现代数学基础丛书 137

局部域上的调和分析与分形分析及其应用

苏维宜 著

科学出版社

现代数学基础丛书 137

局部域上的调和分析与分形分析及其应用

苏维宜 著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书内容涉及局部域上的调和分析与分形分析及其应用的三个方面：首先从局部域的基本知识入手，介绍局部域的运算结构与拓扑结构及其特征群的结构，作为本书的理论基础. 然后转入局部域上的调和分析，详细介绍其上的 Fourier 分析、函数逼近论、函数空间理论等方面的基本理论与最新成果，并且建立局部域上分形空间以及 p 型微积分的框架. 接着介绍局部域上的分形分析，包括局部域上分形几何的重要概念与定理、局部域上分形分析的核心问题之一的分形 PDE 理论与初步研究成果. 最后介绍分形分析在临床医学上的应用. 阅读本书需具备大学高年级的数学基础.

本书可作为高等院校数学系高年级本科生和研究生的教材，也可供相关专业的教师、科研人员及工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

局部域上的调和分析与分形分析及其应用/苏维宜著. —北京：科学出版社，2011

(现代数学基础丛书；137)

ISBN 978-7-03-031415-4

Ⅰ.①局… Ⅱ.①苏… Ⅲ.①局部域-调和分析②局部域-分形理论 Ⅳ.①O156.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 106735 号

责任编辑：赵彦超／责任校对：何燕萍
责任印制：钱玉芬／封面设计：陈　敬

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2011 年 6 月第　一　版　开本：B5(720×1000)
2011 年 6 月第一次印刷　印张：19
印数：1—2 500　字数：365 000

定价：58.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用．许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益．

20世纪70年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了 10 余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着．1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会．当时他们的参考书籍大多还是50年代甚至更早期的著述．据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约 40 卷，后者则逾 80 卷．它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用．

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍．既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新．

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科．我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域．

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动．它获得了广大读者的喜爱．我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高做出贡献．

杨　乐

2003 年 8 月

前　　言

20 世纪 70 年代中期, Taibleson[84] 的 *Fourier Analysis on Local Fields* 将前人关于局部域 (local field) 的工作做了精湛的总结, 打下了局部域上调和分析的基础. 这是调和分析研究领域中的重要分支之一, 它以局部域为底空间 (underlying space), 研究抽象调和分析中的前沿课题, 包括理论探讨与实际应用等多方面的热点问题, 涉及物理、化学、天文、计算机科学、地质、气象, 以及工业应用中的信号分析与传输等领域.

几乎同一个时期, Mandelbrot[32],[33] 提出了 “分形” 概念, 开创了分形几何研究的先河, 形成几何测度论研究的新亮点. 分形几何的研究对象是经典数学无能为力或无法处理的当代科学研究领域或生产实践中层出不穷的不规则的图形与函数, Mandelbrot 称其为 “fractal”, 译为 “分形”. 例如, 众所周知的处处连续、处处不可微的 Weierstrass 函数, 就是一个分形函数; 又如熟悉的 Cantor 三分集是一个分形集. 科学家们很快认识到, 分形是非线性现象的共性之一, 分形研究也很快成为非线性科学的核心内容之一.

将所研究的集合视为局部域中的集合, 所研究的函数视为定义在局部域上的函数, 于是, 局部域上的调和分析与局部域上的分形分析把数学科学基础学科之一的 “抽象调和分析” 与刻画非线性科学共性的 “分形分析” 紧密地联系起来. 这种联系是内在的、本质的, 且是由局部域的结构确定的.

局部域是局部紧、全不连通、非阿基米德赋值、完备的拓扑域, 它有广泛的应用背景, 例如, 数的二进制与 p 进制都是局部域的特例. 更令人感兴趣的是 “分形” 所刻画的自然现象、变量之间的关系, 可以用局部域上定义的函数关系来描述. 因此, 局部域上的调和分析与分形分析的结合与发展便成为必然.

在研究局部域分析与分形分析的同时, 我们发现生命科学与临床医学中出现的新问题与我们的研究有密切关系. 例如, 人类的 2 万多个基因, 究竟哪些基因控制人类的心脏, 哪些控制肝脏? 每个基因的作用是什么? 又如, 肝癌的恶性程度与肿瘤边界的形状 (边界的分形维数) 有何关系? 等等. 我们也发现, 众多不断涌现出的新课题, 都可利用局部域分析、分形分析等工具建立数学模型, 达到真正的数学量化, 并推动生命科学、临床医学与数学科学的结合, 使交叉学科得到实质性的进展. 所有这些是传统数学做不到的.

写作本书的初衷是向科学工作者展示一个新的研究方向 —— 局部域上的调和分析与分形分析及其应用, 包括局部域的基本知识与近三十年来该方向的最新科研

成果. 从数学基础理论开始, 到临床医学关乎人类生命的实际病例为止, 全书一气呵成, 形成一个完整的自包含体系, 使读者了解这个研究方向已经做了什么, 正在做什么, 还将要做什么, 也使得有兴趣与有志于这个课题研究的科学工作者能从中得到益处.

本书分三个大部分, 共 7 章. 一是局部域的基本知识 (第 1,2 章); 二是局部域上的调和分析的基础理论 (第 3,4 章); 三是局部域上的分形分析、理论与应用 (第 5~7 章). 第 1 章介绍 Galois 域 $GF(p)$ 的基本知识与局部域的结构; 第 2 章对局部域的特征群作详细分析; 第 3, 4 章是局部域上调和分析的基础理论, 包括局部域上的 Fourier 分析、局部域上的函数空间、以局部域为底空间的微积分, 以及局部域分析与经典分析的深入比较; 第 5 章转入局部域上的分形分析, 包括分形的基本知识、局部域上的分形集合与分形函数、局部域分形分析与欧氏空间分形分析各自的特点以及它们之间的关系; 第 6 章是局部域上的分形偏微分方程 (PDE), 给出分形 PDE 的基础性研究成果与挑战性研究课题; 最后, 第 7 章给出分形在临床医学中的应用.

相对于经典调和分析而言, 局部域上的调和分析与分形分析还非常年轻, 才 30 余年, 这在人类历史与知识的长河中, 几乎是一个瞬间. 然而, 它却是反映自然界规律、人类生命规律的非线性科学本质的有力工具. 随着时间的推进, 人类对自然界将有更为深刻的认识, 宇宙的本质也将逐渐被揭开. 因此, 可以期望, 局部域上的调和分析与分形分析及其应用将成为人类认识自然、改造自然的一个有力工具.

作者集长期以来关于局部域研究的经历, 总结 30 余年来南京大学数学系调和分析与分形分析科研团队的科研成果, 其中包含了最新的研究成果, 如南京大学数学系郑维行教授、何泽霖教授、江惠坤教授、王肇西教授、吴兆金副教授、阮火军博士、姚奎博士、邱华博士, 以及我们所指导的博士朱月萍教授、郑世骏博士、周广才博士、吴宝义博士、李垠博士、马林涛博士, 本科生彭云、沈开明、顾庆松等的科研工作, 都已经列在参考文献中, 这里一并致谢. 在写作过程中, 得到浙江大学王斯雷教授、北京师范大学陆善镇教授以及科学出版社责任编辑的大力协助, 在此对他们表示衷心感谢!

本书试图从严格的数学理论出发, 直到该领域的前沿, 展现一个新学科领域的发展. 在写作过程中努力做到由浅入深, 语言简洁, 重点突出, 一气呵成, 希望读者能从中受益. 然而, 由于作者水平有限, 在本书的取材、编写等方面的缺点或错误在所难免, 存在着许多不尽人意之处, 敬请专家与读者不吝赐教.

作　者
2010 年中秋前夕于南京

目　录

第1章　基 本 知 识

1.1　Galois 域 $GF(p)$

Galois 域是研究局部域的理论基础, 本节首先介绍 Galois 域的基本知识.

1.1.1　Galois 域 $GF(p)$、特征数 p

从 "Abel 群" 与 "域" 的定义出发.

定义 1.1.1 (Abel 群)　设集合 G 中的元素之间具有一个运算, 记为 $\times$, 满足:

(i) 封闭性: $x, y \in G \Rightarrow x \times y \in G$;

(ii) 结合律: $x, y, z \in G \Rightarrow (x \times y) \times z = x \times (y \times z)$;

(iii) 单位元: 存在关于运算 $\times$ 的单位元 $e \in G$, $\forall x \in G \Rightarrow x \times e = x$;

(iv) 逆元: $\forall x \in G$, 存在逆元 $x^{-1} \in G$, 使得 $x \times x^{-1} = e$;

(v) 交换律: $\forall x, y \in G \Rightarrow x \times y = y \times x$.

则称集合 G 为一个Abel 群. 通常将一个群与它的运算记为 $(G, \times)$, 也简记为 G. 运算 $x \times y$, 也简记为 $x \cdot y$, 或省略 $\times$, 记为 xy.

这里的运算 $\times$, 可以是乘法、加法, 或满足以上条件的任何运算, 例如, 对于实数集 $\mathbb{R}$, 在实数的加法运算 $+$ 之下构成一个 Abel 群 $(\mathbb{R}, +)$, 其单位元 e 就是实数 0; 正实数集 $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$ 在实数的乘法运算 $\times$ 之下, 构成一个 Abel 群 $(\mathbb{R}^+, \times)$, 其单位元 e 就是自然数 1.

Abel 群的例子很多, 请读者自行列举.

今后, 记实数集合为 $\mathbb{R}$, 复数集合为 $\mathbb{C}$, 它们在实数与复数的加法运算下都成为一个 Abel 群.

定义 1.1.2 (群的非零元的阶)　在 Abel 群 $(G, \times)$ 中, 对于一个非零元 $a \in G \backslash \{0\}$, 使得

$$a^m = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m} = e \tag{1.1.1}$$

成立的最小正整数 $m \in \mathbb{N}$ 称为元 a 的阶; 若不存在这样的正整数, 则称 a 为无穷阶的.

定义 1.1.3 (域)　设集合 F 中的元之间具有两个运算, 分别称为加法 $+$ 与乘法 $\times$, 满足:

(i) 关于加法 $+$, 集合 F 构成一个 Abel 群;

(ii) 关于乘法 $\times$, 集合 $F\backslash\{0\}$ 构成一个 Abel 群;

(iii) 关于加法与乘法, F 中的元满足加乘分配律

$$x, y, z \in F \Rightarrow x \times (y+z) = x \times y + x \times z.$$

则称集合 F 为一个域, 记为 $(F, +, \times)$, 也简记为 F.

实数域 $(\mathbb{R}, +, \times)$、复数域 $(\mathbb{C}, +, \times)$ 是最常用的数域.

定义 1.1.4 (域的特征数)　设 $(F, +, \times)$ 是一个域. 若对于 F 的加法而言, F 的所有非零元都有相同的阶数, 记为 p, 则称 p 为域 F 的特征数.

域的特征数对于研究域的性质与构造有重要作用, 下面列举特征数的几个重要性质, 但略去证明, 读者可参看有关参考书 [6],[87].

域的特征数有如下性质:

定理 1.1.1　设 $(F, +, \times)$ 是一个域, p 是其特征数. 则

(1) p 可以是有限数 (此时 p 是一个正整数, 称域的特征数为 p), 也可以是无穷大 (此时称域的特征数为 ∞, 也称域的特征数为零, $p=0$);

(2) 若域 F 的特征数 $p=0$, 则域 F 与有理数域同构 (即 F 的势为 $\aleph_0$), 此时, F 中含有可数多个元;

(3) 若域 F 的特征数为有限数 p, 则 p 必为素数; 此时, $0<p<\infty$, 域 F 成为一个有限域.

定义 1.1.5 (Galois 域)　若 F 为有限域, p 为其特征数, 则 p 是满足

$$p \times x \equiv p \cdot x \equiv \underbrace{x + x + \cdots + x}_{p} = 0, \quad \forall x \in F \tag{1.1.2}$$

的最小正整数, 且必为素数, 这里 $0 \in F$ 是 F 的加法零元, 此时 F 中含 p 个元, 称这个有限域为Galois 域, 记为 $GF(p)$.

对于 Galois 域 $GF(p)$ 的结构, 有

定理 1.1.2　Galois 域 $GF(p)$ 与整数同余类 $\mathbb{Z}/p$ 同构,

$$GF(p) \sim \mathbb{Z}/p = \{0, 1, \cdots, p-1\},$$

这里 $\mathbb{Z}$ 为整数集, $p \geqslant 2$ 为素数.

1.1.2　Galois 域 $GF(p)$ 的代数扩域 F

定义 1.1.6 (扩域)　定义 Galois 域 $GF(p)$ 的扩域如下:

(i) 若域 F 包含一个 Galois 域, $F \supset GF(p)$, 则称域 F 为 $GF(p)$ 的扩域;

(ii) 若 F 中的每个元都是 $GF(p)$ 的代数元, 即 $\forall \gamma \in F$, 有

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \gamma^k = 0, \quad c_k \in GF(p), \quad k = 0, 1, \cdots, n, \tag{1.1.3}$$

则称域 F 为 $GF(p)$ 的代数扩域, 记为

$$GF(p)[\alpha], \quad \alpha \in F \backslash GF(p). \tag{1.1.4}$$

关于 $GF(p)$ 的代数扩域, 有以下结论:

定理 1.1.3 设 $GF(p)$ 是一个 Galois 域. 则

(1) $GF(p)$ 的任一有限扩域都是代数扩域, 并且可以由 $GF(p)$ 通过添加有限个代数元得到; 反之, $GF(p)$ 的每个添加有限个代数元而生成的扩域都是有限扩域.

(2) $GF(p)$ 的代数扩域 F 是 $GF(p)$ 上的线性空间; 若 F 的维数为 n, 则称 n 为扩域 F 在 $GF(p)$ 上的次数, 记为 $n=(F:GF(p))$. 当扩域 F 的次数为有限数时, 则称其为有限扩域, 否则称为无限扩域.

(3) 设 $GF(p)$ 的有限代数扩域为 F, 则

$$F = GF(q),$$

其中 $q = p^c$, $c \in \mathbb{N}$ 为正整数, 且

$$c = (GF(q) : GF(p)) \tag{1.1.5}$$

为扩域的次数.

于是, 有限代数扩域 $F = GF(q)$ 是 Galois 域 $GF(p)$ 上的 c 维线性空间. 如此, $GF(q)$ 中存在关于 $GF(p)$ 的一个基底

$$\rho_0, \rho_1, \cdots, \rho_{c-1}, \tag{1.1.6}$$

其中

$$\rho_0 \in GF(p), \quad \rho_1, \cdots, \rho_{c-1} \in GF(q) \backslash GF(p),$$

使得 $\forall \alpha \in GF(q)$, $\exists \gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_{c-1} \in GF(p)$, 有表示式

$$\alpha = \gamma_0\rho_0 + \gamma_1\rho_1 + \cdots + \gamma_{c-1}\rho_{c-1}, \tag{1.1.7}$$

当 $\alpha \neq 0$ 时, $\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_{c-1}$ 不全为零.

(4) Galois 域 $GF(p)$ 是一个素域, 即它不含真子域.

由于一个素域或与有理数域同构 (若它是无穷域), 或与整数同余类 $\mathbb{Z}/p$ 同构 (若它是有限域), 因此, $GF(p) \sim \mathbb{Z}/p$.

(5) Galois 域 $GF(p)$ 的有限代数扩域 $GF(q)$ 含有一个与 mod p 同余类 $\mathbb{Z}/p$ 同构的含 p 个元素的素域, 即含有 $GF(p)$.

(6) $GF(q)$ 中有 $q=p^n$ 个元, 每个元 $\alpha \in GF(q)$ 都是函数 x^q-x 的零点.

对于给定的 p 与 c, 一切具有 $q=p^c$ 个元的域都是同构的. 进而, $GF(q)$ 中的一切子域都是形如 $GF(p^m)$ 的 Galois 域, 其中 m 是 c 的因子.

$GF(q)$ 中元的具体表示如下:

定理 1.1.4 设 $GF(q)=GF(p^c)$, $p \geqslant 2$ 为素数, $c \in \mathbb{N}$. 则

(1) 当 $c=1$ 时, $GF(q) \xleftrightarrow{\text{同构}} \{0,1,\cdots,p-1\}$, 且每个元 $\alpha \in GF(p)$ 都是 p 次函数 x^p-x 的零点.

(2) 当 $c=2$ 时, 取 $GF(q)$ 的一个代数元 $\rho \notin GF(p)$, 即存在 $a_0,a_1,a_2 \in GF(p)$ 不全为零, 使得元 ρ 满足代数方程

$$a_0+a_1\rho+a_2\rho^2=0. \tag{1.1.8}$$

于是, $GF(p^2)$ 中的元以 $\rho_0=1$、ρ 为基底 ($1 \in GF(p)$ 是 $GF(p)$ 的单位元), 表示为

$$GF\left(p^2\right)=\{\gamma_0 \cdot 1+\gamma_1 \cdot \rho : \gamma_0,\gamma_1 \in GF(p)\}, \tag{1.1.9}$$

且每个元 $\alpha \in GF(p^2)$ 都是 p^2 次函数 $x^{p^2}-x$ 的零点.

(3) 当 $c \in \mathbb{N}$ 时, $GF(p^c)$ 中的元以 $\{1,\rho_1,\cdots,\rho_{c-1}\}$ 为基底, 表示为

$$GF(p^c)=\{\gamma_0 \cdot 1+\gamma_1 \cdot \rho_1+\cdots+\gamma_{c-1}\rho_{c-1} : \gamma_0,\gamma_1,\cdots,\gamma_{c-1} \in GF(p)\}, \tag{1.1.10}$$

且每个元 $\alpha \in GF(p^c)$ 都是 p^c 次函数 $x^{p^c}-x$ 的零点.

Galois 理论是具有相当深度与相当复杂的理论, 这里用到的只是其中最基本的内容. 本节参考文献是 [6], [26], [87].

1.2 局部域 K_q 的结构

设 $q=p^c$, $p \geqslant 2$ 为素数, $c \in \mathbb{N}$. 本节介绍局部域的基本知识 [84].

1.2.1 局部域的定义

定义 1.2.1 (局部紧域) 设 K 既是一个域 (运算结构为 $+,\times$), 又是一个完备的 T_2 型拓扑空间 (拓扑结构为 τ). 若它的加群 $(K^+,+)$ 与乘群 $(K^*,\times)=(K\backslash\{0\},\times)$ 都是局部紧 Abel 群, 且其域运算 (加法 +、乘法 ×) 与拓扑空间结构 (拓扑 τ) 相互协调, 即加法 + 与乘法 ×:

$$(x,y) \in K \times K \to x+y \in K, \tag{1.2.1}$$

$$(x,y) \in K^* \times K^* \to x \times y \in K^* \tag{1.2.2}$$

在拓扑结构 τ 之下是连续映射, 则称 K 为局部紧拓扑域, 简称*局部紧域*.

据 “域论” 的结果, 有

定理 1.2.1 设 K 是一个非平凡的局部紧拓扑域,

(1) 若 K 是连通的, 则它只能是实数域 $\mathbb{R}$ 或复数域 $\mathbb{C}$;

(2) 若 K 是不连通的, 则它是全不连通的. 此时, K 是 T_2 型、局部紧、全不连通、非平凡、完备的拓扑域, 称其为*局部域*. 局部域 K 只能是如下四种情形之一:

① 若 K 具有非零有限特征数 p, 则 K 包含一个与 Galois 域 $GF(p)$ 同构的素域:

当 $c=1$ 时, K 是一个 p *级数域*(p-series field);

当 $c>1$ 时, K 是 *p 级数域的 c 级有限代数扩域*;

② 若 K 具有零特征数 (即特征为 ∞), 则 K 包含一个与有理数域 $\mathbb{Q}$ 同构的素域:

当 $c=1$ 时, K 是一个 p *进数域*(p-adic number field);

当 $c>1$ 时, K 是 *p 进数域的 c 级有限代数扩域*.

本书中, 为强调局部域 K 对于 p 与 c 的依赖性, 当 $c=1$ 时, 记 K 为 K_p; 而当 $c>1$ 时, 记为 K_q , 其中 $q=p^c$.

1.2.2 局部域 K_q 的赋值结构

设 $K_q=(K,\oplus,\otimes,\tau)$ 是一个 T_2 型、局部紧、全不连通、非平凡、完备的拓扑域. 为方便起见, 在本书中作如下约定: 局部域的加法 $\oplus$ 与乘法 $\otimes$ 都简记为 $x+y, x\times y$, 乘法也简记为 $x\cdot y$, 或 xy. 局部域记为 $K_q=(K,+,\times,\tau)$.

对于 K_q, 可以赋予非阿基米德赋值.

定义 1.2.2 (非阿基米德赋值) 设 F 是一个域, 若 F 到 $[0,+\infty)$ 的映射 $x\in F\to|x|\in[0,+\infty)$, 满足

(i) $|x|\geqslant 0$, 且 $|x|=0\Leftrightarrow x=0$;

(ii) $|x\cdot y|=|x|\,|y|$;

(iii) $|x+y|\leqslant\max\{|x|,|y|\}$, 且若 $|x|\neq|y|$, 则 $|x+y|=\max\{|x|,|y|\}$.

则称 $|x|$ 为 *$x\in F$ 的非阿基米德赋值*, 并称 F 为*非阿基米德赋值域*.

(iii) 中不等式常称为超距不等式.

可以证明, 局部域 K_q 是非阿基米德赋值域.

定理 1.2.2 设局部域 K_q(包括 p 级数域、p 进数域以及它们的有限代数扩域) 是一个非阿基米德赋值域. K_q 赋值的值域为

$$\forall x\in K_q\Rightarrow|x|\in\{q^k:k\in\mathbb{Z}\}\bigcup\{0\}. \tag{1.2.3}$$

当 $c=1$ 时, K_p 的非阿基米德赋值的值域为

$$\forall x\in K_p\Rightarrow|x|\in\{p^k:k\in\mathbb{Z}\}\bigcup\{0\}. \tag{1.2.4}$$

后面将逐步给出关于非阿基米德赋值的运算方法.

1.2.3　局部域 K_q 上的 Haar 测度与 Haar 积分

1. *局部紧群上的 Haar 测度与 Haar 积分*

每一个局部紧群, 其上存在平移不变的 Haar 测度与 Haar 积分.

定理 1.2.3　设 G 是局部紧群, 则其上存在左平移不变测度 μ_l 与右平移不变测度 μ_r, 使得对于 G 的任一个 Borel 集 $F \subset G$, 满足

(1) 左平移不变性: $\forall a \in G \Rightarrow \mu_l(aE) = \mu_l(E)$;

(2) 右平移不变性: $\forall a \in G \Rightarrow \mu_r(Ea) = \mu_r(E)$.

若 G 是局部紧 Abel 群, 则左平移不变测度与右平移不变测度相等, $\mu \equiv \mu_l \equiv \mu_r$, 称 μ 为 Haar 测度:

$$\forall a \in G \Rightarrow \mu(aE) = \mu(Ea) = \mu(E).$$

以抽象调和分析的常规方法可以证明:

定理 1.2.4　在局部紧 Abel 群上, 存在对应于 Haar 测度的平移不变积分, 称为 Haar 积分, 记为

$$\int_G f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{1.2.5}$$

$\mathrm{d}x \equiv \mathrm{d}\mu$ 是相应的 Haar 积分微元. Haar 积分满足

$$\int_G f(ax)\,\mathrm{d}x = \int_G f(xa)\,\mathrm{d}x = \int_G f(x)\,\mathrm{d}x, \quad a \in G.$$

进而, 在相差一个常数因子的意义下, 局部紧 Abel 群上的 Haar 积分是唯一确定的.

2. *局部域 K_q 上的 Haar 积分*

局部域 K_q 中包含了两个局部紧 Abel 群: 加群 K_q^+ 与乘群 K_q^*. 因此, 对于 K_q^+, K_q^* 都存在相应的 Haar 积分. 在局部域的调和分析中, 这两个群上的 Haar 积分都具有重要的地位. 本书重点讨论 K_q^+ 上的调和分析. 对于 K_q^*, 其上的调和分析具有更特殊、更有趣、更值得研究的性质, 在本书最后将给出提示与思考.

对于局部域 K_q 的加群 K_q^+, 其 Haar 积分记为

$$\int_{K_q} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

满足平移不变性

$$\int_{K_q} f(x+a)\,\mathrm{d}x = \int_{K_q} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \forall a \in K_q.$$

需要定义 $a \in K_q \backslash \{0\}$ 的模函数.

定义 1.2.3 (模函数) 设 K_q 为局部域, 定义 $a \in K_q \backslash \{0\}$ 的模函数 $a \to |a|$ 为

$$|a| = \frac{\displaystyle\int_{K_q} f\left(a^{-1}x\right) \mathrm{d}x}{\displaystyle\int_{K_q} f(x) \mathrm{d}x} = \frac{\displaystyle\int_{K_q} f(x) \mathrm{d}(ax)}{\displaystyle\int_{K_q} f(x) \mathrm{d}x}, \tag{1.2.6}$$

其中 $\mathrm{d}(ax)$ 满足

$$\mathrm{d}(ax) = |a| \mathrm{d}x. \tag{1.2.7}$$

这里的模函数实际上也是 K_q 上的一种非阿基米德赋值 (K_q 上的 Haar 测度与非阿基米德赋值在相差一个常数因子的意义下都是唯一的).

进而, 若定义

$$\mathrm{d}(x, y) = |x - y|, \tag{1.2.8}$$

则 K_q 成为一个 "超距空间".

由此, 一个局部域 K_q 实际上是一个 T_2 型、局部紧、全不连通、非阿基米德赋值、完备的超距拓扑域.

注 局部域 K_p 还可以视为 "有理数域 $\mathbb{Q} = \left\{\dfrac{q}{p} : q \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N}\right\}$ 关于非阿基米德赋值 $x \in K_p \to |x| \in [0, +\infty)$ 的完备化"[46].

1.2.4 局部域 K_q 中的重要子集

利用非阿基米德赋值来定义局部域 K_q 中的一些重要子集是适宜的. 下面所用的这些集合的名称, 例如素群、环、子环、整数环、理想、素理想、最大理想、单位元素群、分数理想等, 都是代数学中常用的标准的概念, 这里不作详细介绍, 读者可参看文献 [6], [26], [87] 中的定义. 在局部域分析中, 特别重要的是集合在局部域 K_q 的非阿基米德赋值之下的表示、Haar 测度、拓扑性质 (如开、闭、紧性) 等.

1. K_p 中的子集

(1) K_p 的整数环 (the ring of integers in K_p) D:

$$D = \{x \in K_p : |x| \leqslant 1\}, \tag{1.2.9}$$

它是 K_p 的唯一的最大紧子环 (the unique maximal compact subring), 也是 K_p 的既开又闭且紧的子集, 其 Haar 测度为 $|D| = 1$.

(2) K_p 的素理想 (the prime ideal in K_p) B:

$$B = \{x \in K_p : |x| < 1\}, \tag{1.2.10}$$

它是 D 内唯一的最大理想 (the unique maximal ideal), 也是主理想与素理想, 并且还是 K_p 的既开又闭且紧的子集, 其 Haar 测度为 $|B| = p^{-1}$.

(3) K_p^* 的单位素群 (the group of unit in K_p^*) D^*:

$$D^* = \{x \in K_p : |x| = 1\} = D \backslash B, \tag{1.2.11}$$

它也是 K_p 的既开又闭且紧的子集, 其 Haar 测度为 $|D^*| = 1 - p^{-1}$.

(4) K_p 的分数理想 (the fractional ideal in K_p) B^k:

$$B^k = \left\{x \in K_p : |x| \leqslant p^{-k}\right\} = \beta^k D, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{1.2.12}$$

它们都是 K_p 的既开又闭且紧的子集, 其 Haar 测度为 $\left|B^k\right| = p^{-k}$.

另一方面, 对于 $k \geqslant 0$, B^k 是 K_p 的子环.

易见, $B = \{x \in K_p : |x| < 1\} = \left\{x \in K_p : |x| \leqslant p^{-1}\right\} = B^1$.

注 以上子集的 Haar 测度将在 2.3 节给出详细的计算.

2. K_q 中的子集

对于扩域 K_q, 可类似地定义以上子集, 并且为区分起见, 在记号后加上 q, 例如

$$\begin{aligned}
&D(q) = \{x \in K_q : |x| \leqslant 1\}, \\
&B(q) = \{x \in K_q : |x| < 1\}, \\
&D^*(q) = \{x \in K_q : |x| = 1\}, \\
&B^k(q) = \left\{x \in K_q : |x| \leqslant q^{-k}\right\}, \quad k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

1.2.5 局部域 K_q 的邻域基

1. K_p 的邻域基

利用非阿基米德赋值可以给出 K_p 中加法零元 0 的拓扑邻域基, 即基本邻域系.

由于集族 $\left\{B^k \subset K_p : k \in \mathbb{Z}\right\}$ 与其中的集合 B^k 满足:

(i) $\left\{B^k \subset K_p : k \in \mathbb{Z}\right\}$ 是零元 0 的邻域滤系基, 且递减, $B^{k+1} \subset B^k, k \in \mathbb{Z}$;

(ii) $B^k, k \in \mathbb{Z}$, 是 K_p 中的既开又闭且紧的集合;

(iii) $K_p = \bigcup\limits_{k=-\infty}^{+\infty} B^k$, $\{0\} = \bigcap\limits_{k=-\infty}^{+\infty} B^k$;

(iv) 商群 D/B 可表示为

$$D/B = \left\{0 \cdot \beta^0 + B, 1 \cdot \beta^0 + B, \cdots, (p-1) \cdot \beta^0 + B\right\},$$

其中 $j \cdot \beta^0 + B, j = 0, 1, \cdots, p-1$ 是 B 在 D 中的 p 个陪集, 并且集组

$$\left\{j \cdot \beta^0 + B : j = 0, 1, \cdots, p-1\right\} \tag{1.2.13}$$