型

一、问题的提出

规划问题总是与有限资源的合理利用分不开，这里的有限资源是一个广义的概念，它可以是劳动力、原材料、机器设备、资本、空间等有形的事物，也可以是时间、技术等无形的事物；这里的合理利用通常是指费用最小或利润最大。下面我们就通过几个案例来反映线性规划的数学模型。

例 1.1(资源合理利用问题)　某工厂在某一计划期内准备生产甲、乙两种产品，生产需要消耗 A、B、C 三种原材料。生产每件产品对各种资源的消耗量、工厂拥有各种资源的数量以及每件产品所能获得的利润如表 1－1 所示，试建立该问题的数学模型，以使计划期内的生产获利最大。

表 1－1　产品、资源信息表

原材料	单位产品资源消耗量		资源拥有量
	甲	乙	
A	1	2	8
B	4	0	16
C	0	4	12
单位产品利润	2	3	

解：设决策变量 x_1 和 x_2 分别表示在计划期内产品甲、乙的生产量，在满足资源限量的条件下，它们必须同时满足下列约束条件。

对原材料 A：$x_1+2x_2\leqslant 8$

对原材料 B：$4x_1\leqslant 16$

对原材料 C：$4x_2\leqslant 12$

该工厂的目标是在不超过所有资源限量的条件下，确定甲、乙两种产品的产量，以获得最大的利润；因此，此问题的目标函数可表示为：

$$\max\ Z=2x_1+3x_2$$

于是，该问题的数学模型可表示为：

$$\max\ Z=2x_1+3x_2$$
$$\begin{cases}x_1+2x_2\leqslant 8\\4x_1\leqslant 16\\4x_2\leqslant 12\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

例 1.2(营养配餐问题) 假定一个成年人每天需要从食物中获得 3000kJ 的热量、55g 的蛋白质和 800mg 的钙。如果市场上只有四种食品可供选择，它们每千克所含的热量和营养成分及市场价格见表 1－2。问如何选择才能在满足营养的前提下是购买食品的费用最小？

表 1－2 四种食品所含的热量、营养成分和市场价格

序号	食品名称	热量(kJ)	蛋白质(g)	钙(mg)	价格(元)
1	猪肉	1000	50	400	14
2	鸡蛋	800	60	200	6
3	大米	900	20	300	3
4	白菜	200	10	500	2

解：设决策变量 x_j 表示第 j 种食品每天的购入量，此模型的约束条件为满足营养需求，可以表示为：

$$1000x_1+800x_2+900x_3+200x_4\geqslant 3000$$
$$50x_1+60x_2+20x_3+10x_4\geqslant 55$$
$$400x_1+200x_2+300x_3+500x_4\geqslant 800$$

该问题的目标是使购买食品的花费最小，因此，目标函数可表示为：

$$\min Z=14x_1+6x_2+3x_3+2x_4$$

于是，该问题的数学模型可表示为：

$$\min Z=14x_1+6x_2+3x_3+2x_4$$
$$\begin{cases}1000x_1+800x_2+900x_3+200x_4\geqslant 3000\\50x_1+60x_2+20x_3+10x_4\geqslant 55\\400x_1+200x_2+300x_3+500x_4\geqslant 800\\x_1,x_2,x_3,x_4\geqslant 0\end{cases}$$

二、线性规划问题的数学模型

从上一节的两个例题可以看出，线性规划模型的三要素是：决策变量、约束条件和目标函数。针对一个实际问题建立线性规划模型的基本步骤为：

(1)确定一组决策变量表示某一方案，这组决策变量通常为非负的连续变量；

(2)找出一定数量(m)的约束条件，这些约束条件可以用关于决策变量的一组线性等式或线性不等式来加以表示；

(3)把实际问题所要达到的目标用决策变量的线性函数来表示，得到目标函数，并确定是求最大值还是最小值。

线性规划的数学表达式称为线性规划的数学模型，其一般形式可表示为：

$$\max(\min)Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant (=,\geqslant) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant (=,\geqslant) b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant (=,\geqslant) b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases} \tag{1-1}$$

线性规划数学模型的一般形式也可以用如下矩阵向量的简单形式加以表达：

$$\max(\min)Z = CX$$

$$\begin{cases} AX \leqslant (=,\geqslant) b \\ X \geqslant 0 \end{cases} \tag{1-2}$$

式中：A 是 $m \times n$ 阶技术系数矩阵；b 是 $m \times 1$ 阶资源系数矩阵(列向量)；C 是 $1 \times n$ 阶价值系数矩阵(行向量)；X 是 $n \times 1$ 阶决策变量矩阵(列向量)。

线性规划模型有各种不同的形式：目标函数可以求极大值，也可以求极小值；约束条件可以是等式也可以是不等式，不等式可以是“≤”，也可以是“≥”；决策变量一般是非负的，但在理论模型中可能会允许在区间$(-\infty, +\infty)$内取值。为适应通用的代数求解方法，将不同形式的线性规划模型转化为统一的标准形式是十分必要的。

三、线性规划问题的标准形式

线性规划问题的标准形式应符合条件：目标函数为最大化(max)；所有的约束条件都用等式来表示；所有的决策变量非负；所有约束条件的右端项非负。

用矩阵向量可以把线性规划问题的标准形式表述成如下简单形式：

$$\max Z = CX$$

$$\begin{cases} AX = b \\ X \geqslant 0 \\ b \geqslant 0 \end{cases} \tag{1-3}$$

线性规划问题的数学模型都可以变换为标准型，具体步骤如下：

(1)若目标函数为最小化，即 $\min Z = CX$。变换为求目标函数最大化，令 $Z' = -Z$，则 $\max Z' = -CX$。

(2)约束方程为不等式时。这里有两种情况：一种是“≤”形式的不等式，则可以在不等号的左边加入一个非负松弛变量，把原“≤”不等式变为等式；另一种是“≥”形式的不等式，则可以在不等号的左边减去一个非负剩余变量，把原“≥”不等式变为等式。

(3)若存在取值无约束的决策变量 x_k，可令 $x_k = x_k' - x''_k$，其中 $x_k', x''_k \geqslant 0$。

(4)若存在 $b_i < 0$ 的约束条件，则在约束条件的两边同乘 -1。

例 1.3 将下列线性规划模型转换成标准形式

$$\min Z = -x_1 + 2x_2 - 3x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 \geqslant 2 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = -5 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \text{ 无约束} \end{cases}$$

解：令 $x_3 = x'_3 - x''_3, Z' = -Z$，则

$$\max Z' = x_1 - 2x_2 + 3x'_3 - 3x''_3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x'_3 - x''_3 + x_4 = 7 \\ x_1 - x_2 + x'_3 - x''_3 - x_5 = 2 \\ -3x_1 + x_2 + 2x'_3 - 2x''_3 = 5 \\ x_1, x_2, x'_3, x''_3, x_4, x_5 \geqslant 0 \end{cases}$$

第二节 线性规划问题解的基本理论

一、线性规划问题的图解法

上一节列举了两个把实际问题构造成线性规划数学模型的例子，初步解决了模型构造问题。如何求解数学模型以获得问题的最优解自然成为了本节关心的焦点。

从简单到复杂、从具体到抽象是人类认识客观事物的一般过程，首先讨论用图解法解决只包含两个变量的线性规划问题正是尊重人类认识规律的具体体现。虽然在实际问题中，只有两个决策变量的小问题是很少见的，但图解法能揭示线性规划问题解的一些基本概念，并为解决大规模线性规划问题提供原则性的指导。

图解法顾名思义是通过绘图来达到求解线性规划问题这一目的的。在介绍图解法的具体步骤前，让我们先来明确一些有关线性规划问题解的概念。

决策变量的一组取值便构成了线性规划问题的一个解；满足约束条件（包括资源约束和非负约束）的解称为可行解；所有可行解构成的集合称为可行域；使目标函数达到所追求极值的可行解称为最优解；最优解所对应的目标函数值称为最优值。

例 1.4 用图解法求解例 1.1。

第一步：构造平面直角坐标系（由于决策变量非负，所以只取第一象限）；

第二步：为了在图上表示可行域，按自然顺序将各个约束条件都绘制出来（不等式约束先绘制其对应的等式直线，然后再判断其不等号方向并用箭头方向代表所选定的半平面）；

约束条件 $x_1 + 2x_2 \leqslant 8$ 要求问题的可行解位于直线 $x_1 + 2x_2 = 8$ 的左下方。直线 $x_1 + 2x_2 = 8$ 可先通过两个方便点绘制出来，如（8，0）和（0，4）。直线上的箭头表明了满足条件的区域。同理，约束条件 $4x_1 \leqslant 16$ 和 $4x_2 \leqslant 12$ 也可以用直线表示出来。图 1－1 中的阴影部分即为例 1－1 的可行域。显然，在这个区域内的每一个点（有无数多个）都是一个可行解。我们的目标是确定使目标函数 $Z = 2x_1 + 3x_2$ 达到最大值的最优解。

第三步：选取一个方便的 Z 值，使得此 Z 值所对应的目标函数的直线通过可行域的某一点或一些点；

目标函数 $Z=2x_1+3x_2$ 可以表示为斜截式 $x_2=-\frac{2}{3}x_1+\frac{Z}{3}$。不妨令 $Z=0$，于是有 $x_2=-\frac{2}{3}x_1$，它是一条通过坐标原点的直线。

第四步：为寻求最优解，向使 Z 值得到优化的方向平行移动目标函数直线，当目标函数直线平移到极限状态时，其与可行域的交点即为最优解点。

向右上方平行移动目标函数直线 $x_2=-\frac{2}{3}x_1+\frac{Z}{3}$，得到一组使 Z 值(截距)不断增加的平行线(如图 1－1 虚线所示)。目标函数直线向右上方移动使目标函数值增加，而这样的移动是受到一定限制的，那就是必须保持直线与可行域至少有一个公共点。显然可行域的顶点 B 就是目标函数直线脱离可行域前经过的最后一点，即 $B=(4,2)$ 就是最优解点，其最优值 $Z=2\times4+3\times2=14$。这说明该厂在计划期内的最优生产计划方案是：生产甲产品 4 个单位，乙产品 2 个单位，可得最大利润 14 个单位。

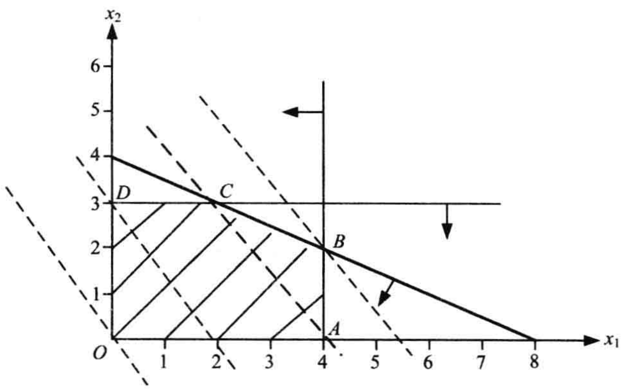

图 1－1　例 1.1 图解

图解法揭示出一个重要结论：对一般线性规划模型而言，求解结果可能出现唯一最优解、无穷多最优解、无界解和无可行解四种情况。

1. 唯一最优解

上述例题的最优解就是唯一的。

2. 无穷多最优解(多重解)

某些线性规划问题，可能存在一个以上的可行解使目标函数达到最优，在这种情况下，所有这些可行解都是最优解，线性规划具有无穷多最优解(或称为具有多重解)。为说明这一情况，现将例 1－1 的目标函数变为 $Z=2x_1+4x_2$，则以 Z 为参数表示目标函数的直线族与约束条件 $x_1+2x_2=8$ 所示的可行域的边界平行。当 Z 由小变大时最终将与线段 BC 重合(见图 1－2)，线段 BC 上任意一点都使 Z 取得相同的最大值，此时线性规划问题有无穷多最优解。

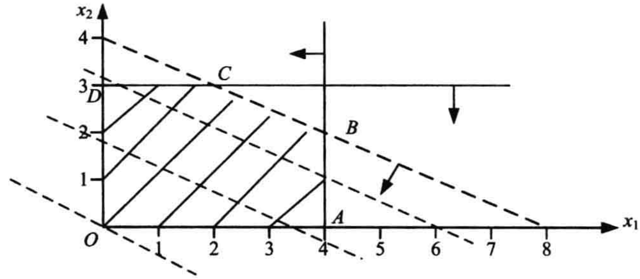

图1－2　无穷多解示意

3. 无界解

有些线性规划模型有可行解，但可能没有最优解，也就是说，能不断地找到更好的可行解使目标函数值增大，此时线性规划问题有无界解(见图1－3)。

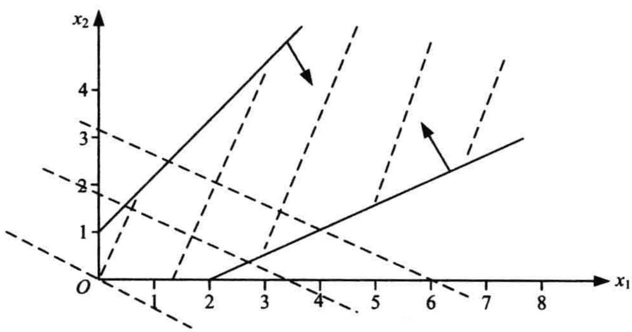

图1－3　无界解示意图

4. 无可行解

有些线性规划模型可能根本没有可行解，没有可行解即可行域为空集，当然也就不存在最优解(见图1－4)。

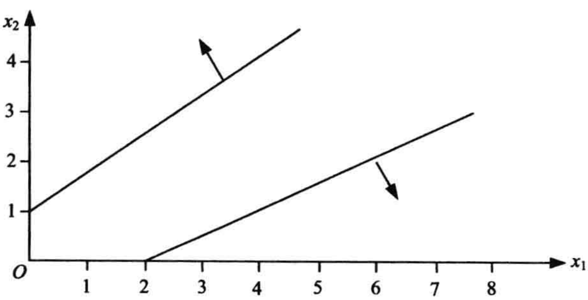

图1－4　无界解示意图

当实际问题的数学模型求解结果出现后两种情况时，一般说明线性规划问题数学模型的构建出现了错误。前者缺乏必要的约束条件，后者则是存在相互矛盾的约束条件。

图解法虽然直观、简便，但当变量数多于两个时，它就无能为力了。在本章第三节中将介绍一种求解线性规划的单纯形法。在讨论单纯形法之前，首先要对线性规划问题解的概念进行拓展。

二、线性规划问题解的基本概念与定理

一般线性规划问题的标准形式可表示为：

$$\max Z = CX$$

$$\begin{cases} AX = b \\ X \geqslant 0 \\ b \geqslant 0 \end{cases}$$

其中：

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [P_1, P_2, \cdots, P_n]$$

1. 基本概念

定义 1.1　（基、基向量、基变量和非基变量）设 A 是约束方程组的 $m\times n$ 阶系数矩阵，其秩为 m，B 是 A 中 $m\times m$ 阶的一个非奇异子阵（$|B|\neq 0$），则称 B 是线性规划问题的一个基。这就是说，矩阵 B 是由 m 个线性独立的列向量构成的，不失一般性，可设 $B=[p_1,p_2,\cdots,p_m]$。构成矩阵 B 的每一个列向量 $p_j(j=1,2,\cdots,m)$ 称为基向量，与每一个基向量对应的决策变量称为基变量。线性规划中基变量以外的决策变量称为非基变量。

定义 1.2　（基本解、基本可行解与可行基）在约束方程组 $AX=b$ 中，若假设所有的非基变量均取零，那么该方程组相当于一个具有 m 个方程、m 个基变量的方程组，故它具有唯一解 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_m,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，我们称这组解为基本解。满足非负条件的基本解称为基本可行解，与基本可行解对应的基称为可行基。几种解的概念之间的关系可用图 1-5 加以表示。

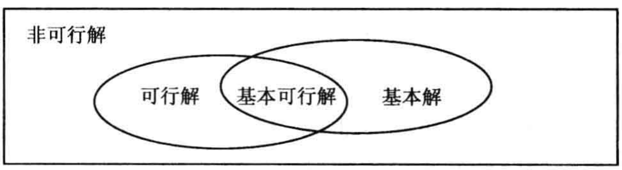

图 1-5　解集关系示意图

例 1.5　在下述线性规划问题中，举例说明什么是基、基变量、基本解、基本可行解和可行基。

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\begin{cases}10x_1+20x_2+x_3=80\\4x_1+x_4=16\\6x_2+x_5=18\\x_j\geqslant 0,j=1,2,\cdots,5.\end{cases}$$

解：约束方程组的系数矩阵

$$A=\begin{bmatrix}10&20&1&0&0\\4&0&0&1&0\\0&6&0&0&1\end{bmatrix}$$

矩阵 A 的秩为 3，而 $B=(p_3,p_4,p_5)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ 是 3 阶非奇异矩阵，故 B 是此线性规划的一组基。p_3,p_4,p_5 是基向量，与其相对应的 x_3,x_4,x_5 为基变量，同时可知 x_1 和 x_2 为非基变量。令非基变量 $x_1=x_2=0$，可求得关于 x_3,x_4,x_5 的一组解 $X=(0,0,80,16,12)^{\mathrm{T}}$，此组解即为线性规划的一个基本解。又因该基解的所有分量均为非负，故它同时又是一个基本可行解；当然，与此基可行解对应的基 B 是一个可行基。

(3)凸集。如果集合 C 中任意两个点 X_1、X_2，其连线上的所有点也都是集合 C 中的点，称 C 为凸集，即：对任何 $X_1\in C$、$X_2\in C$，有 $\alpha X_1+(1-\alpha)X_2\in C(0<\alpha<1)$，则称 C 为凸集。图 1－6(a)、(b)所表示的集合为凸集，图 1－6(c)、(d)所表示的集合为非凸集。

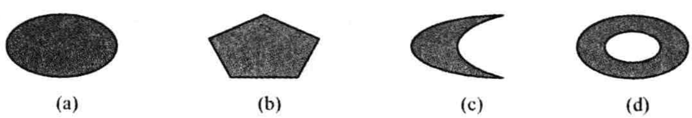

图 1－6 凸集概念示意

(4)顶点。凸集 C 中满足下述条件的点 X 称为顶点：C 中不存在任何两个不同的点 X_1、X_2，使 X 成为这两个点连线上的一个点，即：对任何 $X_1\in C$、$X_2\in C$，不存在 $X=\alpha X_1+(1-\alpha)X_2\in C(0<\alpha<1)$，则称 X 为凸集 C 的顶点。

2. 基本定理

定理 1.1 若线性规划问题的可行域非空，则其可行域是有界或无界的凸集。

定理 1.2 线性规划问题的基本可行解对应于可行域的顶点。

定理 1.3 若可行域有界，线性规划问题的目标函数一定可以在其可行域的顶点上达到最优。或在可行域的某个顶点(唯一最优解)或在某两个顶点及其连线上(无穷多最优解)得到。

第三节 线性规划的单纯形法

一、单纯形法的基本思路

由 G. B. Dantzig 发明的单纯形法是一种求解线性规划问题的循环算法，这一循环实