Clifford传感器网络覆盖

曹文明　何天成　著

科学出版社

Clifford 传感器网络覆盖

曹文明　何天成　著

科学出版社

北京

内 容 简 介

在传统传感器网络覆盖问题中，只针对点目标进行分析。本书针对混合型目标探讨基于 Clifford 代数传感器网络覆盖理论方法，利用 Clifford 几何代数表示目标，给出了传感器网络中节点对目标的覆盖率计算方法，证明了三维空间的 Clifford 传感器网络模型与度量关系，对所建立的不依赖于特定坐标系的、对不同维数空间和不同目标一致的 Clifford 传感器网络连接图研究其容量定理，提出基于 Clifford 传感器网络连接覆盖模型的算法以及传感和通信采用光盘模型，研究 Clifford 传感器网络的最优覆盖问题，分析最优覆盖的界限。通过实验验证了该模型及其算法的合理性。

本书注重系统性与应用性，适合传感器网络与信号处理领域的学者与研究人员阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

Clifford 传感器网络覆盖/曹文明，何天成著. —北京：科学出版社，2011
ISBN 978-7-03-032611-9

Ⅰ.①C… Ⅱ.①曹… ②何… Ⅲ.①Clifford 分析-应用-无线电通信-传感器-网络分析 Ⅳ.①TP212

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 216372 号

责任编辑：张艳芬 / 责任校对：陈玉凤
责任印制：赵 博 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
新蕾印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2011 年 11 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2011 年 11 月第一次印刷 印张：12
字数：227 000

定价：50.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

无线传感器网络是由部署在监测区域内的大量微型传感器节点通过无线通信方式形成的一个多跳自组织网络。覆盖问题反映了传感器网络节点对指定监控区域的监控程度，是衡量无线传感器网络服务质量的一项基本指标。例如，在用于森林防火的传感器网络中，覆盖问题关心的是如何在最短的时间内监测到火源。无线传感器网络规模大，且节点能量、通信能力及计算能力有限，因此在研究无线传感器网络的覆盖问题时，需要考虑五个方面：

(1) 节点的部署方式。节点的部署方式可分为随机部署和计划部署。当传感器的工作环境物理不可达时，节点只能通过随机散布的方式来部署，此种方式称为随机部署。相反，当传感器可以被精确部署到工作区域中指定位置时，称为计划部署。

(2) 节点的感知范围和通信范围。在传感器网络中，网络覆盖由节点的感知范围决定，而网络的连通性则由节点的通信范围决定，于是不同的感知范围和通信范围会对节点的部署产生较大影响。

(3) 能量有效性。无线传感器网络能量有限，这就要求可以通过控制节点的工作状态，使冗余节点休眠，以此来最大化网络的生存时间。

(4) 算法特征。覆盖控制算法分为集中式算法和分布式算法。集中式算法是指由拥有网络全局信息的管理者对网络中所有节点统一地进行控制，这要求管理者有较强的计算、存储和通信能力；分布式算法则是指网络中的节点根据自身拥有的局部信息来进行局部计算和控制。

(5) 传感器节点的移动性。在一些传感器网络中，节点具有移动能力，而节点的移动将导致网络拓扑的变化，因此势必对网络的覆盖产生较大的影响。针对不同的应用场景，研究者已经提出了大量的覆盖机制。

本书在已有的传感器网络覆盖研究工作(多以欧氏几何解析和计算为主)基础上，分析了已有的传感器网络覆盖方法，而这类方法将目标和传感器节点之间的几何关系转换为目标与欧氏几何形体之间的几何关系，将传感器节点对目标区域的覆盖分析简化为对各节点对应几何形体之间的位置判别，所形成的覆盖分析模型放弃了对传感器节点之间以及其与目标之间几何关系的直接描述，从而导致对目标观测性能的解析分析依赖于当前选取的几何形体类别。当被覆盖目标区域具有复杂几何构造时，已有覆盖分析模型必须对各传感器节点对应的不同几何形体以及不同类型的目标(点目标、面目标和线目标)建立各自不同的解析计算模型，使整

个覆盖分析过程变得复杂曲折。本书通过基于 Clifford 代数的覆盖分析方法，提出了不依赖于特定坐标系的、对不同维数空间和不同目标一致的覆盖分析模型，从而简化了覆盖分析的计算过程。通过利用传感器节点与目标之间完整的相对几何信息，有效解决了传感器网络边缘节点的观测覆盖性能分析问题。

本书共 13 章，各章内容如下：

第 1 章介绍了 Clifford 几何代数理论。

第 2 章利用 Clifford 几何代数的混合型传感器网络覆盖理论，建立 Clifford 传感器网络覆盖模型，并利用传感器节点与目标之间完整的相对几何信息，解决了传感器网络的观测覆盖性能分析问题。

第 3、4 章利用这种网络研究了目标穿越网络时的暴露程度问题，建立目标穿越网络时的覆盖模型，利用 Clifford 几何代数定义了暴露的概念并根据 Voronoi 图的性质提出了目标的最佳间隙路径搜索算法，仿真实验结果表明，利用 Clifford 几何代数搜寻目标的最佳间隙路径具备实用性和有效性。

第 5 章利用 Clifford 几何代数，将实体的概念引入混合型目标的定义中，依据 Clifford 几何代数的性质提出了传感器网络的覆盖区域，定义了混合型目标在传感器网络中穿越时的暴露程度，为运用 Clifford 几何代数有效解决混合型目标在传感器网络中的跟踪和监测问题奠定基础。

第 6 章建立了 Clifford 代数的三维传感器网络覆盖模型，给出了检测目标运动的算法。利用 Clifford 旋量，可以比传统方法更方便地计算出目标在传感器节点覆盖区域的运动方程。理论和实验均证实了该方法的有效性。

第 7、8 章针对点目标无法满足节点与目标距离较近时传感器网络路径分析的问题，提出了基于 Clifford 代数传感器网络覆盖理论的平面目标路径分析方法，通过该方法，将目标作为二维平面目标进行计算，利用 Clifford 几何代数，给出了面目标的表达形式以及节点对面目标的覆盖率，并由此提出了基于平面目标的传感器网络最大间隙路径算法，还研究了含覆盖盲区的传感器网络目标穿越问题，定义了传感器网络中多边形覆盖盲区，讨论了目标在传感器网络中穿越路径的存在性，给出了最佳穿越路径的定义，并且通过网络几何模型在含覆盖盲区的传感器网络中提出了分布式目标穿越路径搜寻算法。

第 9～11 章建立了 Clifford 传感器网络连通覆盖模型，分析了 Clifford 传感器网络模型中的度量关系，研究了其容量定理以及基于 Clifford 传感器网络连通覆盖模型的算法，分析 Clifford 传感器网络连通覆盖模型最优性。

第 12 章提出了 Clifford 几何意义传感器网络连通的 γ-覆盖，分析 Clifford 代数传感器网络连通的 γ-覆盖可行性与最优性，并证明了它的性质。

第 13 章介绍了传感器网络在一些关键领域的广泛应用，如环境监测、公共安全和国土防空等。分析了 Clifford 代数传感器网络覆盖理论研究的重要性，给出

了今后的研究方向。

本书研究了 Clifford 传感器网络覆盖理论，书中许多内容是作者及其团队的最新研究成果，其中部分研究结果尚未正式发表。借本书出版之际，要特别感谢深圳大学的谢维信老师、上海大学的王瑞博士、西安电子科技大学的蒲丽娟同学。

本书得到了国家自然科学基金(No:60872126)、广东省自然科学基金(No:81518060010002)和深圳大学出版基金的资助，在此一并表示感谢。

书中疏漏和不足之处在所难免，恳请广大专家和学者批评指正。

曹文明　何天成

2011 年 10 月 8 日

目　录

第 1 章　Clifford 几何代数基本理论

1.1　Clifford 几何代数简介

数学语言可以很好地表达物理思想和概念。对于同一物理概念可以用多种不同的数学语言来描述，尽管这些语言并不完美而且都有各自的优缺点。这里要介绍的是一种功能强大的数学语言——几何代数。几何代数最早起源于 Clifford，作为一种数学工具，它既可以用来进行理论研究，又可以用于实际工程中。几何代数的普适性和便捷性，使得它将广泛应用于各个方面。本章介绍了几何代数学。阐述了三维欧氏空间几何代数中几何积、外积、内积的定义及由它们推出的几何算子的意义。同时还给出了几个使用几何代数学包括射影和斥量、正交化、旋度插补和线性偏移空间的交(线和面)的计算示范。强调叶片(blade)作为子空间的表示的重要性及用交(meet)和并(join)来计算。最后以二维空间的欧氏几何在三维同构模型中的表示结束本章。

几何代数学以系统的方法思考和计算几何。它在本质上和线性代数、欧几里得几何、微分几何、向量微积分及其他以前可能用过的方法不同，而是自然地将它们都包含在内，还包括其他内容，如复数和四元数。相信不久的将来，几何代数学将几何应用到机器人技术、机器视觉、计算机图形学等问题中将具有一定的应用价值。

几何代数学在几何中使用如此方便是因为能系统地讨论重要的几何概念，并且都包含在代数学的基本对象中。它将以神奇的力量改变人们的思维方式，并且几何代数学为读者提供了实现这些新思想的计算工具。

下面介绍一下读者可能感兴趣的相关内容。

1. 子空间和相关性

子空间是基本对象，如 a^b 表示由向量 a 和 b 张成的平面，它是一个对象；而 a^b^c 表示由向量 a、b 和 c 张成的体。那么线性相关就可以很容易地表示：a^$b=0$ 说明 a 和 b 是相关的，因为它们不能张成一个平面。

2. 子空间分割

在几何代数学中，可以用向量、平面等表示。这使得求解几何对象间的方程更加容易，并且有趣的是它允许非协同几何关系结构的存在。例如，向量 x 垂直于

平面 $a\wedge b$ 的分量就是 x、a 和 b 张成的体除以该平面的结果，可用公式表示为 $(x\wedge a\wedge b)(a\wedge b)^{-1}$。

3. 参数化及对偶性

通常用对象的对偶表示对象非常方便：平面用法向量表示，直线用它们的斜率和截距表示等。有数学家曾指出，这些具有二重性的对象属于对偶空间（平面的对偶并不是一个向量而是一个一次型），因此它们的表示是空间之间的映射。在几何代数学中，对象和它们的对偶属于同一代数，而且是代数相关的：一个对象的对偶就是该对象简单地除以它所在空间的体元素。这样做的好处是：对象转换为一个对偶并不会改变空间和数据结构。

4. 运算：向量的积

在几何代数学中，两个向量 b/a 定义为它们之间各个方面的旋转，既包括它们所在的平面也包括它们之间的夹角和放大系数。这些运算特征很容易理解并且不仅可以用于旋转向量，而且（使用同样的公式）可以用于旋转 n 维空间中的平面、体等。

5. 复数和四元数

在几何代数学中，人们将会自然地推出四元数，并且不需要任何特别的术语，而且非常清楚它们在 n 维空间中怎样描述旋度。它们是几何代数学中众多有效结构表示的其中之一。利用复数描述平面中的旋转又是另一个例子。人们发现在欧氏空间中每个平面 $a\wedge b$ 都有一个与之相关的复数系统，这就是前面提到的该平面的旋转算子 b/a。

6. 欧氏几何

欧氏几何的偏移线和偏移三角及它们的长度、交、正交分量等在几何代数学中都能自然地运算。方法就是找到几何代数学中包含该几何的一个适当的空间。这在几何代数学中可以用生成同构坐标来处理。向量表示偏移点，平面表示偏移线等。在几何代数学中这些都是计算的基本元素。

7. 交

交(meet)是几何对象间的一般关联关系。例如，在三维空间中两条线的交（如果这两条线相交）将返回交点和交点的大小（夹角的正弦）；若它们重合则返回一条线；若它们没有公共点则返回它们之间的欧氏距离。这里用几何代数学定义这些算子而不用分几种情况进行考虑。

8. 几何微分

本章不涉及几何对象的微分和积分，但几何微积分在连续几何应用中非常重要。通过标准的优化过程，即定义想要优化的指标，对旋度进行微分，并设置其值为零，找出极值，微分几何就可以找出一个最佳的方向解释一组测量数据。目前的许多技术都由通常的函数优化理论转向了几何对象优化。

1.1.1 几何代数的发展概述

19 世纪初，几何代数的一个重要发展是三维空间旋转的完美表示，而哈密顿(Hamilton)则做出了重要贡献。他经过十几年的研究，最终提出了四元数，将复数和相位角的旋转问题推广到了三维空间。尽管四元数可以很好地解决三维空间的旋转问题，但由于四元数是历史上第一个不满足乘法交换率的代数系，因此在很长一段时间内四元数并不被完全接受，直到哈密顿去世时，有关四元数的迷惑才得以解决。四元数顾名思义包含四个元素$\{1,i,j,k\}$，空间向量用其中的三个分量表示。

在哈密顿发明四元数的同时，德国数学家格拉斯曼首次引入了外积，也就是现在所说的由两个向量构成的二重矢量。外积的主要特点是乘法具有结合性

$$a\wedge(b\wedge c) = (a\wedge b)\wedge c \tag{1.1}$$

和负对称性

$$a\wedge b = -\, b\wedge a \tag{1.2}$$

在哈密顿宣布发现四元数的第二年，作为教师的格拉斯曼出版了他的包含复数扩张理论的《线性扩张论》。但由于他将神秘的教义和本来就抽象难懂的数学内容糅合在一起，再加上语言晦涩，因此这本书影响很小。然而，在他去世后，他的著作却深刻影响了当时流行的领域——微分形式和格拉斯曼变量。其中，格拉斯曼变量支撑了现代超对称和超弦理论的基础。

1878 年是几何代数发展的黄金时期，这一年 Clifford 在几何代数中引入了几何积的概念。作为当时理解格拉斯曼著作的一员，Clifford 将点积和外积统一到几何积中，使得几何积不仅满足格拉斯曼积的结合性，而且满足哈密顿积的可逆性，最终实现了格拉斯曼代数和哈密顿代数统一。在 Clifford 几何代数中，方程 $ab=C$ 的解可以表示为 $b=a^{-1}C$，而点积和外积单独作用方程的结果却不能像几何积那样简单地表示为 $b=a^{-1}C$。

Clifford 代数系统将四元数的各种优点结合到向量几何中去，使得 Clifford 几何代数具有解决数学物理问题中一个重要系统的潜力，但由于 Clifford 的英年早逝以及当时在整个科学界具有深刻影响的吉布斯提出的几何向量(对当时电磁学

的发展做出了重要贡献)的运用,Clifford 几何代数停止了发展。随着空间相对论时代的来临,物理学家对四维空间运算系统的需求提上了日程,至此,格拉斯曼和 Clifford 的几何代数理论已经被冷落了近一个时代。

1920 年,Clifford 代数因用于量子旋转的研究而再次受到人们的重视。其中,Pauli 和 Dirac 提出的旋转矩阵在量子理论研究中起着不可估量的作用。但是,当时的旋转矩阵仅仅被认为是一种没有几何意义的、单纯的代数。因此,如果仅仅把它看做是一种代数形式,那么人们仍采用它为旧称——Clifford 代数;若运用其内在的几何集形式,则采用几何代数的名字对其进行命名。由于几何积最早是由格拉斯曼提出和描述的,因此采用几何代数的名字更为恰当。

几何代数作为一种没有几何意义的代数存在了 40 年,直到 1960 年 Hestenes 揭示了 Pauli 和 Dirac 代数分别在三维和四维空间的几何意义,Clifford 代数才再次踏上了历史舞台。Hestenes 最初是为了深入研究量子力学的属性才采用 Clifford 几何代数的。但后来他意识到,Clifford 的几何代数系统作为一种通用的工具可以广泛用在数学、物理和工程中。Hestenes 花费很长时间将几何代数作为一种通用的数学语言进行推广,但直到现在,几何代数作为一种通用的语言才最终被人们所接受。之所以当时不愿接受几何代数,是因为在物理学家中盛行一种观点,即认为存在一种体现量子力学本质的代数。这种观点经过 50 年的检验证明是错误的,但得出这个结论耗费的时间太长了。

今天,人们仍然采用几何代数去研究黑洞、宇宙论、量子轨道(quantum tunnelling)、量子场理论、光动态压曲(beam dynamics and buckling)、机器人、计算机视觉等。不同的学科采用相同的代数系统,使得学科之间的融合成为可能,也使得一个人可以同时对多个学科做出贡献。

1.1.2 多重矢量

1. 内积

内积又称点积,记为 $a \cdot b$。在欧几里得空间中,内积是大于 0 的正数,定义为

$$a^2 = a \cdot a > 0, \quad \forall a \neq 0 \tag{1.3}$$

由此可得 Schwartz 不等式

$$\begin{aligned} &(a+\lambda b)^2 > 0, \quad \forall \lambda \\ \Rightarrow &a^2 + 2\lambda a \cdot b + \lambda^2 b^2 > 0, \quad \forall \lambda \\ \Rightarrow &(a \cdot b)^2 \leqslant a^2 b^2 \end{aligned} \tag{1.4}$$

用内积定义向量 a 和 b 之间夹角的余弦为

$$a \cdot b = |a||b|\cos(\theta) \tag{1.5}$$

在非欧氏几何空间中,如在闵可夫斯基空间中,式(1.5)是不成立的。但是,仍

可以引入正交结构框架,在此基础上将内积表示为 $a_\mu b^\mu$ 或 $\eta_{\mu\nu}a^\mu b^\nu$,其中 $\eta_{\mu\nu}$ 为度量张量。

2. 叉积

叉积仅适用于三维空间,向量 a 和向量 b 的叉积 $a\times b$ 由 a、b 唯一确定。垂直于向量 a 和 b 定义的平面与向量 a、b 满足右手定则,幅值为 $|v_1 \wedge v_2|=|v_1||v_2|\sin(\varphi)$。在右手正交结构 $\{e_i\}$ 中,将向量表示为各正交基和的形式,可以得到叉积的一般定义。在右手正交结构框架下,有

$$e_1\times e_2=e_3 \text{ 等} \tag{1.6}$$

根据下标索引,可以得到一种更通用的表示方法,即

$$e_i\times e_j=\varepsilon_{ijk}e_k \tag{1.7}$$

如果将向量 a、b 表示为各基向量和的形式,那么会发现

$$\begin{aligned} a\times b &= (a_ie_i)\times(b_je_j) \\ &= a_ib_j(e_i\times e_j) \\ &= (\varepsilon_{ijk}a_ib_j)e_k \end{aligned} \tag{1.8}$$

即几何定义反映了代数定义。几何代数的目标之一就是要用几何反映代数,从而避免新结构的引入。

1.1.3 外积

叉积的一个致命弱点是它只对于三维空间有效,尽管在二维空间中叉积已经发展很完善,但在四维空间中却不尽如人意。尤其是在四维空间中,两个向量的垂直向量是不唯一的。例如,取四个标准正交基 $e_1,\cdots,e_4$,由 e_3 和 e_4 任意的线性组合构成的向量都同时垂直于向量 e_1 和 e_2。

定义 1.1 向量 a 和 b 的外积是向量 a 和 b 在空间中张成的有方向并且有边界的平面区域,记为 $a\wedge b$(见图 1.1)。$a\wedge b$ 的幅值为 $|a||b|\sin\theta$,表示平面区域的面积。向量的外积从几何的角度表示了一个不依赖于垂直向量的平面。

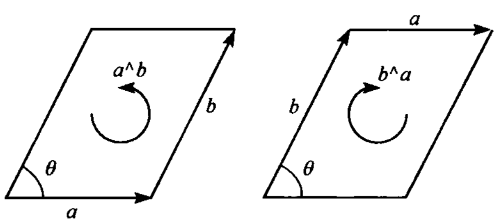

图 1.1 向量 a 和 b 的外积是面积大小为 $v_1\wedge v_2=|v_1||v_2|\sin\theta$ 的有向区域

外积生成的是一个既不同于标量，也不同于向量的新的数学实体，表示有方向性的面，称该数学实体为二重矢量。其可用以两向量为边的平行四边形表示。外积不满足乘法交换率，改变两向量的先后顺序所得到的有向平面的方向也随之改变。

外积具有如下性质。

(1) 二重矢量具有非对称性：

$$a\wedge b = -b\wedge a \tag{1.9}$$

这与它的几何意义是一致的。

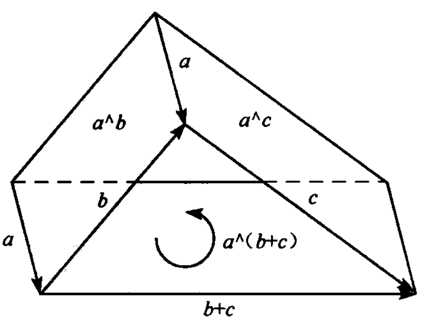

图 1.2　二重矢量加法

在三维空间中，二重矢量加法与矢量加法类似，方法都是将两个向量首尾依次相连，相加后得到的向量由初始向量的尾部指向终止向量的头部

(2) 二重矢量满足线性可加性，运算法则与矢量加法运算法则相同(见图 1.2)。在三维空间中，可以很清楚地看到二重矢量加法的效果，但在高维空间由于平面不总是共线的，因此效果不是很明显。由二重矢量的这一性质可以得到其他一些有趣的性质。

(3) 二重矢量服从分布率：

$$a\wedge(b+c) = a\wedge b + a\wedge c \tag{1.10}$$

该性质有助于人们理解二重矢量加法运算的实际意义。

注意到当 $a'=a+\lambda b$ 时，$a'\wedge b=a\wedge b$ 等式成立，即二重矢量并不由向量 a 和 b 唯一决定，因此用有方向的圆盘来表示二重矢量效果更好。

在三维空间中，二重矢量是三维的，任意二重矢量都可以用正交二重矢量基表示，即

$$\begin{aligned} a\wedge b &= (a_ie_i)\wedge(b_je_j) \\ &= (a_2b_3 - b_3a_2)e_2\wedge e_3 + (a_3b_1 - b_1a_3)e_3\wedge e_1 \\ &\quad + (a_1b_2 - b_2a_1)e_1\wedge e_2 \end{aligned} \tag{1.11}$$

在这种结构下，各基二重矢量由各基矢量叉积的和构成。一般的，二重矢量各基矢量记为 $a_{[i}b_{j]}$，其中 $a_{[i}b_{j]}$ 反映了非对称性。

1.1.4　几何积

前面已经介绍了具有对称性的内积和具有非对称性的外积。Clifford 的伟大之处在于他将这两种运算结合起来，形成几何积。几何积记为 ab，其满足

$$ab = a\cdot b + a\wedge b \tag{1.12}$$