精彩升级 真诚回报

万向思维

我的助理

倍速®

100+100+100 ?= 1000000

学习法

图说教材+学法引擎+知识精讲+典例精析+教材答案

高中数学 必修 5

人教A版 主 编 刘增利®

打造学科状元

北京出版集团公司 北京教育出版社

倍速®

100+100+100=1000000

学习法

高中数学 必修5

人教A版 主　编　刘增利

学科主编　赵　敏
本册主编　钟　政
编　　者　钟　政　占德波

北京出版集团公司
北京教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

倍速学习法：人教版．高中数学．5：必修／刘增利主编．—北京：北京教育出版社，2007.5
ISBN 978-7-5303-5795-8

Ⅰ．倍…　Ⅱ．刘…　Ⅲ．数学课—高中—教学参考资料
Ⅳ．G634

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第083436号

万向思维奖学金获奖名单(2011年7月,部分名单)

麻添虹(辽宁锦州)	陈　雷(陕西宝鸡)	王　卢(四川乐山)	马赫迪(陕西西安)	罗盛楠(安徽铜陵)
周佳俊(安徽芜湖)	陶大帅(江苏淮安)	李　琼(甘肃陇南)	滕乾松(广西百色)	张义宏(河南光山)
陈满发(广东珠海)	邓梦其(江西南昌)	陈燕洪(福建福州)	李晓庆(云南丽江)	钟珍纯子(湖南岳阳)
梁柏坚(广西桂平)	刘　帅(河北承德)	刘晓怡(广西钦州)	许译丹(河南焦作)	何小玲(四川内江)
张　莉(浙江上虞)	秦　璇(安徽马鞍山)	何洋欢(四川遂宁)	李宗豪(福建宁德)	李杠杆(广东茂名)
袁振斌(广东梅州)	薛慧敏(福建莆田)	洪　蒙(江西余干)	丁　睿(甘肃高台)	孟懿婷(内蒙古呼和浩特)

倍速学习法 BEISU XUEXI FA　高中数学必修5 GAOZHONG SHUXUE BIXIU 5　人教A版 RENJIAO A BAN

策划设计　北京万向思维基础教育教学研究中心数学教研组
主　　编　刘增利
执行策划　杨文彬
学科主编　赵　敏
本册主编　钟　政
责任编辑　季　语　夏　伟
责任审读　苏　恒
责任校对　闫宇杰
责任录排　陈叶珍
插图制作　李双双
封面设计　魏　晋
版式设计　廉　赢
责任印制　赵天宇
印　　刷　陕西思维印务有限公司

出　　版　北京出版集团公司
　　　　　北京教育出版社
地　　址　北京北三环中路6号
邮　　编　100120
网　　址　www.bph.com.cn
总 发 行　北京出版集团公司
经　　销　各地书店
开　　本　890×1240　1/32
印　　张　9
字　　数　252千字
版　　次　2008年9月第2版
印　　次　2011年11月第5次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5303-5795-8/G·5714
定　　价　18.80元

万向思维教育图书官方网址：http://www.wanxiangsiwei.com
万向思维新浪微博：@万向思维教育图书
最给力的学习网——啃书网：www.kbook.com.cn
主编邮箱：zbwxsw@126.com　投稿邮箱：tgwxsw@126.com
图书质量监督电话：010-82378880(含图书内容咨询)　010-58572750　010-58572393
通信地址：北京市海淀区王庄路1号清华同方科技广场B座16层(邮编100083)
教师QQ交流群：90232286(欢迎一线老师加入，交流教学经验，共享教学资源)

目录

CONTENTS

第一章 解三角形

第二章 数列

知识 方法
专题 考点

索引

INDEXES

第一章 解三角形

1.1 正弦定理和余弦定理

1.1.1 正弦定理

1.1.2 余弦定理

1.2 应用举例

1.3 实习作业

本章总结

第二章 数列

2.1 数列的概念与简单表示法

2.2 等差数列

2.3 等差数列的前 n 项和

2.4 等比数列

2.5 等比数列的前 n 项和

本章总结

第三章　不等式

3.1　不等关系与不等式

3.2　一元二次不等式及其解法

3.3 二元一次不等式(组)与简单的线性规划问题

3.3.1 二元一次不等式(组)与平面区域

3.3.2 简单的线性规划问题

3.4 基本不等式：$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$

本章总结

第一章

搜一搜 解三角形

Loading......

学法 | 目录 | 问题 | 重点 | 评论 | 博客 | 感受 | 图片 | 生活 | 故事 | 妙想 | 相关

倍速 Beisu 学习引擎

解三角形 GO

进入词条　搜索词条

相关链接

1. 正弦定理
2. 正弦定理的应用
3. 余弦定理
4. 余弦定理的应用
5. 解三角形
6. 三角形中的几何计算
7. 解三角形的实际应用

用正、余弦定理求三角形一个内角的度数时，为什么有时候有一个解，有时候有两个解呢？

这个其实很简单的，当所求出的正弦值是小于1的正数时，这个角可能是锐角也可能是钝角，且锐角和钝角互补；当求出的是这个角的余弦值时，这个角只有一种情况，即要么是锐角，要么是钝角，要么是直角.

很多实际问题都是用正、余弦定理解的，也确实很简单，但是怎么选择是用正弦定理还是余弦定理呢？迷糊中～～

有的问题既能用正弦定理解也能用余弦定理解. 一般来说，已知两角及一边时，只能用正弦定理. 已知两边及一角，若角为夹角，则只能用余弦定理求第三边；若角为已知边的对角时，可用正弦定理求角，也可以用余弦定理求第三边.

【正弦定理】 GO

正弦定理是由伊朗著名的天文学家阿布尔·威发首先发现与证明的. 中亚细亚人阿尔比鲁尼给三角形的正弦定理作出了一个证明. 也有人说正弦定理的证明是13世纪的那希尔丁在《论完全四边形》中第一次把三角学作为独立的学科进行论述，首次清楚地论证了正弦定理. 他还指出，由球面三角形的三个角，可以求得它的三个边，或由三边去求三个角. 这是区别球面三角与平面三角的重要标志. 至此三角学开始脱离天文学，走上独立发展的道路.

1.1 正弦定理和余弦定理

1.1.1 正弦定理

自主学习/享受探究乐趣

一、新知导入

忆旧（知识回顾） 迎新（问题引入）

在任意三角形中，有大角对大边，小角对小边的关系.

对任意三角形，其边角的大小是否有准确的量化关系？

二、新知详析

知识点1：正弦定理

(1)在一个三角形中，各边和它所对角的正弦的比相等，即$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

(2)正弦定理有如下变形形式：

①$a=2R\sin A,b=2R\sin B,c=2R\sin C$（$R$是三角形的外接圆半径）.

②$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$.

③$a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\frac{c\sin A}{\sin C}$；$b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{c\sin B}{\sin C}$；$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{b\sin C}{\sin B}$.

④$\sin A=\frac{a}{b}\sin B=\frac{a}{c}\sin C$；$\sin B=\frac{b}{a}\sin A=\frac{b}{c}\sin C$；$\sin C=\frac{c}{a}\sin A=\frac{c}{b}\sin B$.

特别提示 tebietishi

(1) 无论三角形形状如何，均满足$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$($R$为$\triangle ABC$外接圆的半径，如图1-1.1-1).

(2) 在$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$中，每个等式均可视为一个涉及三角形中四个元素的方程，已知其中三个，可求第四个.

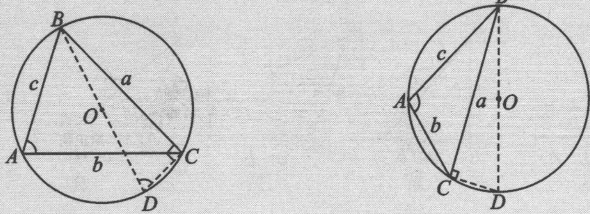

图 1-1.1-1

知识点 2：**解三角形**

(1) 一般地，把三角形的三个角 A,B,C 和它们的对边 a,b,c 叫做三角形的元素. 已知三角形的几个元素求其他元素的过程叫做解三角形.

(2) 运用正弦定理可以解决以下两类解三角形问题：

①已知三角形的任意两边和其中一边的对角，解三角形. 基本解法是：先由正弦定理求出另一边所对的角，然后用三角形的内角和定理求出第三个角，再用正弦定理求出第三边，注意判断解的个数.

②已知三角形的任意两角和一边，解三角形. 基本解法是：若所给边是已知角的对边，可由正弦定理求出另一边，再由三角形内角和定理求出第三个角，最后由正弦定理求出第三边；若所给边不是已知角的对边，可先由三角形内角和定理求出第三个角，再由正弦定理求出三角形的另外两边.

要解三角形必须至少已知三角形的一条边的长. 若已知条件中一条边的长也没给出，则三角形可以是任意的，此时无法求解.

特别提示 tebietishi

在$\triangle ABC$中，如果已知边 a，b和角 A，那么解的情况讨论如下：

一般地，已知三角形的两边和其中一边的对角解三角形，有两解、一解和无解三种情况.

①A为锐角，如图 1-1.1-2(1).

②A为直角或钝角，如图 1-1.1-2(2).

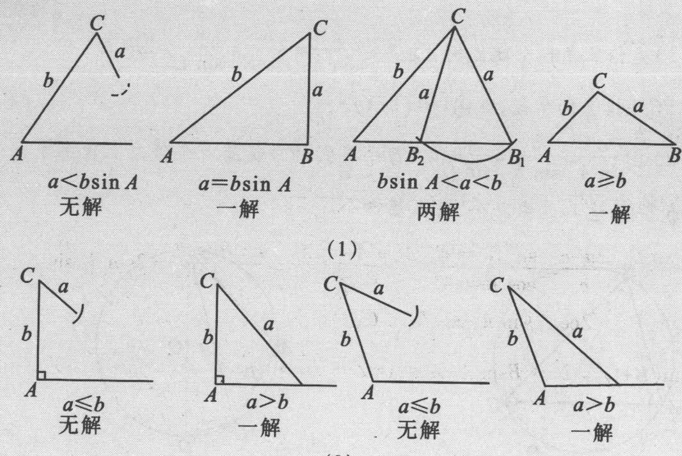

图1-1.1-2

知识点3:三角形的面积公式

(1)$S=\frac{1}{2}\times$底$\times$高.

(2)在$\triangle ABC$中,边a,b,c的对角分别为A,B,C,则$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B$.

特别提示 tebietishi

上述(2)中的三角形面积公式可叙述为"三角形的面积等于任意两边与它们夹角正弦乘积的一半".

解题方法 /乘坐智慧快车

一、基础经典全析

题型1　判断三角形的个数

例1 在$\triangle ABC$中,$a=2$,$b=2\sqrt{3}$,$A=30^\circ$,满足此条件的三角形有______.

分析 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\Rightarrow\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{2\sqrt{3}\times\frac{1}{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.又$\because b>a$,$\therefore B=60^\circ$或$120^\circ$均符合题意.

答案 key 2个.

点拨：注意当解三角形的条件是已知两边及其中一边的对角时，有可能不止一个解.

题型2　应用正弦定理解题

例2 在$\triangle ABC$中，$\frac{a}{c}=\sqrt{3}-1$，$\frac{\tan B}{\tan C}=\frac{2a-c}{c}$，求角$A,B,C$的值.

分析 利用正弦定理，可把$\frac{2a-c}{c}$换成$\frac{2\sin A-\sin C}{\sin C}$，即“边化角”.

解：$\frac{\tan B}{\tan C}=\frac{2a-c}{c}\Rightarrow\frac{\sin B\cos C}{\cos B\sin C}=\frac{2\sin A-\sin C}{\sin C}\Rightarrow\frac{\sin B\cos C}{\cos B}=2\sin A-\sin C\Rightarrow$ $\sin B\cos C=2\cos B\sin A-\cos B\sin C$，

$\therefore \sin(B+C)=2\cos B\sin A\Rightarrow\sin A=2\cos B\sin A\Rightarrow\cos B=\frac{1}{2}\Rightarrow B=60°$.

$\frac{a}{c}=\frac{\sin A}{\sin C}=\sqrt{3}-1\Rightarrow\sin(120°-C)=(\sqrt{3}-1)\sin C\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C+\frac{1}{2}\sin C=(\sqrt{3}-1)\sin C\Rightarrow\tan C=2+\sqrt{3}\Rightarrow C=75°$，

$\therefore A=45°,B=60°,C=75°$.

方法归纳

利用正弦定理可把边的关系转化为角的关系，从而进一步利用三角函数的变换求解.

题型3　正弦定理的综合运用

例3 在$\triangle ABC$中，$\frac{b^2}{a^2}=\frac{\tan B}{\tan A}$，则$\triangle ABC$是________三角形.

分析 $\because \frac{b^2}{a^2}=\frac{\tan B}{\tan A}\Leftrightarrow\frac{\sin^2 B}{\sin^2 A}=\frac{\sin B\cos A}{\cos B\sin A}\Leftrightarrow\sin A\cos A=\sin B\cos B\Leftrightarrow\sin 2A=\sin 2B\Leftrightarrow$ $A=B$或$A+B=\frac{\pi}{2}$，$\therefore\triangle ABC$为等腰三角形或直角三角形.

答案 key 等腰或直角.

点拨：这里利用了正弦定理的变形形式$a=2R\sin A$和$b=2R\sin B$.

例4 在$\triangle ABC$中，AD是$\angle BAC$的平分线，求证：$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$.

分析 本题是证明边的关系，可利用正弦定理将边长之比通过角的正弦引入，转化成角的正弦之比，即把证边相等转化成证角相等来解决.

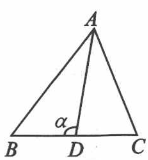

图1-1.1-3

证明：如图1-1.1-3，设$\angle ADB=\alpha$，在$\triangle ABD$中，由正弦定理得

$\frac{BD}{\sin\angle BAD}=\frac{AB}{\sin\alpha}$,即$\frac{BD}{AB}=\frac{\sin\angle BAD}{\sin\alpha}$.

在$\triangle ACD$中,由正弦定理得

$\frac{DC}{\sin\angle DAC}=\frac{AC}{\sin(\pi-\alpha)}$,即$\frac{DC}{AC}=\frac{\sin\angle DAC}{\sin\alpha}$.

又$\because\angle BAD=\angle DAC$,$\therefore\frac{BD}{AB}=\frac{DC}{AC}$,即$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$.

点拨:本题利用了互补的两角的正弦值相等的关系解题.

例5 在$\triangle ABC$中,求证:$\frac{a^2-b^2}{\cos A+\cos B}+\frac{b^2-c^2}{\cos B+\cos C}+\frac{c^2-a^2}{\cos C+\cos A}=0$.

分析 观察等式的特点,等式中有边有角,要把边角统一,因此利用正弦定理将a^2,b^2,c^2转化为$\sin^2A,\sin^2B,\sin^2C$的形式.

证明:由正弦定理有$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$,

$\therefore\frac{a^2-b^2}{\cos A+\cos B}=\frac{4R^2\sin^2A-4R^2\sin^2B}{\cos A+\cos B}=\frac{4R^2[(1-\cos^2A)-(1-\cos^2B)]}{\cos A+\cos B}$

$=\frac{4R^2(\cos^2B-\cos^2A)}{\cos A+\cos B}=4R^2(\cos B-\cos A)$.

同理可得$\frac{b^2-c^2}{\cos B+\cos C}=4R^2(\cos C-\cos B)$,

$\frac{c^2-a^2}{\cos C+\cos A}=4R^2(\cos A-\cos C)$.

$\therefore$等式左边$=4R^2(\cos B-\cos A+\cos C-\cos B+\cos A-\cos C)=0=$右边.

$\therefore$等式成立.

方法归纳

在三角形中,解决有关含有边与角关系的问题时,常运用正弦定理化边为角,然后利用三角函数的知识去解决.

二、综合创新探究

例6 不解三角形,判断下列三角形解的个数.

(1)$a=5,b=4,A=120°$;(2)$a=7,b=14,A=150°$;

(3)$a=9,b=10,A=60°$;(4)$c=50,b=72,C=135°$.

解:(1)$\because\sin B=\frac{b}{a}\sin 120°=\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}<\frac{\sqrt{3}}{2}$,$\therefore\triangle ABC$有一解.

(2)$\because\sin B=\frac{b}{a}\sin 150°=1$,$\therefore\triangle ABC$无解.

(3)$\because \sin B=\frac{b}{a}\sin 60°=\frac{10}{9}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{9}$,而$\frac{\sqrt{3}}{2}<\frac{5\sqrt{3}}{9}<1$,

$\therefore$ 满足 $\sin B=\frac{5}{9}\sqrt{3}$ 的锐角 B 的取值范围为 $60°<B<90°$,

对应的钝角 B 的取值范围为 $90°<B<120°$,满足 $A+B<180°$,

故$\triangle ABC$ 有两个解.

(4)$\because \sin B=\frac{b}{c}\sin C=\frac{72}{50}\sin C>\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$\therefore B>45°$,

$\therefore B+C>180°$,故$\triangle ABC$ 无解.

点拨:利用当 $a<b\sin A$ 时,$\triangle ABC$ 无解;当 $a=b\sin A$ 时,$\triangle ABC$ 有一解;当 $a>b\sin A$ 时,$\triangle ABC$ 有两解.也可根据三角形解的个数判断.

例 7 在$\triangle ABC$ 中,设$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

求证:$\triangle ABC$ 为正三角形.

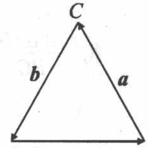

图 1-1. 1-4

分析 要证$\triangle ABC$ 为正三角形,只需证 $A=B=C$ 即可,解题的关键是建立向量的数量积与正弦定理的联系.

证明:如图 1-1. 1-4,由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ 得

$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\pi-C)=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos(\pi-A)$,

$\therefore |\boldsymbol{a}|\cos C=|\boldsymbol{c}|\cos A$.

由正弦定理得 $\sin A\cos C=\sin C\cos A$,$\therefore \sin(A-C)=0$,$\therefore A=C$.

同理由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$,可得到 $B=C$.

$\therefore A=B=C$,即$\triangle ABC$ 为正三角形.

例 8 已知方程 $x^2-(b\cos A)x+a\cos B=0$ 的两根之积等于两根之和,且 a,b 为$\triangle ABC$ 的两边,A,B 为 a,b 的对角,试判断$\triangle ABC$ 的形状.

分析 要判断三角形的形状,可以由正弦定理,把边角关系转化为角之间的关系,从而由角来判断三角形的形状.

解:设方程的两根为 x_1,x_2,由根与系数的关系得

$x_1+x_2=b\cos A$,$x_1x_2=a\cos B$,即 $b\cos A=a\cos B$.

由正弦定理得 $\sin B\cos A=\sin A\cos B$,

即 $\sin A\cos B-\cos A\sin B=0$,$\therefore \sin(A-B)=0$.

在$\triangle ABC$ 中,$\because A,B$ 为其内角,$\therefore 0<A<\pi,0<B<\pi,-\pi<A-B<\pi$.

$\therefore A-B=0$,即 $A=B$.$\therefore \triangle ABC$ 为等腰三角形.

点拨:本题通过方程的形式给出了边角关系,然后由正弦定理进行边角转化,从而判定三角形的形状.

例 9 如图 1-1. 1-5,一条直线上有 A,B,C 三点,点 C 在点 A 与点 B 之间,点 P

是此直线外一点,设$\angle APC=\alpha$,$\angle BPC=\beta$. 求证:$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{PC}=\frac{\sin\alpha}{PB}+\frac{\sin\beta}{PA}$.

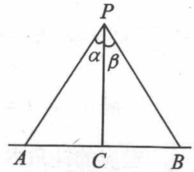

图 1-1.1-5

分析 本题要证明的等式中,既有边也有角,故可考虑用正弦定理. 但在两个三角形中,应用正弦定理有一定的困难,故可借助于$S_{\triangle ABP}=S_{\triangle APC}+S_{\triangle BPC}$去证明.

证明:$\because S_{\triangle ABP}=S_{\triangle APC}+S_{\triangle BPC}$,

$\therefore \frac{1}{2}PA\cdot PB\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}PA\cdot PC\sin\alpha+\frac{1}{2}PB\cdot PC\sin\beta$.

两边同除以$\frac{1}{2}PA\cdot PB\cdot PC$,

得$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{PC}=\frac{\sin\alpha}{PB}+\frac{\sin\beta}{PA}$.

点拨:本题利用等积变换证明,方法灵活.

三、相关高考信息

高考中对正弦定理的考查常与三角函数联系在一起,以它们为工具,通过三角恒等变换来解决问题,常考题型有判断三角形的形状、在三角形中证明恒等式、解三角形等.

例10 (2011·辽宁理)$\triangle ABC$的三个内角,A,B,C所对的边分别为a,b,c,$a\sin A\sin B+b\cos^2 A=\sqrt{2}a$,则$\frac{b}{a}=$(　　).

A. $2\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{2}$

分析 由正弦定理,得$\sin^2 A\sin B+\sin B\cos^2 A=\sqrt{2}\sin A$,即$\sin B\cdot(\sin^2 A+\cos^2 A)=\sqrt{2}\sin A$,所以$\sin B=\sqrt{2}\sin A$. 所以$\frac{b}{a}=\frac{\sin B}{\sin A}=\sqrt{2}$,故选 D.

答案 key D.

点拨:本题主要考查正弦定理的应用.

厚积薄发 / 总结学习规律

知识要点	总　结	注意问题	对应例题	对应习题
正弦定理	正弦定理揭示了三角形的边长和对角之间的数量关系	已知两边与其中一边的对角时,解的情况可以有几种可能	例1,例3~例9	1,3,5~8