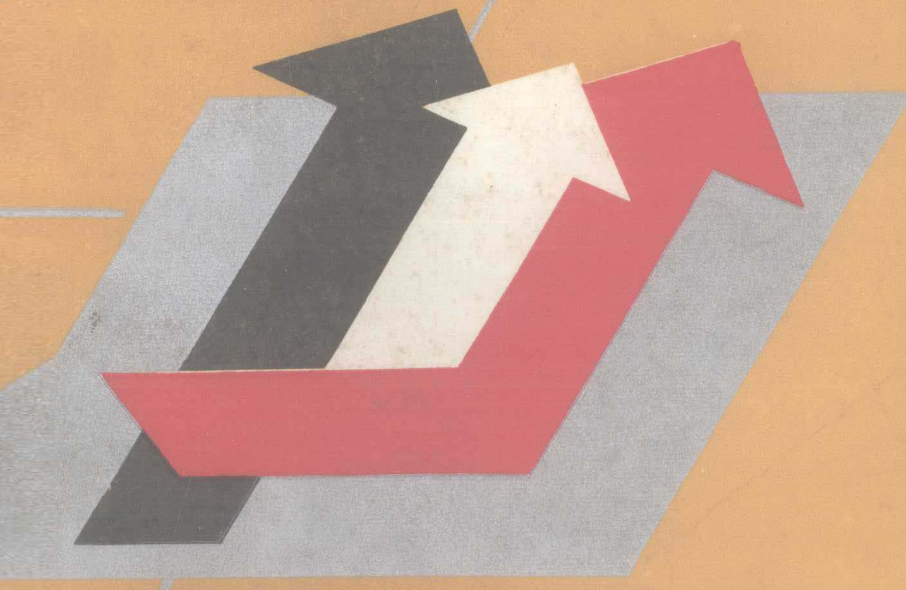
中等专业学校适用

# 数学

## 第4册

## 应用数学

辽宁省中专数学教材编写组 编



机械工业出版社

中等专业学校适用

# 数学

## 第4册

## 应用数学

辽宁省中专数学教材编写组 编

机械工业出版社

(京)新登字054号

本书为应用数学(第 4 册)，主要包括微分方程、线性代数、级数、拉氏变换、概率、数理统计、多元函数微分学等内容。全书论述清楚、语句通顺，并配有大量习题，便于巩固所学内容。

本书可作为中等专业学校教材，也可供有关人员参考。

数　学

第 4 册

应 用 数 学

辽宁省中专数学教材编写组　编

*

责任编辑：韩雪清　　责任校对：孙志筠

封面设计：刘　代　　版式设计：冉晓华

责任印制：王国光

*

机械工业出版社出版(北京阜成门外百万庄南街一号)

(北京市书刊出版业营业许可证出字第117号)

机械工业出版社京丰印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本787×1092 1/32·印张13 5/8·字数299千字

1992年 7 月北京第 1 版·1992年 7 月北京第 1 次印刷

印数00,001—12,760·定价：5.75元

*

ISBN 7-111-03196-2/O·78

**主编**：陶增骈

**副主编**：张咸卓、李大发、由震云

**编委**：（按姓氏笔划为序）

于殿生、王化久、王福琛、马　骦、方桂梅、邓崇尧、由震云、刘晓东、李大发、李玉臣、李学之、李廷雄、朱学喜、张咸卓、孟繁杰、胡晋延、赵广春、陶增骈、贾景华、崔润泉、蔡恒利

# 前　言

本教材是以1991年国家教育委员会职业教育司审订的《工科中等专业学校数学教学大纲》为依据，根据中等专业学校数学教学内容要降低理论、加强应用，整体优化的原则，在辽宁省教育委员会的指导下，组织辽宁省部分中等专业学校长期从事中专数学教学的高级讲师、讲师进行编写的。在编写内容上注意了与现行初中数学教材的衔接；在保证基础知识的基础上，加强了基本应用；在推理论证的方式选择上，力求避繁就简、科学直观。为了适应当今科学技术发展的需要，在本书的附录里，增添了计算器使用的内容。

本教材分基础数学（第1、2、3册）和应用数学（第4册）两部分，招收初中毕业生的学校用1～4册，招收高中毕业生的学校用3～4册。

本册为中专数学教材第4册（应用数学），包括微分方程、线性代数、级数、拉氏变换、概率、数理统计、多元函数微分学等内容。参加本册编写的有：李玉臣、郑素梅、刘静、甘金南、任春英、梁晓俐、王庆波、王再兴。本册主编为辽河石油学校李玉臣、辽宁省医疗器械学校刘静，主审为丹东丝绸工业学校赵广春。渤海船舶工业学校杜吉佩参加了部分章节的审订。

由于时间仓促，水平所限，不当之处敬请读者批评指正，以便修订。

辽宁省中专数学教材编写组

1992.3

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbo

# 目　录

# 第二十一章　常微分方程解法的进一步讨论

在不定积分的应用中，我们给出了微分方程的基本概念，并对可分离变量微分方程进行了讨论。但在许多实际问题中，还必须对微分方程作进一步的研究。本章将对一阶、二阶线性微分方程作进一步的探讨。

## §21-1　一阶线性微分方程

**定义**　形如

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{21-1}$$

的微分方程叫作一阶线性微分方程，其中$P(x)$、$Q(x)$为$x$的已知函数。线性是指未知函数$y$和它的导数$y'$的指数都是一次的。

当$Q(x) \equiv 0$时，式（21-1)就成为

$$y' + P(x)y = 0 \tag{21-2}$$

我们把微分方程（21-2）叫作一阶线性齐次微分方程。

如果$Q(x)$不恒等于零，微分方程（21-1)就叫作一阶线性非齐次微分方程。其中$Q(x)$叫作非齐次项。

下面讨论一阶线性齐次微分方程解的求法。

显然微分方程$y' + P(x)y = 0$是可分离变量的微分方程，可用分离变量法求它的通解。把它改写为

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx$$

两边积分，得

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int P(x)\mathrm{d}x$$

即

$$\ln y = -\int P(x)\mathrm{d}x + C_1$$

$$y = e^{-\int P(x)\mathrm{d}x + C_1}$$

$$y = e^{C_1} e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

令 $C = e^{C_1}$ 得

$$y = Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \quad (C \neq 0) \tag{21-3}$$

在式（21-3）中，当 $C = 0$ 则

$$y = 0$$

这时方程（21-2）仍然成立，就是说 $y = 0$ 也是方程的解。这样，式（21-3）中的 $C$ 就可以为任意常数。因此，一阶线性齐次微分方程（21-2）的通解是

$$y = Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \quad (C\text{ 为任意常数}) \tag{21-4}$$

下面我们来研究一阶线性非齐次微分方程的求解问题。

将式（21-1）改写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \left[\frac{Q(x)}{y} - P(x)\right]\mathrm{d}x$$

两边积分得

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{Q(x)}{y}\mathrm{d}x - \int P(x)\mathrm{d}x$$

$$\ln y = \int \frac{Q(x)}{y}\mathrm{d}x - \int P(x)\mathrm{d}x$$

即

$$y = e^{\int \frac{Q(x)}{y}\mathrm{d}x - \int P(x)\mathrm{d}x}$$

$$y = e^{\int \frac{Q(x)}{y}\mathrm{d}x} e^{\int -P(x)\mathrm{d}x} \tag{21-5}$$

从式（21-5）中可以看出，方程（21-1）的解是两个函数的乘积。一个函数是方程（21-1）所对应的齐次方程（21-2）的解；另一个是 $x$ 的函数。不妨设 $C(x) = e^{\int \frac{Q(x)}{y}\mathrm{d}x}$，这

时式(21-5)可改写为

$$y=C(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \qquad (21\text{-}6)$$

这就是方程 (21-1)的解。与方程 (21-1) 对应的齐次方程 (21-2) 的通解比较，就是把常数$C$变成$x$的函数，也就是说，只要求出$C(x)$，方程 (21-1) 的解即可求得

将$y=C(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$代入方程 (21-1) 得

$$C'(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}-P(x)C(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$
$$+P(x)C(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}=Q(x)$$

整理后即得

$$C'(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}=Q(x)$$
$$C'(x)=Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}$$

两边积分得

$$C(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C$$

代入式 (21-6)得

$$y=e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right] \qquad (21\text{-}7)$$

这就是一阶线性非齐次微分方程的通解。

上面我们虽然得到了一阶线性非齐次微分方程的通解公式，但这个公式比较复杂。因此，在许多情况下用推导这个公式的方法求解。我们把变常数为函数求解的这种方法称为**常数变易法**。

**例1** 用两种方法求微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y\operatorname{ctg}x=2x\sin x$$

的通解。

**解** 方法1 (常数变易法)

所求方程对应的齐次方程为

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbo

$$\frac{dy}{dx}=y\operatorname{ctg}x$$

即
$$\frac{dy}{y}=\operatorname{ctg}x\,dx$$

两边积分得

$$\ln|y|=\ln|\sin x|+C_1$$
$$y=\pm e^{C_1}\sin x$$

令 $C=\pm e^{C_1}$ 则

$$y=C\sin x$$

根据常数变易法，令

$$y=C(x)\sin x$$

为所求微分方程的通解，把它代入所求方程，得

$$C'(x)\sin x+C(x)\cos x-C(x)\sin x\frac{\cos x}{\sin x}=2x\sin x$$

即

$$C'(x)\sin x=2x\sin x$$
$$C'(x)=2x$$

两边积分得

$$C(x)=x^2+C$$

故所求微分方程的通解为

$$y=\sin x(x^2+C)$$

方法2（公式法）

$P(x)=-\operatorname{ctg}x$，$Q(x)=2x\sin x$ 代入公式（21-7）得

$$y=e^{\int\operatorname{ctg}x\,dx}\left[\int 2x\sin x\,e^{-\int\operatorname{ctg}x\,dx}dx+C\right]$$
$$=e^{\ln|\sin x|}\left[\int 2x\sin x\,e^{-\ln|\sin x|}dx+C\right]$$
$$=|\sin x|\left[\int 2x\sin x\frac{1}{|\sin x|dx}+C\right]$$
$$=\sin x\left[\int 2x\,dx+C\right]$$
$$=(x^2+C)\sin x$$

**例2** 求微分方程

$$x^2\mathrm{d}y+(2xy-x+1)\mathrm{d}x=0$$

满足初始条件$y|_{x=1}=0$的特解。

**解** 把所求方程改写为

$$y'+\frac{2}{x}y=\frac{x-1}{x^2}$$

它所对应的齐次方程为

$$y'+\frac{2}{x}y=0$$

该齐次方程的通解为

$$y=Ce^{-\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}=Ce^{-\ln x^2}=\frac{C}{x^2}$$

令所求方程的通解为

$$y=\frac{C(x)}{x^2}$$

将它代入改写后的方程有

$$C'(x)\frac{1}{x^2}-C(x)\frac{2}{x^3}+\frac{2}{x^3}C(x)=\frac{x-1}{x^2}$$

即

$$C'(x)\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$$

$$C'(x)=x-1$$

两边积分得

$$C(x)=\frac{1}{2}x^2-x+C$$

故所求微分方程的通解为

$$y=\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{2}x^2-x+C\right)$$

将初始条件$y|_{x=1}=0$代入上式，有

$$0=\frac{1}{2}-1+C$$

$$C=\frac{1}{2}$$

故方程满足初始条件的特解为

$$y=\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}\right)$$

即

$$y=\frac{1}{2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}$$

下面将本书所遇到的一阶线性微分方程二种类型及其解法归结为表21-1。

表 21-1

| 类　型 | 方　程 | 解　法 |
|---|---|---|
| 齐次方程 | $\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$ | 分离变量，两边积分，公式为 $y=ce^{-\int P(x)dx}$ |
| 非齐次方程 | $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ | 常数变易法，公式为 $y=e^{-\int P(x)dx}[\int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}dx+C]$ |

## 练　习

1．求下列微分方程的通解：

（1）$y'+y=e^{-x}$　（2）$y'+y=2x$

（3）$y'+\frac{y}{x}=\sin x$　（4）$y'\cos x+y\sin x=1$

2．求下列微分方程满足初始条件的特解：

（1）$y'-y=2xe^{2x}$，$y|_{x=0}=1$

（2）$y'+\frac{1-2x}{x^2}y=1$，$y|_{x=1}=0$

## 习 题 21-1

1．求下列微分方程的通解：

（1）$y'-3xy=2x$

（2）$y'+\frac{2}{x}y=\frac{e^{-x^2}}{x}$

（3）$(1+x^2)dy-2xydx=(1+x^2)^2dx$

（4）$2ydx+(y^2-6x)dy=0$（提示：可将$x$看成是$y$的函数）

（5）$(x^2-1)y'-xy+a=0$

（6）$y'=xe^{-x^2}-2xy$

2．求下列微分方程满足初始条件的特解：

（1）$y'-y=\cos x$，$y|_{x=0}=0$

（2）$y'-\frac{2}{1-x^2}y-x-1=0$，$y|_{x=0}=0$

（3）$xy'+y-e^x=0$，$y|_{x=a}=b$

（4）$y'+\frac{y}{x}=\frac{\sin x}{x}$，$y|_{x=\pi}=1$

## §21-2 一阶微分方程应用举例

微分方程在科技中有着广泛的应用，本节就一阶微分方程应用作一个最基本的介绍。

**例1** 求一曲线，使其每一点的切线斜率为$2x+y$，且通过点（0,0）。

**解** 设点$(x,y)$为所求曲线上的任意一点。

依题意应有方程

$$y'=2x+y,\ 且y|_{x=0}=0$$

这显然是一阶线性非齐次微分方程，有

$$y=e^{\int dx}\left[\int 2xe^{-\int dx}dx+C\right]$$
$$=e^{x}\left[\int 2xe^{-x}dx+C\right]$$
$$=e^{x}\left[-2xe^{-x}+\int 2e^{-x}dx+C\right]$$
$$=e^{x}[-2xe^{-x}-2e^{-x}+C]$$
$$=-2x-2+Ce^{x}$$

将初始条件$y|_{x=0}=0$代入上式有

$$0=-2+C$$

即
$$C=2$$

则所求曲线方程为

$$y=2e^{x}-2x-2$$

**例2** 物体在空气中冷却的速度与物体的温度和空气温度之差成正比例。已知空气的温度为20℃时，物体在20min内，由100℃降到60℃。试求物体的温度与时间的函数关系。

**解** 用$t$表示时间，$Q$表示物体的温度，温度对时间的导数就是物体温度变化的速度。由题意得

$$\frac{dQ}{dt}=-k(Q-20)$$

它显然是可分离变量的微分方程，分离变量有

$$\frac{dQ}{Q-20}=-kdt$$

两边积分有
$$\int\frac{dQ}{Q-20}=-\int kdt$$
$$\ln(Q-20)=-kt+\ln C$$
$$Q-20=Ce^{-kt}$$
$$Q=Ce^{-kt}+20$$

将初始条件$Q|_{t=0}=100$，$Q|_{t=20}=60$分别代入上式有

$$\begin{cases}100=20+C\\60=20+Ce^{-20k}\end{cases}$$

解之得

$$C=80,\quad k=\frac{1}{20}\ln 2\approx 0.0347$$

则
$$Q=80e^{-\frac{\ln 2}{20}t}+20$$
$$=80e^{-0.0347t}+20$$

即为所求物体与时间的函数关系。

从上面两个例子中，我们可以总结出用微分方程解实际问题的步骤为：

（1）根据已知条件，设未知函数，建立微分方程，确定初始条件。

（2）求出微分方程的通解。

（3）从初始条件中，确定任意常数的值，求出微分方程的特解。

**例3** 某车间的体积为$30\times30\times12\text{m}^3$，空气中含有$0.12\%$的$CO_2$。为了保证工人的身体健康，用鼓风机从通风口以风量为$1500\text{m}^3/\text{min}$输入含$0.04\%CO_2$的新鲜空气（如图21-1），假定通入的空气能与车间的原有空气立即均匀混合，而后以相同的风量向外排出。试求该车间空气中$CO_2$的含量随时间的变化规律。

**解** （1）建立微分方程

设在$t$时刻，车间内含$CO_2$为$y(t)$，单位为$\text{m}^3$，因为输入$1500\text{m}^3/\text{min}$新鲜

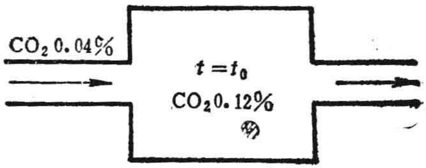



图21-1

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbo