考进实验班

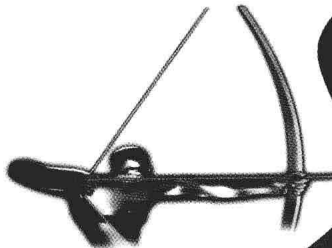
www.kjsyb

告诉你怎样考进实验班！

[初中数学]

尖子生的狂欢　中等生的风暴

山西出版集团
山西教育出版社



[考进]实验班

初中数学

丛书主编◎杨瑞光

本册主编◎孔德斌

编　　者◎孔德斌　贾凤梅　刘少伟
　　　　　贾国庆　成志华　曹焕英
　　　　　霍玉泽　郝旭东　郭　趁
　　　　　郭艳琴　张　萍

山西出版集团

山西教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

考进实验班．初中数学/孔德斌主编．—2版．—太原：山西教育出版社，2011.8

ISBN 978-7-5440-4794-4

Ⅰ．①考…　Ⅱ．①孔…　Ⅲ．①中学数学课—初中—升学参考资料

Ⅳ．①G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第049120号

考进实验班·初中数学

责任编辑　郭志强
助理编辑　解　红
复　　审　冉红平
终　　审　刘立平
装帧设计　王耀斌
印装监制　贾永胜

出版发行　山西出版集团·山西教育出版社
（太原市水西门街馒头巷7号　电话:4035711　邮编:030002）
印　　装　山西人民印刷有限责任公司
开　　本　787×1092　1/16
印　　张　11.75
字　　数　368千字
版　　次　2011年8月第2版山西第2次印刷
印　　数　10001—20000册
书　　号　ISBN 978-7-5440-4794-4
定　　价　25.00元

出版宣言

每个面临升学的优秀学生都怀揣着考进实验班的梦想，因为从某种程度上说，那意味着在步入重点大学、实现自己人生理想的道路上迈出了坚实的一步。那么，要实现进军实验班的宏伟蓝图，你就应该找到适合阅读、有助于冲刺的图书，而《考进实验班》就是你必胜的选择。

《考进实验班》丛书跨越小学、初中两个学段，与"实验班"招生考试科目同步。初中版 5 册、小学版 3 册，是目前此类图书中**覆盖学科最广、教学内容最全、实用性最强**的系列丛书。《考进实验班》不仅有助于指导优秀学生升考实验班，而且为有潜质的中等生小学升初中、初中升高中的过渡及衔接提供了有力帮助！

本丛书具有以下几个特点：

编写原则："欲穷千里目，更上一层楼。"只有站得高，才能看得远。丛书以考点为核心，以训练为主线，以彻悟为目的，以创新为要义，从设计到编写都要求更好、最好，更高、最高。

作者阵容：《考进实验班》丛书全部由特级教师、高级教师主笔，采取双学段老师编写的方式，即由高一级学段老师和本学段老师合作编写，各展所能、优势互补，使全书实现了"命题思想、能力考查、解题技巧"的最佳结合。初中升高中段丛书由高中老师和初中老师共同完成；小学升初中段丛书由初中老师和小学老师共同完成，最后都由专家亲自审定。

双学段选材：《考进实验班》丛书内容采用一升、一降的选材方法。升：就是提升对本学段内容的能力考查；降：就是降低高一级学段的教学内容，回归到本学段，但要向高一级学段的能力靠拢。同时，打破各学段原有的定势思维，使全书具有更丰富的信息，更深刻的内涵和外延，体现了知识的兼容性、渗透性、统帅性，建立了更灵活、更科学的解题思路。

双轨介绍知识：《考进实验班》丛书紧扣各学段的教材，保持了学科的系统性、科学性和复习的合理性；又结合各学科的特点，编写了对应的社会知识、生产知识、科普内容，归纳了解题技巧，以全面提高学生的能力。

双向学习：《考进实验班》丛书有名师导学，能使学生更加明确方向；有典型题目可供参考，能使学生能力得以升华；有科学方法的指导，可帮助学生将知识转化成能力；有针对性提升训练，让学生用能力提高解题技巧。丛书的"自测"专栏，用于学生自我检验能力的实际水平，为进一步提高素质奠定基础。

双向目标：《考进实验班》丛书既是学生升考实验班的良师，又是其学习生涯中由本阶段过渡到高一级学段的益友。小学段丛书，适用于应届优秀小学生，也适用于初中学生；初中学段丛书适用于应届优秀初中生，也适用于高中学生。它的确是一套具有导向性、衔接性、广泛性的丛书。

人们都知道：为什么要考实验班

我们告诉你：怎样考进实验班

《考进实验班》：祝你考进实验班

编者心语

为帮助即将参加各类实验班招生考试的初中生在最短时间内将初中所学知识系统化,并在此基础上更上一层楼,形成综合和创新能力、应用和应试能力,一举进入重点中学重点班,因此我们选拔名师编写了这套《考进实验班》。

本丛书有以下几个特点:

一、注重"双基",着眼发展能力

本丛书在编写上没有逐章逐节地进行知识的介绍,而是抓住了初中数学教学中的重点给予突出,抓住难点给予突破,采取"一个单元几个创新题型"的形式,把例、解、点击有机地结合起来。这样做,使你更有兴趣探索数学王国的奥妙,在你对某些繁难的数学问题感到"山重水复疑无路"的时候,它也许会带你进入"柳暗花明又一村"的境界。

二、讲练结合,利于辅导

本丛书囊括了初中数学全部解题思路,例题最为典型,每道例题都代表着一个类型、一个知识点,只要把握好例题的解题思路,就能很好地掌握一个或几个知识点.体例最新,每道例题,解时都有思路突破,解后有易错分析,且每一单元都有学力提升训练题,旨在巩固提高同学们的解题能力。另外,本丛书还插入了"课外时空",有数学历史故事、人物、笑话、谜语、脑筋急转弯等,这给我们的学习带来了乐趣。

三、目的明确,培养创新能力

本丛书旨在培养学生的分析、综合能力及创新应用能力。寻找和挖掘单元与单元、章与章、一个学科内以及跨学科间的联系,这都是丛书的任务之一。联系就是综合,因此,本丛书始终把提升学生的综合能力放到最重要的位置上。通过训练,相信学生的综合能力会提高到一个自己都感到吃惊的高度。当一个学生养成了分析的习惯并具有综合能力时,他就具备了应付各类实验班招生考试的能力。

耕耘者总盼望丰收的金秋。这套丛书如能为参加实验班考试的同学们送去一叶小舟,一副双桨,使同学们能顺利地到达理想的彼岸,能为开启同学们的智慧带来一点裨益,作者将感到极大的欣慰。由于时间仓促,水平有限,书中缺点错误在所难免,敬请广大读者批评指正。

编　者

写在再版前

《考进实验班》第一版已印刷了数次，受到了几十万读者的挚爱。他们受益于《考进实验班》，考进了“实验班”；没有上实验班的同学，也受益于《考进实验班》，深深地感到摸石头过河有风险，《考进实验班》使他们在学习中避免了盲目性，找到了巨人的肩膀，弄清了源头与流变。

他们告诉我：《考进实验班》是在各个不同学段走向成功的阶梯，比“护身符”还重要。

他们告诉我：《考进实验班》帮助他们掌握解题的应试技巧，确有妙手回春的功能，比“灵丹妙药”更为珍贵。

他们告诉我：《考进实验班》使他们到达了理想的彼岸，开启了理想王国的大门，比“金钥匙”还灵验。

……

为了适应教育的发展，原书需要修订。改书好象掘池，有人说四方形好，有人说圆形好……我觉得水池改造的要素是水，书中的水是什么？就是情，就是爱，爱意能滋生奉献，爱意能萌发创造。丛书作者以一片深情的爱，广泛聆听读者的意见，认真学习课程标准，希望池中之水能养更多的鱼，能为学生能力的提高做出更大的努力。

国际上优秀的研究工作者有六条标准。在这里，我特意将其中的四条介绍给未来的学者，以借鉴于现在的生活与学习。(1)丰富渊博的专业知识；(2)明确的研究目标和问题；(3)适当的方法和程序；(4)创造性地使用丰富的资源。这四条都与学习有密切的关系。天行健，君子以自强不息；地势坤，君子以厚德载物。博学而兼容，博学而开放，博学而创新。善学，爱学才能不舍昼夜，明天从今夜开始！

回归本原的学习是以苦为乐的学习。当代分析哲学家维特根斯坦说：“我们已经走上了一个光滑的冰面，冰面是理想的，没有摩擦力的。但是，没有摩擦力就不能往前行，要前进，还是回到粗糙的地面上来吧。”

天才不常有，蠢才也罕见，智慧就在你的头脑中。《考进实验班》正迫不及待地走向你。因为你拥有了它，它就拥有了你。你拥有了它，你就多了一份慰藉，多了一个智慧的加油站。它拥有了你，就多了一份欣喜，多了一片智慧生长的土壤。

丛书主编　杨瑞光

01

目录

考进实验班

第一部分　基础知识

第二部分　技巧与方法

02

第三部分 模拟试题

第一部分　基础知识

第一讲　实　　数

精梳要点　明方向

(1)理解实数的意义,能用数轴上的点表示实数.

(2)借助数轴解决相反数、绝对值、比较大小等相关问题.

(3)实数的运算、运算律及运算技巧.

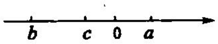
(4)解决关于奇数与偶数、质数与合数、完全平方数等一些特殊整数的问题.

(5)注意无理数的形式,准确判断出无理数.

(6)解题时注意运算顺序和符号.

典题解析　学技巧

例 1　实数 a,b,c 在数轴上的对应点如图,化简 $a+|a+b|-\sqrt{c^2}-|b-c|=$________.



解析＞＞本题中无论是绝对值号还是根号的化简都需要先判断里面数的正负,需特别注意的是 $\sqrt{c^2}=|c|$.

解:原式 $=a+[-(a+b)]-(-c)-[-(b-c)]$

$=a-a-b+c+b-c$

$=0.$

解题警示:非负数的绝对值是它本身,而负数的绝对值是它的相反数,所以判断符号是解此类题的关键,也是第一步.

例 2　使 $|a+2|=|a|+2$ 成立的条件是　(　　)

A. a 为任何实数　　B. $a\neq 0$

C. $a\leqslant 0$　　D. $a\geqslant 0$

解析＞＞此题中等号左、右两边都有绝对值号,而又没有给出实数 a 的取值范围,因此无法直接去掉绝对值,我们常用的办法是特殊值法和“零点分段”法.特殊值法也就是根据题意选取具体的数值代入,然后排除错误答案.

“零点分段”法:分别令 $|a+2|$, $|a|$ 等于 0,可以解得 $a=-2$ 和 $a=0$,于是 -2,0 将数轴分成了三个部分: $a<-2$, $-2\leqslant a<0$, $a\geqslant 0$,在每个部分,两个绝对值的符号都是确定的,因此可以直接考虑去掉绝对值符号.这种方法叫做“零点分段”法.

解法一:令 $|a+2|=0$,得 $a=-2$;

令 $|a|=0$,得 $a=0$.

(1)当 $a<-2$ 时,左边 $=-(a+2)=-a-2$,右边 $=-a+2$,左边≠右边;

(2)当 $-2\leqslant a<0$ 时,左边 $=a+2$,右边 $=-a+2$,左边≠右边;

(3)当 $a\geqslant 0$ 时,左边 $=a+2$,右边 $=a+2$,左边＝右边.

∴　$a\geqslant 0$. D 正确.

解法二:取特殊值:当 $a=-1$ 时,左边 $=|-1+2|=1$,右边 $=|-1|+2=3$,左边≠右边,

∴　$a=-1$ 时不成立.

∴　A、B、C 是错误的,D 是正确的.

解题警示:此题的两种解法中虽说特殊值法较简

单,但如果是以解答题的形式考,还是应该用零点分段法去做.

例3 计算:

(1) $-\frac{7}{12}+\frac{9}{20}-\frac{11}{30}+\frac{13}{42}-\frac{15}{56}+\frac{17}{72}$;

(2) $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$.

解析>>若计算题的数值较大,我们就不能靠直接计算得结果,而是要想办法得出它的解题技巧.本例题中的两道题全部都用"裂项法",即把一项分裂为两项.(1) $\frac{7}{12}=\frac{3+4}{3\times4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}$,推广得 $\frac{n+(n+1)}{n(n+1)}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}$;(2) $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.

解:(1)原式 $=-\frac{3+4}{3\times4}+\frac{4+5}{4\times5}-\frac{5+6}{5\times6}+\frac{6+7}{6\times7}-\frac{7+8}{7\times8}+\frac{8+9}{8\times9}$

$=-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{8}$

$=-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}$

$=-\frac{2}{9}$.

(2)原式 $=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

$=1-\frac{1}{n+1}$

$=\frac{n}{n+1}$.

解题警示:在观察题的规律时一定要多写几项,不可根据一两个数据就得结论.一定要用字母写出它的规律.

例4 若 a,b,c 为整数,且 $|a-b|^{2009}+|c-a|^{2009}=1$,试计算 $|c-a|+|a-b|+|c-b|$ 的值.

解析>>由题中条件的限制,两个非负整数之和为1,只可能是 $0+1=1$ 或 $1+0=1$,题中绝对值的指数2009只是一个迷惑条件.

解:$\because$ a,b,c 为整数,且 $|a-b|\geqslant0$, $|c-a|\geqslant0$,

$\therefore$ $|a-b|$ 与 $|c-a|$ 必然一个为0,另一个为1.

当 $|a-b|=0$, $|c-a|=1$ 时,

$a=b$.

$\therefore$ $c-b=c-a$.

$\therefore$ $|c-b|=|c-a|=1$.

原式 $=1+0+1=2$.

当 $|a-b|=1$, $|c-a|=0$ 时, $c=a$,

$\therefore$ $c-b=a-b$.

$\therefore$ $|c-b|=|a-b|=1$.

原式 $=0+1+1=2$.

解题警示:对条件的分析是解题的关键,不要因数据的庞大而失去解题信心.

例5 若 $a=25$, $b=-3$,试确定 $a^{1999}+b^{2000}$ 的末位数字是几.

解析>>本题绝不是想让大家算出 25^{1999} 和 $(-3)^{2000}$ 的值,而是指出它们的末位数字的规律. 25^n 中,只要 n 为正整数,它的个位数字就永远是5;而 3^n 的个位数字是四个循环一次, $3^1=3$, $3^2=9$, $3^3=27$, $3^4=81$, $3^5=243$, $\cdots$,一直是3,9,7,1四个数字依次循环.

解:$a^{1999}=25^{1999}$ 的末位数字一定是5.

又$\because$ $b^{2000}=(-3)^{2000}=3^{2000}$

$=\underbrace{3^4\times3^4\times\cdots\times3^4}_{500个}$

$=81^{500}$,

$\therefore$ b^{2000} 的末位数字一定是1.

$\therefore$ $a^{1999}+b^{2000}$ 的末位数字是 $5+1=6$.

解题警示:本题中如果 -3 的指数为奇数,其值一定为负数.把 $(-3)^{2n+1}$ 转化成 -3^{2n+1} 然后再做,避免了有关符号的思考.

例6 求无理数 $(1+\sqrt{3})^4$ 的整数部分.

解析>>解某些数学问题时,若能根据式子的特点,给其配上一个与其有着内在联系的式子,然后实施某种计算,使问题得到转化,这种解题思想称为配对思想.本题中式子的配对式为 $(1-\sqrt{3})^4$.

解:设 $a=(1+\sqrt{3})^4$, $b=(1-\sqrt{3})^4$,

则 $a+b=(1+\sqrt{3})^4+(1-\sqrt{3})^4$

$=[(1+\sqrt{3})^2+(1-\sqrt{3})^2]^2-2(1+\sqrt{3})^2(1-\sqrt{3})^2$

$=64-2\times(-2)^2$

$=56$.

$\because$ $0<b=(1-\sqrt{3})^4<1$,

$\therefore$ $a=(1+\sqrt{3})^4$ 的整数部分为55.

解题警示:估算问题一般都是通过技巧凑平方来想办法将含根号的数去掉,决不可借计算器来解.

例7 已知 $2008x^3=2009y^3=2010z^3$,且 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$.

求证: $\sqrt[3]{2008x^2+2009y^2+2010z^2}=\sqrt[3]{2008}+\sqrt[3]{2009}+\sqrt[3]{2010}$.

解析>>看到条件 $2008x^3=2009y^3=2010z^3$,想到应该用设 k 值法.设 $2008x^3=2009y^3=2010z^3=k^3$,于是

便可得$\frac{1}{x}=\frac{\sqrt[3]{2008}}{k}$，$\frac{1}{y}=\frac{\sqrt[3]{2009}}{k}$，$\frac{1}{z}=\frac{\sqrt[3]{2010}}{k}$.

解：设$2008x^3=2009y^3=2010z^3=k^3$，

$\therefore\quad \sqrt[3]{2008}x=k,\sqrt[3]{2009}y=k,\sqrt[3]{2010}z=k.$

$\therefore\quad \frac{1}{x}=\frac{\sqrt[3]{2008}}{k},\frac{1}{y}=\frac{\sqrt[3]{2009}}{k},\frac{1}{z}=\frac{\sqrt[3]{2010}}{k}.$

由已知$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$，得

$$\frac{\sqrt[3]{2008}}{k}+\frac{\sqrt[3]{2009}}{k}+\frac{\sqrt[3]{2010}}{k}=1.$$

$\therefore\quad k=\sqrt[3]{2008}+\sqrt[3]{2009}+\sqrt[3]{2010}.$

又$\because\quad \sqrt[3]{2008x^2+2009y^2+2010z^2}=$
$\sqrt[3]{\frac{k^3}{x}+\frac{k^3}{y}+\frac{k^3}{z}}=k\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=k$，

$\therefore\quad \sqrt[3]{2008x^2+2009y^2+2010z^2}=\sqrt[3]{2008}+\sqrt[3]{2009}+\sqrt[3]{2010}.$

解题警示：遇到等积或等比问题，常用的方法就是设它们的等积或等比为k，这也是换元法.

例8 已知a,b为两个不等的正数，记$A=\frac{a+b}{2}$，$B=\sqrt{ab}$，$C=\frac{2ab}{a+b}$，$D=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$，试确定其中最大的数并说明理由.

解析＞＞为了找准目标，可以用特殊值试一下. 当$a=2,b=8$时，$A=5,B=4,C=3.2,D=\sqrt{34}$，可以确定$D$最大. 由于$B,D$都含根号，为了比较它们的大小，可以平方后再作差比较.

解：$D^2-A^2=\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{(a+b)^2}{4}$

$=\frac{2(a^2+b^2)-(a+b)^2}{4}=\frac{(a-b)^2}{4}.$

$\because\quad a\neq b$，

$\therefore\quad \frac{(a-b)^2}{4}>0.$

$\therefore\quad D^2>A^2.$

$\because\quad D,A$均为正数，

$\therefore\quad D>A.$

同理，可得$D^2-B^2=\frac{a^2+b^2}{2}-ab=\frac{(a-b)^2}{2}>0$，

$\therefore\quad D>B.$

而$A-C=\frac{a+b}{2}-\frac{2ab}{a+b}=\frac{(a+b)^2-4ab}{2(a+b)}$

$=\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}>0$，

$\therefore\quad A>C.$

$\because\quad D>A$，

$\therefore\quad D$最大.

解题警示：本题是一道大题，可以用特殊值法找思路，却不可以用来解题，解题过程可利用求差法来写. 这道题揭示了不等式的一条重要性质：

当a,b为正数时，一定有下面的不等式成立：

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

例9 将1，2，3，…，2007这2007个数重新任意排序为$a_1,a_2,\cdots,a_{2007}$，那么$(a_1+1)(a_2+2)(a_3+3)\cdots(a_{2007}+2007)$这个积是奇数还是偶数？

解析＞＞在$(a_1+1),(a_2+2),(a_3+3),\cdots,(a_{2007}+2007)$中只要有一个是偶数，则它们的积就是偶数，我们不妨借助它们的和来判断其奇偶性.

解：$\because\quad (a_1+1)+(a_2+2)+(a_3+3)+\cdots+(a_{2007}+2007)=2\times(1+2+3+\cdots+2007)$为偶数，而$(a_1+1),(a_2+2),\cdots,(a_{2007}+2007)$共有奇数个，

$\therefore\quad (a_1+1),(a_2+2),\cdots,(a_{2007}+2007)$中至少有一个偶数，

$\therefore\quad (a_1+1)(a_2+2)\cdots(a_{2007}+2007)$为偶数.

解题警示：常用的奇偶性运算规律如下：

奇数＋奇数＝偶数，

奇数＋偶数＝奇数，

偶数＋偶数＝偶数，

奇数×奇数＝奇数，

奇数×偶数＝偶数，

偶数×偶数＝偶数.

例10 设有四个整数2，5，13和d，其中$d\neq2,5,13$.

求证：在这四个数中存在两个数a,b，使得$(ab-1)$不是完全平方数.

解析＞＞显然$(2\times5-1),(2\times13-1),(5\times13-1)$均是完全平方数，只需考虑$(2d-1),(5d-1),(13d-1)$是否为完全平方数. 而本题只需证明这三个数不全是完全平方数，无需具体确定哪一个不是完全平方数，所以一般选择反证法.

证明：反证法.

假设$(2d-1),(5d-1),(13d-1)$均是完全平方数.

设$2d-1=x^2,5d-1=y^2,13d-1=z^2$（$x,y,z$均为整数）.

$\because\quad 2d-1$为奇数，$\therefore\quad x^2$为奇数. $\therefore\quad x$为奇数.

设$x=2k+1$（k为整数），

$\therefore\quad 2d-1=(2k+1)^2=4k^2+4k+1.$

$\therefore\quad d=2k^2+2k+1.\ \therefore\quad d$为奇数.

$\therefore\quad 5d-1,13d-1$均为偶数.

$\therefore\quad y,z$也为偶数.

设$y=2m,z=2n$（m,n为整数）.

$\therefore\quad y^2-z^2=4(m+n)(m-n).$

而 $y^2-z^2=5d-1-(13d-1)=-8d$,

即 $(m+n)(m-n)=-2d$,

$\therefore$ d 为偶数. 矛盾.

$\therefore$ $(2d-1),(5d-1),(13d-1)$ 不全是完全平方数.

$\therefore$ 在 $2,5,13$ 和 d 这四个数中存在两个数 a,b,使得 $(ab-1)$ 不是完全平方数.

解题警示:利用反证法解题,第一步先假设结论的反面成立,然后通过正确的推理,最后推导出矛盾的出现,说明原来的假设错误.

课外时空  开眼界

"无理数"的由来

公元前500年,古希腊毕达哥拉斯(Pythagoras)学派的弟子希勃索斯(Hippasus)发现了一个惊人的事实:一个正方形的对角线与其一边的长度是不可公度的(若正方形边长是1,则对角线的长不是一个有理数).这一不可公度性与毕氏学派"万物皆为数"(指有理数)的哲理大相径庭.这一发现使该学派领导人惶恐、恼怒,认为这将动摇他们在学术界的统治地位.希勃索斯因此被囚禁,受到百般折磨,最后竟遭到沉舟身亡的惩处.

毕氏弟子的发现,第一次向人们揭示了有理数系的缺陷,证明它不能同连续的无限直线同等看待,有理数并没有布满数轴上的点,在数轴上存在着不能用有理数表示的"孔隙".而这种"孔隙"经后人证明简直多得"不可胜数".于是,古希腊人把有理数视为连续衔接的那种算术连续系统的设想彻底地破灭了.不可公度量的发现连同著名的芝诺悖论一同被称为数学史上的第一次危机,对以后2000多年数学的发展产生了深远的影响,促使人们从依靠直觉、经验而转向依靠证明,推动了公理几何学与逻辑学的发展,并且孕育了微积分的思想萌芽.

不可通约的本质是什么?长期以来众说纷纭,得不到正确的解释,两个不可通约的比值也一直被认为是不可理喻的数.15世纪意大利著名画家达·芬奇称之为"无理的数",17世纪德国天文学家开普勒称之为"不可名状"的数.

然而,真理毕竟是淹没不了的,毕氏学派抹杀真理才是"无理".人们为了纪念希勃索斯这位为真理而献身的可敬学者,就把不可通约的量取名为"无理数"——这便是"无理数"的由来.

把 $1,2,3,4,\cdots,1986,1987$ 这1987个自然数均匀排成一个大圆圈,从1开始数:隔过1划掉2,3,隔过4划掉5,6,这样每隔一个数划掉两个数,转圈划下去,问:最后剩下哪个数?

学力提升  显本领

一、填空题

1. 已知 $a>0,b<0$,且 $a+b<0$,那么有理数 $a,b,-a,|b|$ 的大小关系为________.(用"<"号连接)

2. a,b,c 均为非0有理数,则 $\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}=$________.

3. 规定一种新的运算:$a\triangle b=a\cdot b-a-b+1$,如:$3\triangle4=3\times4-3-4+1$.请比较大小:$(-3)\triangle4$ ________ $4\triangle(-3)$.(填"<""="或">")

4. 若 m,n 互为相反数,x,y 互为倒数,且 m,n 均不为0,则 $xy|m+n|-\frac{m}{n}+xy=$________.

5. 已知 $ab^2<0,a+b>0$,且 $|a|=1,|b|=2$,则 $\left|a-\frac{1}{3}\right|+(b-1)^2=$________.

6. 若 $n=1\frac{1}{3}-\frac{7}{12}+\frac{9}{20}-\frac{11}{30}+\frac{13}{42}-\frac{15}{56}+\frac{17}{72}$,则 n 的负倒数是________.

7. 已知 a,b,c,d 是四个不相等的正数,其中 a 最大,d 最小,且满足条件 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,则 $a+d$ 与 $b+c$ 的大小关系是________.

8. 设实数 a,b,c,d,e 同时满足下列条件:①$a>b$,②$e-a=d-b$,③$c-d<b-d$,④$a+b=c+d$,则 $a,b,c,$

d,e 从小到大排列,并用"<"表示是______.

9. 两个质数的差是 27,则这两个质数的和是______.

10. 若 $1,2,3,\cdots,n$ 中,从第 $m(m<n)$ 个数到第 n 个数之和为 1997,则 $m=$______.

二、选择题

11. 若 n 是奇自然数,$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个互不相同的负整数,则 ( )

A. $(a_1+1)(a_2+2)(a_3+3)\cdots(a_n+n)$是正数

B. $(a_1-1)(a_2-2)(a_3-3)\cdots(a_n-n)$是正数

C. $\left(\frac{1}{a_1}+1\right)\left(\frac{1}{a_2}+2\right)\left(\frac{1}{a_3}+3\right)\cdots\left(\frac{1}{a_n}+n\right)$是正数

D. $\left(1-\frac{1}{a_1}\right)\left(2-\frac{1}{a_2}\right)\left(3-\frac{1}{a_3}\right)\cdots\left(n-\frac{1}{a_n}\right)$是正数

12. 设 $a>b>c,x>y>z,M=ax+by+cz,N=az+by+cx,P=ay+bz+cx,Q=az+bx+cy$,则有 ( )

A. $M>P>N$,且 $M>Q>N$

B. $N>P>M$,且 $N>Q>M$

C. $P>M>Q$,且 $P>N>Q$

D. $Q>M>P$,且 $Q>N>P$

13. 设 a,b,c 的平均数为 M,a,b 的平均数为 N,N,c 的平均数为 P. 若 $a>b>c$,则 M 与 P 的大小关系是 ( )

A. $M=P$ B. $M>P$

C. $M<P$ D. 不确定

14. 在小于 1997 的自然数中,是 3 的倍数而不是 5 的倍数的数的个数是 ( )

A. 532 B. 665

C. 133 D. 798

15. 已知 $a<0,k$ 为整数,且 $1<k<1996$. 设 $q=\frac{a\cdot a^2\cdot a^3\cdot\cdots\cdot a^k}{a^{k+1}\cdot a^{k+2}\cdot\cdots\cdot a^{1996}}$,则 ( )

A. $q>0$

B. $q<0$

C. k 为偶数时,$q>0$;k 为奇数时,$q<0$

D. k 为偶数时,$q<0$;k 为奇数时,$q>0$

16. 以 1995 的质因数为边长的三角形共有( )

A. 4 个 B. 7 个

C. 13 个 D. 60 个

17. 已知三个整数 a,b,c 的和为奇数,那么 $a^2+b^2-c^2+2ab$ ( )

A. 一定是非零偶数

B. 等于 0

C. 一定是奇数

D. 可能是奇数也可能是偶数

18. 木工做了两块三角板,如果它们的三个内角分别是 90°,75°,15°和 90°,54°,36°,那么用这两块三角板可以画出的不相等的锐角有 ( )

A. 30 个 B. 29 个

C. 10 个 D. 9 个

19. 数轴上表示实数 x 的点在 -1 点的左边,则 $\sqrt{(x-2)^2}-2\sqrt{(x-1)^2}$的值是 ( )

A. 正数 B. -1

C. 小于 -1 D. 大于 -1

20. 已知 a,b,c 为有理数,且等式 $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}=\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ 成立,则 $2a+999b+1001c$ 的值是 ( )

A. 1999 B. 2000

C. 2001 D. 不能确定

三、解答题

21. 计算:

(1) $\frac{1}{101\times103}+\frac{1}{103\times105}+\frac{1}{105\times107}+\cdots+\frac{1}{199\times201}$;

(2) $1995\times19941994+1996\times19951995-1994\times19951995-1995\times19961996$.

22. 已知有理数 a,b,c 满足$\frac{1}{2}|a-b|+\sqrt{2b+c}+c^2-c+\frac{1}{4}=0$,求$(c-2b)^2$ 的值.

23. 求 $y=|x-1|+|x-2|+|x+3|$的最小值.

24. 已知$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$,求证:$a,b,c$ 三个数中必有两个数之和为 0.

25. 已知$\frac{a}{|a|}+\frac{|b|}{b}+\frac{c}{|c|}=1$,

求$\left(\frac{|abc|}{abc}\right)^{2001}\div\left(\frac{bc}{|ab|}\cdot\frac{ac}{|bc|}\cdot\frac{ab}{|ca|}\right)$的值.

第二讲　代数式

精梳要点　明方向

(1)单项式与多项式统称整式,其特征是分母中无“字母”.

(2)整式的加、减、乘、除、乘方等运算.

(3)整式运算中的常用公式:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$,

$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$,

$(a^m)^n = a^{mn}$,

$a^m \div a^n = a^{m-n}(a \neq 0, m > n)$,

$a^{-p} = \dfrac{1}{a^p}(a \neq 0)$,

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$,

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$,

$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$,

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$,

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.

(4)因式分解与整式乘法互为逆变形. 因式分解的常用方法有提公因式法、运用公式法、十字相乘法、分组分解法、待定系数法、综合除法等.

(5)整式与分式统称有理式. 分式与整式的不同之处在于分式的分母中一定有字母,而整式的分母中无字母.

(6)分式的基本性质:$\dfrac{a}{b} = \dfrac{a \times m}{b \times m}(m \neq 0)$,

分母为0,分式无意义;分母不为0,分子为0,分式的值为0.

(7)分式运算中的符号法则:$\dfrac{-a}{-b} = -\dfrac{a}{-b} = -\dfrac{-a}{b} = \dfrac{a}{b}$.

(8)二次根式的定义$\sqrt{a}(a \geqslant 0)$中有两个非负:$a \geqslant 0, \sqrt{a} \geqslant 0$.

(9)二次根式的两个重要公式:

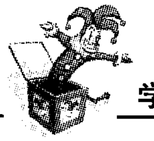
$(\sqrt{a})^2 = a(a \geqslant 0)$,

$\sqrt{a^2} = |a|$.

(10)一定不要弄混同类二次根式和最简二次根式这两个概念.

(11)分母有理化:把分母中的根号去掉的变形叫分母有理化. 分母有理化一般都是给分子、分母同时乘上分母的有理化因式.

典题解析



学技巧

例 1 已知 $m^2+m-1=0$，求 m^3+2m^2+2009 的值.

解析>> 由于 m 的值不易求出，所以不宜采用求出 m 值后直接代入的解法. 解此类题目不妨采用整体代入法，以避免繁难的数字计算. 由 $m^2+m-1=0$，可得 $m^2+m=1$. 在随后的计算中，把 m^2+m 当做整体，代入即可.

解：$\because\ m^2+m-1=0$，

$\therefore\ m^2+m=1$.

则 m^3+2m^2+2009

$=m^3+m^2+m^2+2009$

$=m(m^2+m)+m^2+2009$

$=m+m^2+2009$

$=1+2009$

$=2010$.

解题警示：$m^2+m-1=0$ 是一元二次方程，可以求出 m 的值，但会给解题制造困难. 恰当利用整体代入法将 (m^2+m) 当成一个整体是解本题的关键.

例 2 已知 $ax+by=7$，$ax^2+by^2=49$，$ax^3+by^3=133$，$ax^4+by^4=406$，试求 $1995(x+y)+6xy-\dfrac{17}{2}(a+b)$ 的值.

解析>> 如果把所给的条件看成是方程组，那么它是四元五次方程组，要求解这样的高次方程组是无能为力的. 观察待求值的多项式，它是关于 $x+y$，xy，$a+b$ 的多项式，如果能通过已知条件的变形，求出 $x+y$，xy，$a+b$，问题就解决了. 或者能够构造出关于 $x+y$，xy，$a+b$ 且又易求解的方程组.

解：由 $ax+by=7$，得 $ax=7-by$，$by=7-ax$.

$\therefore\ ax^2=7x-bxy$，$by^2=7y-axy$.

$\therefore\ ax^2+by^2=7(x+y)-(a+b)xy=49.$ ①

同理，得 $ax^3+by^3=49(x+y)-xy(ax+by)$.

$\therefore\ 49(x+y)-7xy=133$.

$7(x+y)-xy=19.$ ②

同理，得 $ax^4+by^4=133(x+y)-xy(ax^2+by^2)$.

$\therefore\ 133(x+y)-49xy=406$.

$19(x+y)-7xy=58.$ ③

$$\therefore\ \begin{cases}7(x+y)-(a+b)xy=49,\\7(x+y)-xy=19,\\19(x+y)-7xy=58.\end{cases}$$

解之，得 $x+y=2.5$，$xy=-1.5$，$a+b=21$.

$\therefore\ 1995(x+y)+6xy-\dfrac{17}{2}(a+b)$

$=1995\times2.5+6\times(-1.5)-\dfrac{17}{2}\times21$

$=4800$.

解题警示：循环利用条件将已知中的高次降为低次是解本题的关键.

例 3 试确定 a 和 b，使 x^4+ax^2-bx+2 能被 x^2+3x+2 整除.

解析>> 由 x^4+ax^2-bx+2 能被 x^2+3x+2 整除，得 x^4+ax^2-bx+2 分解因式后一定是 $(x^2+3x+2)A$ 的形式，即 $x^4+ax^2-bx+2=(x^2+3x+2)A$.

若 $x^2+3x+2=0$，则 $x^4+ax^2-bx+2=0$.

解：$\because\ x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$，

$\therefore$ 当 $x=-1$，或 $x=-2$ 时，$x^2+3x+2=0$.

$\because\ x^2+3x+2$ 是 x^4+ax^2-bx+2 的一个因式，

$\therefore$ 当 $x=-1$，或 $x=-2$ 时，

$x^4+ax^2-bx+2=0$.

$$\therefore\ \begin{cases}1+a+b+2=0,\\16+4a+2b+2=0.\end{cases}$$

解之，得 $a=-6$，$b=3$.

解题警示：本题还可以用待定系数法求解. 如下：

$\because\ x^4$ 的系数为 1，

$\therefore$ 设 $x^4+ax^2-bx+2=(x^2+3x+2)(x^2+cx+1)$，

$\therefore\ x^4+ax^2-bx+2=x^4+(c+3)x^3+(1+2+3c)x^2+(2c+3)x+2$，

$\therefore\ c+3=0$，$1+2+3c=a$，$2c+3=-b$，

$\therefore\ c=-3$，$a=-6$，$b=3$.

或者还可用竖式除法求解. 如：

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2 \qquad -3x+(a+7) \\ \hline
x^2+3x+2 & x^4+0+ax^2 \qquad -bx+2 \\
 & x^4+3x^3+2x^2 \\ \hline
 & -3x^3+(a-2)x^2-bx+2 \\
 & -3x^3-9x^2-6x \\ \hline
 & (a+7)x^2-(b-6)x+2 \\
 & (a+7)x^2+3(a+7)x+2(a+7) \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

$\therefore\ a+7=1$，$-(b-6)-3(a+7)=0$.

$\therefore\ a=-6$，$b=3$.

例 4 设 $\dfrac{x}{x^2-mx+1}=1$，则 $\dfrac{x^3}{x^6-m^3x^3+1}$ 的值为

________.

解析>>题中条件与待求式均不易化简.注意到条件与待求式都是分子为单项式,而分母为多项式,所以不妨考虑先取倒数,这样便于拆项、化简.

解:$\because \quad \dfrac{x}{x^2-mx+1}=1$,

$\therefore \quad \dfrac{x^2-mx+1}{x}=1$,

$\therefore \quad x-m+\dfrac{1}{x}=1$,

即 $x+\dfrac{1}{x}=1+m$.

对求值式取倒数,得

$$\frac{x^6-m^3x^3+1}{x^3}=x^3+\frac{1}{x^3}-m^3$$

$$=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2-1+\frac{1}{x^2}\right)-m^3$$

$$=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\right]-m^3$$

$$=(1+m)[(1+m)^2-3]-m^3$$

$$=3m^2-2.$$

$\therefore \quad$ 原式 $=\dfrac{1}{3m^2-2}$.

解题警示:不可直接由 $\dfrac{x}{x^2-mx+1}=1$ 求 x 的值,这样会使题更难解.对于分子简单、分母为多项式的题,取倒数是一种不错的方法.

例5 已知 $a+b+c=0$,

求 $\dfrac{a^2}{2a^2+bc}+\dfrac{b^2}{2b^2+ac}+\dfrac{c^2}{2c^2+ab}$ 的值.

解析>>观察题的特点,a,b,c 的位置轮换,而分式的值不变,我们把这样的式子叫轮换对称式.本题中相加的三个分式的形式是一样的,只是将 a,b,c 的位置进行了变换,所以只需分析其中一个,另外两个就可同理得出.

解:$\because \quad a+b+c=0$,

$\therefore \quad c=-a-b=-(a+b)$.

$$\therefore \quad \frac{a^2}{2a^2+bc}=\frac{a^2}{2a^2+b(-a-b)}$$

$$=\frac{a^2}{2a^2-ab-b^2}$$

$$=\frac{a^2}{a^2-ab+a^2-b^2}$$

$$=\frac{a^2}{a(a-b)+(a+b)(a-b)}$$

$$=\frac{a^2}{(a-b)[a+(a+b)]}$$

$$=\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}.$$

同理,可得

$$\frac{b^2}{2b^2+ac}=\frac{b^2}{(b-a)(b-c)},$$

$$\frac{c^2}{2c^2+ab}=\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}.$$

$$\text{故原式}=\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$$

$$=\frac{a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=1.$$

解题警示:对于轮换式,应先针对其中一个进行化简.如先化简 $\dfrac{a^2}{2a^2+bc}$,得到 $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}$,其余两式同理可得.同时处理三个分式是本题的大忌,会使解题更复杂.

例6 已知 $\dfrac{x+3}{x+2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}$,求 $\dfrac{x-3}{2x-4}\div\left(\dfrac{5}{x-2}-x-2\right)$.

解析>>通过对要求代数式的化简得到 $-\dfrac{1}{2(x+3)}$,所以只需通过条件求出 $x+3$ 或 $\dfrac{1}{x+3}$ 这个整体的值即可.

解:$\dfrac{x-3}{2x-4}\div\left(\dfrac{5}{x-2}-x-2\right)$

$$=\frac{x-3}{2(x-2)}\div\left(\frac{5}{x-2}-\frac{x^2-4}{x-2}\right)$$

$$=\frac{x-3}{2(x-2)}\div\frac{9-x^2}{x-2}$$

$$=-\frac{1}{2(x+3)},$$

$\because \quad \dfrac{x+3}{x+2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}$,

$\therefore \quad \dfrac{x+2}{x+3}=\sqrt{3}+\sqrt{2}+1$.

$\therefore \quad 1-\dfrac{1}{x+3}=\sqrt{3}+\sqrt{2}+1$.

$\therefore \quad \dfrac{1}{x+3}=-(\sqrt{3}+\sqrt{2})$.

$\therefore \quad$ 原式 $=-\dfrac{1}{-2(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$.

解题警示:解此类问题不可盲目化简条件,而应先看要求的结论需要什么,然后再有的放矢.分式化简中常用以下两个式子:

$$\frac{n}{n+1}=1-\frac{1}{n+1},$$

$$\frac{n+2}{n+1}=1+\frac{1}{n+1}.$$

例 7 已知 x,y 都是非负整数，且 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2004}$，求 xy 的值.

解析＞＞由于同类二次根式才能合并，所以$\sqrt{x}$与$\sqrt{y}$必是同类二次根式. 但题中并没有告知$\sqrt{x}$与$\sqrt{y}$是最简二次根式，所以我们不能断定 $x=y$，只能按一般情况来考虑问题.

解: $\because\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2004}$，

$\therefore\ \sqrt{x}$与$\sqrt{y}$是同类二次根式.

又 $\because\ \sqrt{2004}=2\sqrt{501}$，

不妨设$\sqrt{x}=a\sqrt{501}$，$\sqrt{y}=b\sqrt{501}$，

$\therefore\ a\sqrt{501}+b\sqrt{501}=2\sqrt{501}$.

$\therefore\ a+b=2$.

$\because\ x,y$ 为非负整数，

$\therefore\ a,b$ 为非负整数.

$\therefore\ \begin{cases}a=1,\\b=1;\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=0,\\b=2;\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=2,\\b=0.\end{cases}$

$\therefore\ x=y=501$；或 $x=0,y=2004$；或 $x=2004,y=0$.

$\therefore\ xy=251001$ 或 $xy=0$.

解题警示:在根式运算中，只有同类二次根式才可以进行合并，如果看不到这个隐含条件，而直接将$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2004}$两边平方，思维就会被引偏了.

例 8 已知 $a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}=1$.

求证:$a^2+b^2=1$.

解析＞＞本题中条件有根号，而所证结论中没有根号，故解题时应从设法消去条件中的根号着手.

解:设 $a\sqrt{1-b^2}-b\sqrt{1-a^2}=x$.

$\because\ a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}=1$，

$\therefore\ (a\sqrt{1-b^2}-b\sqrt{1-a^2})(a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2})$

$=x\cdot 1$，

$\therefore\ a^2(1-b^2)-b^2(1-a^2)=x$，

$\therefore\ a^2-b^2=x$，

即 $a\sqrt{1-b^2}-b\sqrt{1-a^2}=a^2-b^2$.

又 $\because\ a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}=1$，

$\therefore\ 2a\sqrt{1-b^2}=a^2-b^2+1$.

$\therefore\ a^2-2a\sqrt{1-b^2}+1-b^2=0$.

$\therefore\ (a-\sqrt{1-b^2})^2=0$.

$\therefore\ a=\sqrt{1-b^2}$.

$\therefore\ a^2=1-b^2$.

$a^2+b^2=1$.

解题警示:本题中如果直接两边平方并不能去掉根号. 除上述方法外也可用换元法，设$\sqrt{1-b^2}=x$，$\sqrt{1-a^2}=y$. 或者根据题意知 $|a|\leqslant 1$，$|b|\leqslant 1$. 设 $a=\sin\alpha$，$b=\sin\beta$，其中 α,β 均为锐角，借助三角函数的公式来证明.

例 9 若 a,b 满足 $3\sqrt{a}+5\sqrt{b^2}=7$，则 $S=2\sqrt{a}-3\sqrt{b^2}$的取值范围是________.

解析＞＞观察题中两个等式的关系，不妨把两个等式看成是关于$\sqrt{a}$，$\sqrt{b^2}$的方程. 解之，得出它们的含 S 的代数式，再运用$\sqrt{a}$，$\sqrt{b^2}$的有界性，从而确定 S 的取值范围.

解:由 $\begin{cases}3\sqrt{a}+5\sqrt{b^2}=7,\\2\sqrt{a}-3\sqrt{b^2}=S,\end{cases}$

得$\sqrt{a}=\dfrac{21+5S}{19}$，$\sqrt{b^2}=\dfrac{14-3S}{19}$.

$\because\ \sqrt{a}\geqslant 0,\sqrt{b^2}\geqslant 0$，

$\therefore\ \begin{cases}\dfrac{21+5S}{19}\geqslant 0,\\\dfrac{14-3S}{19}\geqslant 0.\end{cases}$

解之，得 $-\dfrac{21}{5}\leqslant S\leqslant\dfrac{14}{3}$.

解题警示:由等式问题来研究不等式问题，这就要求我们细心挖掘它们内在的隐含条件. 如本题中的被开方数为非负数，是不加以说明的隐含条件. 正确运用隐含条件是解决问题的关键.

课外时空  **开眼界**

挪威数学家阿贝尔在上大学时给他的数学老师写了封信，信上的年月日写的是 $\sqrt[3]{6064321219}$，聪明的数学老师收到信后很快算出了阿贝尔写信的日期. 你知道阿贝尔写信的时间吗?