

中等专业学校适用

# 数学

第4册

应用数学

辽宁省中专数学教材编写组 编



机械工业出版社

中 等 专 业 学 校 适 用

# 数 学

第 4 册

应用数学

辽宁省中专数学教材编写组 编

机 械 工 业 出 版 社

(京)新登字054号

本书为应用数学(第4册)，主要包括微分方程、线性代数、级数、拉氏变换、概率、数理统计、多元函数微分学等内容。全书论述清楚，语句通顺，并配有大量习题，便于巩固所学内容。

本书可作为中等专业学校教材，也可供有关人员参考。

## 数 学

第 4 册

应 用 数 学

辽宁省中专数学教材编写组 编

\*

责任编辑：韩雪清 责任校对：孙志筠

封面设计：刘代 版式设计：冉晓华

责任印制：王国光

\*

机械工业出版社出版(北京阜成门外百万庄南街一号)

(北京市书刊业营业许可证出字第117号)

机械工业出版社京丰印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

\*

开本787×1092<sup>1</sup>/<sub>32</sub>·印张13<sup>5</sup>/<sub>8</sub>·字数299千字

1992年7月北京第1版·1992年7月北京第1次印刷

印数00,001—12,760·定价：5.75元

\*

ISBN 7-111-03196-2/O·78

**主编：**陶增骅

**副主编：**张咸卓、李大发、由震云

**编委：**(按姓氏笔划为序)

于殿生、王化久、王福琛、马 骥、  
方桂梅、邓崇尧、由震云、刘晓东、  
李大发、李玉臣、李学之、李廷雄、  
朱学喜、张咸卓、孟繁杰、胡晋延、  
赵广春、陶增骅、贾景华、崔润泉、  
蔡恒利

## 前　　言

本教材是以1991年国家教育委员会职业教育司审订的《工科中等专业学校数学教学大纲》为依据，根据中等专业学校数学教学内容要降低理论、加强应用，整体优化的原则，在辽宁省教育委员会的指导下，组织辽宁省部分中等专业学校长期从事中专数学教学的高级讲师、讲师进行编写的。在编写内容上注意了与现行初中数学教材的衔接；在保证基础知识的基础上，加强了基本应用；在推理论证的方式选择上，力求避繁就简、科学直观。为了适应当今科学技术发展的需要，在本书的附录里，增添了计算器使用的内容。

本教材分基础数学（第1、2、3册）和应用数学（第4册）两部分，招收初中毕业生的学校用1～4册，招收高中毕业生的学校用3～4册。

本册为中专数学教材第4册（应用数学），包括微分方程、线性代数、级数、拉氏变换、概率、数理统计、多元函数微分学等内容。参加本册编写的有：李玉臣、郑素梅、刘静、甘金南、任春英、梁晓俐、王庆波、王再兴。本册主编为辽河石油学校李玉臣、辽宁省医疗器械学校刘静，主审为丹东丝绸工业学校赵广春。渤海船舶工业学校杜吉佩参加了部分章节的审订。

由于时间仓促，水平所限，不当之处敬请读者批评指正，以便修订。

辽宁省中专数学教材编写组

1992.3

试读结束：需要全本请在线购买：[www.ertongbo.com](http://www.ertongbo.com)

## 目 录

第二十一章 常微分方程解法的进一步讨论	1
§21-1 一阶线性微分方程	1
§21-2 一阶微分方程应用举例	7
§21-3 二阶常系数线性齐次微分方程	12
§21-4 二阶常系数线性非齐次微分方程	19
复习题二十一	30
第二十二章 行列式、矩阵与线性方程组	32
§22-1 二、三阶行列式	32
§22-2 三阶行列式的性质	40
§22-3 $n$ 阶行列式	48
§22-4 矩阵的概念及运算	56
§22-5 逆矩阵与矩阵的初等变换	69
§22-6 一般线性方程组简介	81
复习题二十二	92
第二十三章 无穷级数	96
§23-1 数项级数	96
§23-2 数项级数的审敛法	107
§23-3 傅里叶级数	116
§23-4 周期为 $2l$ 的周期函数的傅里叶级数	130
§23-5 傅里叶级数的复数形式	136
复习题二十三	141
第二十四章 拉普拉斯变换	144
§24-1 拉氏变换的基本概念和性质	144
§24-2 拉氏逆变换的求法	161

§24-3 拉氏变换的应用举例 .....	166
复习题二十四 .....	174
<b>第二十五章 概率初步 .....</b>	<b>175</b>
§25-1 随机事件 .....	176
§25-2 概率 .....	187
§25-3 概率的加法公式, 逆事件的概率 .....	197
§25-4 条件概率, 乘法公式、事件的独立性 .....	201
§25-5 随机变量及其概率分布 .....	212
§25-6 连续型随机变量的概率分布 .....	223
§25-7 随机变量的数字特征 .....	243
复习题二十五 .....	261
<b>第二十六章 数理统计初步 .....</b>	<b>266</b>
§26-1 基本概念 .....	266
§26-2 常用统计量的分布 .....	271
§26-3 参数的点估计 .....	283
§26-4 参数的区间估计 .....	293
§26-5 参数的假设检验 .....	300
§26-6 一元线性回归分析 .....	317
复习题二十六 .....	331
<b>第二十七章 多元函数微分法 .....</b>	<b>333</b>
§27-1 空间解析几何简介 .....	333
§27-2 多元函数的概念 .....	342
§27-3 二元函数的极限与连续性 .....	346
§27-4 偏导数 .....	350
§27-5 全微分 .....	356
§27-6 复合函数的微分法 .....	361
§27-7 隐函数的求导法 .....	365
§27-8 多元函数的极值与最值 .....	369
复习题二十七 .....	373

附录	376
附录 I 回归系数 $\hat{a}$ 、 $\hat{b}$ 的公式推导	376
附录 II 预测与控制简述	379
附表 I 泊松分布表	383
附表 II 标准正态分布表	386
附表 III $\chi^2$ 分布表	388
附表 IV t 分布表	392
附表 V 相关系数检验表	394
习题答案	395
参考文献	426

## 第二十一章 常微分方程解法的进一步讨论

在不定积分的应用中，我们给出了微分方程的基本概念，并对可分离变量微分方程进行了讨论。但在许多实际问题中，还必须对微分方程作进一步的研究。本章将对一阶、二阶线性微分方程作进一步的探讨。

### §21-1 一阶线性微分方程

定义 形如

$$y' + P(x)y = Q(x) \quad (21-1)$$

的微分方程叫作一阶线性微分方程，其中  $P(x), Q(x)$  为  $x$  的已知函数。线性是指未知函数  $y$  和它的导数  $y'$  的指数都是一次的。

当  $Q(x) \equiv 0$  时，式 (21-1) 就成为

$$y' + P(x)y = 0 \quad (21-2)$$

我们把微分方程 (21-2) 叫作一阶线性齐次微分方程。

如果  $Q(x)$  不恒等于零，微分方程 (21-1) 就叫作一阶线性非齐次微分方程。其中  $Q(x)$  叫作非齐次项。

下面讨论一阶线性齐次微分方程解的求法。

显然微分方程  $y' + P(x)y = 0$  是可分离变量的微分方程，可用分离变量法求它的通解。把它改写为

$$-\frac{dy}{y} = -P(x)dx$$

两边积分，得

$$\int \frac{dy}{y} = - \int P(x) dx$$

即

$$\ln y = - \int P(x) dx + C_1$$

$$y = e^{- \int P(x) dx + C_1}$$

$$y = e^{C_1} e^{- \int P(x) dx}$$

令  $C = e^{C_1}$ , 得

$$y = Ce^{- \int P(x) dx} (C \neq 0) \quad (21-3)$$

在式 (21-3) 中, 当  $C = 0$  则

$$y = 0$$

这时方程 (21-2) 仍然成立, 就是说  $y = 0$  也是方程的解。这样, 式 (21-3) 中的  $C$  就可以为任意常数。因此, 一阶线性齐次微分方程 (21-2) 的通解是

$$y = Ce^{- \int P(x) dx} (C \text{ 为任意常数}) \quad (21-4)$$

下面我们来研究一阶线性非齐次微分方程的求解问题。

将式 (21-1) 改写为

$$\frac{dy}{y} = \left[ \frac{Q(x)}{y} - P(x) \right] dx$$

两边积分得

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{Q(x)}{y} dx - \int P(x) dx$$

$$\ln y = \int \frac{Q(x)}{y} dx - \int P(x) dx$$

即

$$y = e^{\int \frac{Q(x)}{y} dx - \int P(x) dx}$$

$$y = e^{\int \frac{Q(x)}{y} dx} e^{\int -P(x) dx} \quad (21-5)$$

从式 (21-5) 中可以看出, 方程 (21-1) 的解是两个函数的乘积。一个函数是方程 (21-1) 所对应的齐次方程 (21-2) 的解; 另一个是  $x$  的函数。不妨设  $C(x) = e^{\int \frac{Q(x)}{y} dx}$ , 这

时式(21-5)可改写为

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx} \quad (21-6)$$

这就是方程(21-1)的解。与方程(21-1)对应的齐次方程(21-2)的通解比较，就是把常数C变成x的函数，也就是说，只要求出C(x)，方程(21-1)的解即可求得

将  $y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$  代入方程(21-1)得

$$\begin{aligned} C'(x)e^{-\int P(x)dx} - P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx} \\ + P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x) \end{aligned}$$

整理后即得

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

$$C'(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

两边积分得

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C$$

代入式(21-6)得

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left[ \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right] \quad (21-7)$$

这就是一阶线性非齐次微分方程的通解。

上面我们虽然得到了一阶线性非齐次微分方程的通解公式，但这个公式比较复杂。因此，在许多情况下用推导这个公式的方法求解。我们把变常数为函数求解的这种方法称为常数变易法。

**例1** 用两种方法求微分方程

$$\frac{dy}{dx} - y \operatorname{ctg} x = 2x \sin x$$

的通解。

**解 方法1 (常数变易法)**

所求方程对应的齐次方程为

$$\frac{dy}{dx} = y \operatorname{clg} x$$

即

$$\frac{dy}{y} = \operatorname{ctg} x dx$$

两边积分得

$$\ln |y| = \ln |\sin x| + C_1$$

$$y = \pm e^{C_1} \sin x$$

令  $C = \pm e^{C_1}$  则

$$y = C \sin x$$

根据常数变易法，令

$$y = C(x) \sin x$$

为所求微分方程的通解，把它代入所求方程，得

$$C'(x) \sin x + C(x) \cos x - C(x) \sin x \frac{\cos x}{\sin x} = 2x \sin x$$

即

$$C'(x) \sin x = 2x \sin x$$

$$C'(x) = 2x$$

两边积分得

$$C(x) = x^2 + C$$

故所求微分方程的通解为

$$y = \sin x (x^2 + C)$$

方法2 (公式法)

$P(x) = -\operatorname{ctg} x$ ,  $Q(x) = 2x \sin x$  代入公式 (21-7) 得

$$y = e^{\int \operatorname{ctg} x dx} \left[ \int 2x \sin x e^{-\int \operatorname{ctg} x dx} dx + C \right]$$

$$= e^{\ln |\sin x|} \left[ \int 2x \sin x e^{-\ln |\sin x|} dx + C \right]$$

$$= |\sin x| \left[ \int 2x \sin x \frac{1}{|\sin x|} dx + C \right]$$

$$= \sin x \left[ \int 2x dx + C \right]$$

$$= (x^2 + C) \sin x$$

## 例2 求微分方程

$$x^2 dy + (2xy - x + 1) dx = 0$$

满足初始条件  $y|_{x=1} = 0$  的特解。

解 把所求方程改写为

$$y' + \frac{2}{x} y = \frac{x-1}{x^2}$$

它所对应的齐次方程为

$$y' + \frac{2}{x} y = 0$$

该齐次方程的通解为

$$y = C e^{-\int \frac{2}{x} dx} = C e^{-2 \ln x} = \frac{C}{x^2}$$

令所求方程的通解为

$$y = \frac{C(x)}{x^2}$$

将它代入改写后的方程有

$$C'(x) \frac{1}{x^2} - C(x) \frac{2}{x^3} + \frac{2}{x^3} C(x) = -\frac{x-1}{x^2}$$

即

$$C'(x) \frac{1}{x^2} = -\frac{x-1}{x^2}$$

$$C'(x) = x - 1$$

两边积分得

$$C(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + C$$

故所求微分方程的通解为

$$y = \frac{1}{x^2} \left( \frac{1}{2}x^2 - x + C \right)$$

将初始条件  $y|_{x=1} = 0$  代入上式，有

$$0 = \frac{1}{2} - 1 + C$$

$$C = \frac{1}{2}$$

故方程满足初始条件的特解为

$$y = \frac{1}{x^2} \left( \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} \right)$$

即

$$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}$$

下面将本书所遇到的一阶线性微分方程二种类型及其解法归结为表21-1。

表 21-1

类 型	方 程	解 法
齐次方程	$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$	分离变量，两边积分，公式为 $y = ce^{-\int P(x)dx}$
非齐次方程	$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$	常数变易法，公式为 $y = e^{-\int P(x)dx} [\int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx + C]$

### 练习

1. 求下列微分方程的通解：

$$(1) y' + y = e^{-x} \quad (2) y' + y = 2x$$

$$(3) y' + \frac{y}{x} = \sin x \quad (4) y' \cos x + y \sin x = 1$$

2. 求下列微分方程满足初始条件的特解：

$$(1) y' - y = 2xe^{2x}, \quad y|_{x=0} = 1$$

$$(2) y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1, \quad y|_{x=1} = 0$$

## 习 题 21-1

1. 求下列微分方程的通解:

$$(1) \quad y' - 3xy = 2x$$

$$(2) \quad y' + \frac{2}{x}y = \frac{e^{-x^2}}{x}$$

$$(3) \quad (1+x^2)dy - 2xydx = (1+x^2)^2dx$$

$$(4) \quad 2ydx + (y^2 - 6x)dy = 0 \quad (\text{提示: 可将 } x \text{ 看成是 } y \text{ 的函数})$$

$$(5) \quad (x^2 - 1)y' - xy + a = 0$$

$$(6) \quad y' = xe^{-x^2} - 2xy$$

2. 求下列微分方程满足初始条件的特解:

$$(1) \quad y' - y = \cos x, \quad y|_{x=0} = 0$$

$$(2) \quad y' - \frac{2}{1-x^2}y - x - 1 = 0, \quad y|_{x=0} = 0$$

$$(3) \quad xy' + y - e^x = 0, \quad y|_{x=a} = b$$

$$(4) \quad y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}, \quad y|_{x=\pi} = 1$$

## §21-2 一阶微分方程应用举例

微分方程在科技中有着广泛的应用, 本节就一阶微分方程应用作一个最基本的介绍。

**例1** 求一曲线, 使其每一点的切线斜率为 $2x+y$ , 且通过点 $(0,0)$ 。

**解** 设点 $(x,y)$ 为所求曲线上的任意一点。

依题意应有方程

$$y' = 2x + y, \quad \text{且 } y|_{x=0} = 0$$

这显然是一阶线性非齐次微分方程, 有

$$\begin{aligned}
 y &= e^{\int dx} \left[ \int 2xe^{-\int dx} dx + C \right] \\
 &= e^x \left[ \int 2xe^{-x} dx + C \right] \\
 &= e^x \left[ -2xe^{-x} + \int 2e^{-x} dx + C \right] \\
 &= e^x \left[ -2xe^{-x} - 2e^{-x} + C \right] \\
 &= -2x - 2 + Ce^x
 \end{aligned}$$

将初始条件  $y|_{x=0}=0$  代入上式有

$$0 = -2 + C$$

即

$$C = 2$$

则所求曲线方程为

$$y = 2e^x - 2x - 2$$

**例2** 物体在空气中冷却的速度与物体的温度和空气温度之差成正比例。已知空气的温度为  $20^{\circ}\text{C}$  时，物体在  $20\text{min}$  内，由  $100^{\circ}\text{C}$  降到  $60^{\circ}\text{C}$ 。试求物体的温度与时间的函数关系。

**解** 用  $t$  表示时间， $Q$  表示物体的温度，温度对时间的导数就是物体温度变化的速度。由题意得

$$\frac{dQ}{dt} = -k(Q - 20)$$

它显然是可分离变量的微分方程，分离变量有

$$\frac{dQ}{Q-20} = -kdt$$

两边积分有

$$\int \frac{dQ}{Q-20} = - \int kdt$$

$$\ln(Q-20) = -kt + \ln C$$

$$Q-20 = Ce^{-kt}$$

$$Q = Ce^{-kt} + 20$$

将初始条件  $Q|_{t=0}=100$ ,  $Q|_{t=20}=60$  分别代入上式有

$$\begin{cases} 100 = 20 + C \\ 60 = 20 + Ce^{-20k} \end{cases}$$

解之得

$$C = 80, \quad k = \frac{1}{20} \ln 2 \approx 0.0347$$

$$\text{则 } Q = 80e^{-\frac{\ln 2}{20}t} + 20 \\ = 80e^{-0.0347t} + 20$$

即为所求物体与时间的函数关系。

从上面两个例子中，我们可以总结出用微分方程解实际问题的步骤为：

(1) 根据已知条件，设未知函数，建立微分方程，确定初始条件。

(2) 求出微分方程的通解。

(3) 从初始条件中，确定任意常数的值，求出微分方程的特解。

例3 某车间的体积为  $30 \times 30 \times 12 \text{ m}^3$ ，空气中含有 0.12% 的  $\text{CO}_2$ 。为了保证工人的身体健康，用鼓风机从通风口以风量为  $1500 \text{ m}^3/\text{min}$  输入含 0.04%  $\text{CO}_2$ 的新鲜空气（如图 21-1），假定通入的空气能与车间的原有空气立即均匀混合，而后以相同的风量向外排出。试求该车间空气中  $\text{CO}_2$ 的含量随时间的变化规律。

解 (1) 建立  
微分方程

设在  $t$  时刻，车间内含  $\text{CO}_2$  为  $y(t)$ ，  
单位为  $\text{m}^3$ ，因为输入  $1500 \text{ m}^3/\text{min}$  新鲜

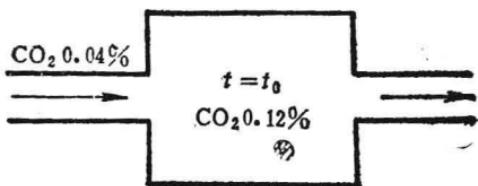


图 21-1

试读结束：需要全本请在线购买：[www.ertongbo.com](http://www.ertongbo.com)