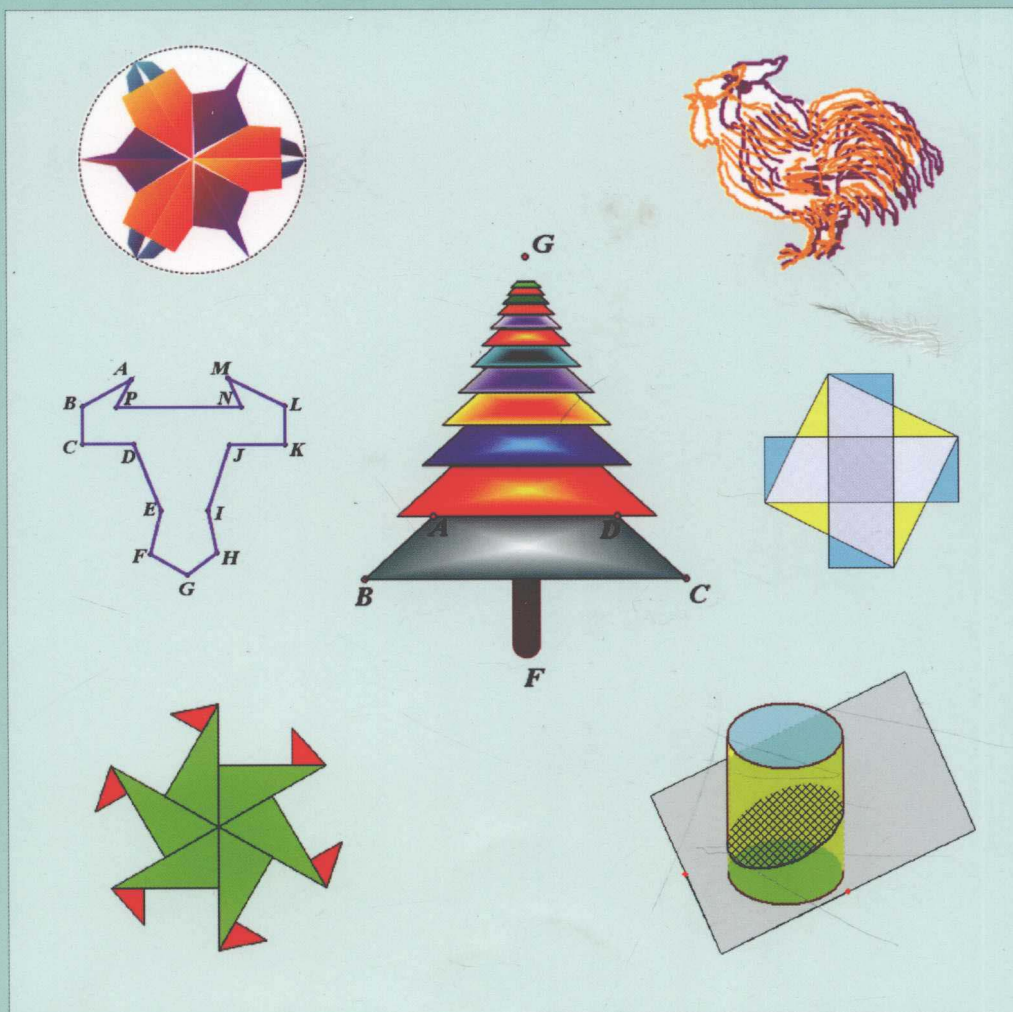


超级画板帮你学数学

之图形与变换

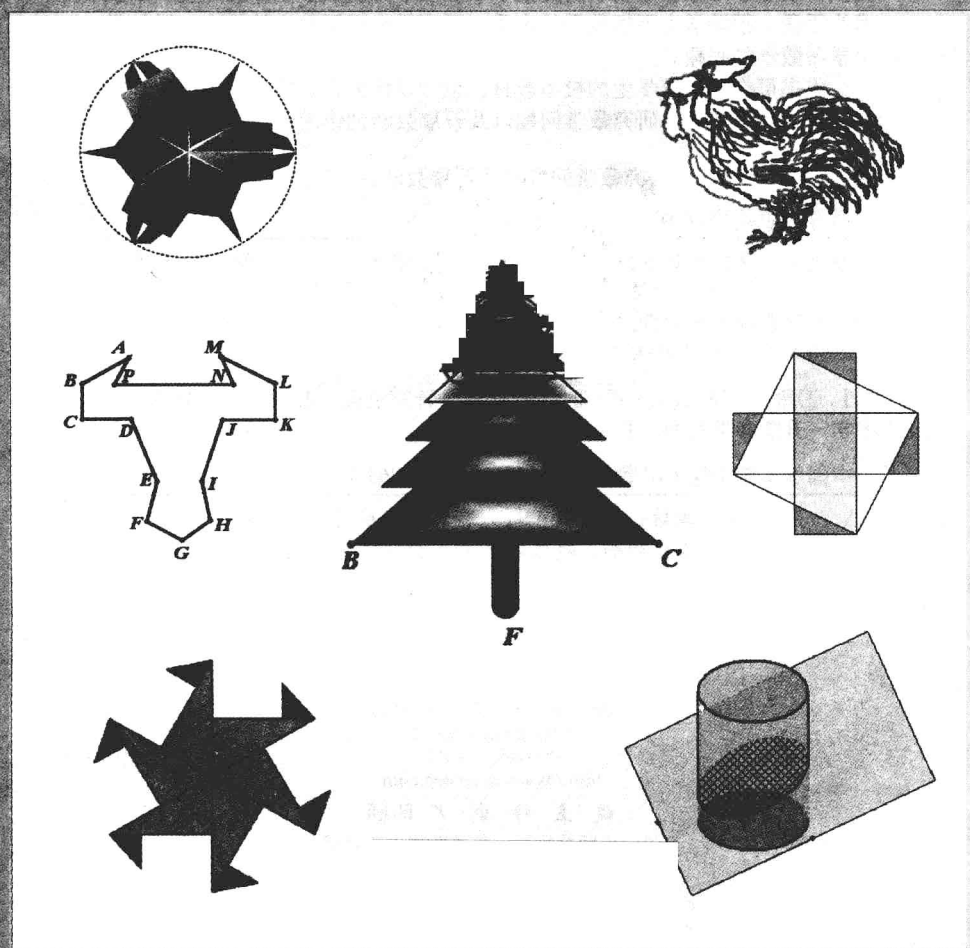
左传波 著



科学出版社

超级画板帮你学几何 之图形与变换

左传波 著



科学出版社

北京

内 容 简 介

高度的抽象性是数学的特征，也是数学的魅力之处。例如我们说，三角形的内角和为 180° ，实际上指的是：所有三角形的内角和为 180° ，而不需要一一去测量和验证。但是，数学的抽象性使当前的数学教育面临着前所未有的危机。

教育的目的不是择优录取，而是培养兴趣。因此，应该为学生学习数学提供更好的环境，开发更好的工具，研制更好的教材，而不是将“厌恶数学、远离数学”的现象推脱于学生自身。

这一系列小册子以动态几何软件“Z+Z 超级画板”为平台，为学生提供了动手学习数学、动手研究数学以及动手开展数学创作的环境。以技术为手段，帮助学生理解数学的本质，提高学生运用数学的能力，增加学生学习数学的兴趣。

本书可作为在校学生的校本教材，也可以作为青少年通过了解数学文化、学习数学知识、研究数学问题以及开展数学创作的科普材料。

图书在版编目(CIP)数据

超级画板帮你学数学之图形与变换 / 左传波著. —北京: 科学出版社, 2011

(Z+Z 智能教育平台普及丛书 / 张景中主编)

ISBN 978-7-03-029941-3

I. ①超… II. ①左… III. ①数学课—计算机辅助教学—应用软件—中学—升学参考资料 IV. G633.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 003263 号

责任编辑: 李 敏 赵 鹏 / 责任校对: 刘小梅

责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

骏立印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 2 月第 一 版 开本: 787 × 1092 1/16

2011 年 2 月第一次印刷 印张: 6 3/4

印数: 1—4 000 字数: 141 000

定价: 20.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

《Z + Z 智能教育平台普及丛书》

编写委员会

主 编 张景中

副主编 左传波

编 委 张景中 王鹏远 李传中

左传波 饶永生 周传高

本书软件系统设计 李传中 张景中

本书软件程序编写 李传中 陈天翔



丛书序

编写这套丛书，是想让老师们和同学们能够更方便地使用《Z+Z 超级画板》。

为了教学或学习，要做各种具体的事情。这些事情当中，有不少是机械性、重复性的劳动。

例如，几何作图、描点画曲线、作统计表和统计图、繁琐的计算以及书写公式等。这些工作交给计算机来做，可以事半功倍，有利于腾出更多的时间和精力投入更具创造性的活动。

还有些事情，不用计算机几乎不能做。例如，画一个旋转的立方体，让变动的点、线、圆留下轨迹，对变化的几何量实时测量，把 13 自乘 1000 次等。安排计算机做这些，有利于在教学或学习中把某些问题表现得更清楚、理解得更透彻。

简单来说，使用计算机的好处至少有两条：一条是减轻负担，一条是提高兴趣。对老师们来说主要是减轻负担，对同学们来说主要是提高兴趣。

使用计算机做事，离不开软件。有很多软件可以做上面说的这些事。例如，作动态几何图形的软件、画函数曲线的软件、造统计表的软件、进行计算或公式排版的软件等。但是，软件多了，学起来就要花更多的力气，用起来切换麻烦，还有兼容问题。常常听老师们说，要有一种多功能的教学工具软件就好了。

这套丛书里说的《Z+Z 超级画板》，就是这种多功能的教学工具软件。买生活必需品上超级市场，应有尽有；在教学活动中用超级画板，得心应手，左右逢源。超级画板的“超级”之意，就是比照超级市场而来。至于“Z+Z”，则是“知识+智慧”的意思。

也就是说，这是一款知识性和智能性相结合的、多功能的教学软件。目前的版本，特别适合数学和物理学科的教学和学习。

超级画板的功能很多，用户手册就接近 300 页。但它毕竟是个工具，就像黑板、粉笔、直尺、圆规、三角板一样。根据您的工作需要，先用它最常



用、最好用的功能。

使用超级画板这样的软件，又好像下象棋、下围棋，上手入门十分容易，成为高手往往要经过辛勤劳动。有些对计算机还不熟悉的老师问我，现在都知道课程要和信息技术整合，但如何具体做起来呢？我的建议是尽快动手使用信息技术，由浅入深，分下面四个层次来做：

第一个层次，是改变工具、减轻劳动。

这是初步的简单应用。自己的教学经验和特长要保持、要发挥。原来怎样上课、备课现在仍然保持自己的习惯和套路。但是想一想，有没有一些事情用计算机作起来更省力、省事、省时间呢？用计算机画一些比较复杂的图形总比用粉笔在黑板上画方便吧？用计算机写教案、修改、引用总要方便些吧？用计算机作计算或书写推导公式总要快捷准确些吧？有条件，在网上布置作业答疑就更便利了。这些工作，本来也能做，用了新技术能够做得更快、更方便，好像用圆珠笔代替毛笔一样。学习新的工具要花时间精力，但学会了能减轻劳动，是值得的。例如，学会用超级画板作几何图形和函数曲线只要十几分钟甚至几分钟，这样一本万利的事何乐而不为呢。

第二个层次，叫做现场发挥、梦想成真。

过去，在教学过程中常有一些想象或虚拟的比方，但实际上做不到。例如，在黑板上画一个圆内接正多边形，说如果正多边形的边数越来越多，它的面积和周长就越来越接近圆的面积和周长。用了超级画板，画一个边数会逐步增加的正多边形是轻而易举的事。又如，让几何图形和函数图像随参数变化，让运动的图形留下踪迹，让统计图表跟着数据变化……许多过去想到做不到的事，现在都可以在教学现场即兴发挥，随意操作。另外，“电子黑板”上写的、画的东西会自动被储存，根据教学需要随意隐藏、显示或改变颜色和大小位置，这都是过去想到做不到的，现在是家常便饭了。

第三个层次，进行建设资源设计创作。

随着对超级画板操作的熟悉，受同行所做课件的启发，更多地吸取或总结了别人或自己的经验，就会产生创新的愿望和灵感。原来想不到的知识表现方式，现在可以设计出来了。使用超级画板，可以制作引人入胜的动画，设计游戏式的课件和学件，使用自动解题、交互解题、几何图形的信息搜索、编程、迭代等智能性更高的功能建设教学资源，推出创新的成果。在这套丛书中，有不少内容来自于教学一线老师的创造。

第四个层次，达到教学模式推陈出新的境界。

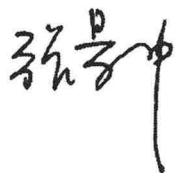
教学资源丰富了，对信息技术运用自如了，备课方法、讲授方法、学习方法、教学组织会自然地发生变化。例如，学生看到老师在课堂上运用自如



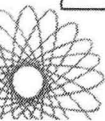
地作图计算推导，看到老师创作的引人入胜的动画，就会产生自己动手试一试的强烈愿望。如果有条件，最好组织学生自己动手在教师指导下探索、试验，尝试开展研究性的学习。由于信息技术的介入，会使学生全身心地投入到教学活动之中，对课程内容产生浓厚的兴趣。在这方面，有些老师已经作了成功的探索，本丛中相当多的篇幅，就来自他们的亲身体会。

如果这套丛书能帮读者实现上述几个层次的提升，从减轻负担到增长兴趣再到创新发展，编著者的辛劳，就是得到了最好的回报。

我们还希望，这套丛书不仅是老师们和同学们的参考读物，也是大家创造性地教学与学习活动的园地和平台。希望大家在阅读使用中对它的内容和形式多多提出批评指正，对《Z+Z 超级画板》软件多多提出改进意见，使软件和丛书变得更实用、更丰富，共同为中国的教育信息化贡献我们的力量。



2004年8月





技术注入新活力

我们学习几何体和几何图形的时候，不是研究它们的颜色或材料，而是首先从形状上进行分类，例如图1中都是正方体，图2中都是三角形。在图1中，三个物体大小不同，但它们都有六个面并且每个面都是正方形，所以都是正方体；在图2中，它们都是由三条线段围成的图形，虽然角度和边长各不相同，但都称作三角形。

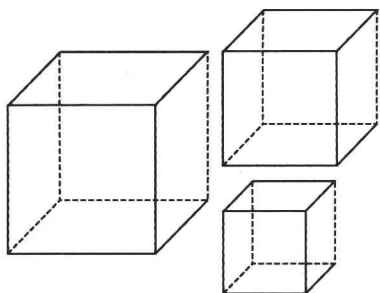


图1 正方体

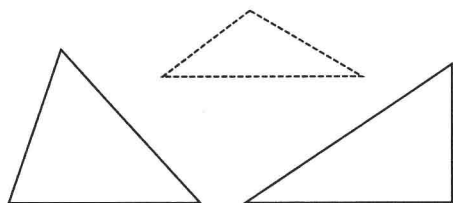


图2 三角形

数学就是这样：它只关注图形的性质以及图形之间的关系，如两条直线是否平行、两个夹角是否相等、两个点是否重合等，而不关心线段粗细、画线颜色等问题。因此，数学研究的对象具有一定的抽象性。

正是因为数学的抽象性，它所研究的对象往往不是某一个具体的。例如：

“三角形的内角和为 180° ” 实际上指的是“所有三角形的内角和均为 180° ” 或者说“任意三角形的内角和都是 180° ”。

我们不可能画出所有形状的三角形，更不可能对它们的内角一一测量，然后进行加法运算。但是，我们却需要掌握所有三角形都拥有的这条性质：内角和为 180° 。

这就是：任意变化的三角形中，不变的数学性质！

这就是数学的魅力：对于任何人在黑板上画出的任意三角形，不需要测量我们就知道它的内角和一定为 180° ！

但数学的抽象性同时也给很多同学的学习上带来了障碍，从而让数学变得难懂、难学。

为了突破这种障碍，世界各地的数学家和教育家们从20世纪90年代开始逐步研发出了一种叫做“动态几何系统”的软件。在动态几何系统中作出的图形，可以随意移动、拉伸或者旋转，而图形之间的性质始终保持不变，相等还是相等、垂直还是垂直、平行还是平行，等等。在动态几何系统中，图形通过运动可以帮助我们直观地理解抽象的数学概念，从而让数学变得更容易学习。

事实上，图形一旦动起来，我们就会发现数学变得比以前更好玩了，数学变得比以前更有挑战性了；图形一旦动起来，我们研究数学、探索问题、学习数学的兴趣和积极性就被大大激发起来了。

例如，可以先思考生活中这样一个简单的问题：滚动的车轮边沿上一点经过的路径是一条什么形状的曲线呢？如图3所示。是圆弧吗？是半个椭圆吗？还是其他什么图形？看来，简单的问题也可以变得具有挑战性。

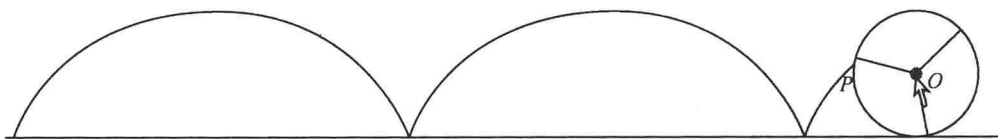


图3 在动态几何软件“Z+Z 超级画板”得到的实验结果

除此之外，我们还可以利用动态几何系统进行设计和创作。我们把利用动态几何软件创作的作品叫做数理动漫作品。我们平时所看到动漫作品（俗称动画片）是由许多预先制作好的静止画面组成的，数理动漫作品的不同在于，它能够动起来是因为对象之间的逻辑关系，牵一发而全动。它的魅力在于未来是确定的，却不可预知。

《超级画板帮你学数学》这套小册子就是为了带领大家利用动态几何软件——Z+Z 超级画板进行数学学习、数学探索、数学研究和数学创作活动而编写。

如何使用这本书

本书所提到的“Z+Z 超级画板”软件以及与本书配套的资源（以 .zjz 结尾的文件）均可以在网站 www.zplusz.org 下载，或者联系 chbzu@yaho.com.cn 咨询。

作者

2010年11月12日于桂花岗



目 录


丛书序

前言

第一章	轻松绘制点线圆	1
第二章	拖动试试规律现	4
第三章	漂亮小鸡爱美丽	8
第四章	镜子内外行动齐	11
第五章	千姿百态万花筒	14
第六章	请找对称在哪里	18
第七章	公鸡排列真整齐	21
第八章	位置如何算平移	24
第九章	利用平移能说理	28
第十章	平移图案得镶嵌	32
第十一章	图案平移又旋转	36
第十二章	各种各样的角度	39
第十三章	角度大小看圆弧	42
第十四章	旋转可得靓图案	45
第十五章	旋转半周谓对称	48
第十六章	利用旋转说面积	52
第十七章	镶嵌还需用旋转	57
第十八章	大小各异形状同	64
第十九章	究竟何谓相似形	66
第二十章	搭建美丽圣诞树	70
第二十一章	放缩变换得位似	73
第二十二章	位置无关构造异	77
第二十三章	多少才能填满	82
第二十四章	圆形压缩得椭圆	85
第二十五章	几何变换代数析	88
第二十六章	还有挑战等着你	93

第一章 轻松绘制点线圆

我们在小学和中学阶段所接触到的几何知识，大多属于欧几里得几何，简称欧氏几何。欧氏几何中的基本图形是：点、线、圆。

启动超级画板；单击工具条中的“画笔”工具，进入画图状态。这时就像拿起了一支笔，可以通过操作鼠标在作图区绘制几何图形了。

在任意位置单击鼠标，就可以作出一个点。同时计算机会自动给它取个名字，如A。

将光标移动到其他位置，单击鼠标并按住鼠标拖动一段距离，然后松开就可以画出一条线段。这条线段有两个端点，分别是起点B和终点C。可以发现，在超级画板中画点、画线段的操作方式与我们在纸上画图的习惯相同。

再把鼠标移动到其他位置，单击鼠标右键并按住拖动一段距离后松开，就可以画出一个圆。可以看到，单击鼠标右键时确定了圆心的位置，松开鼠标时确定了圆的半径大小，如图1-1所示。

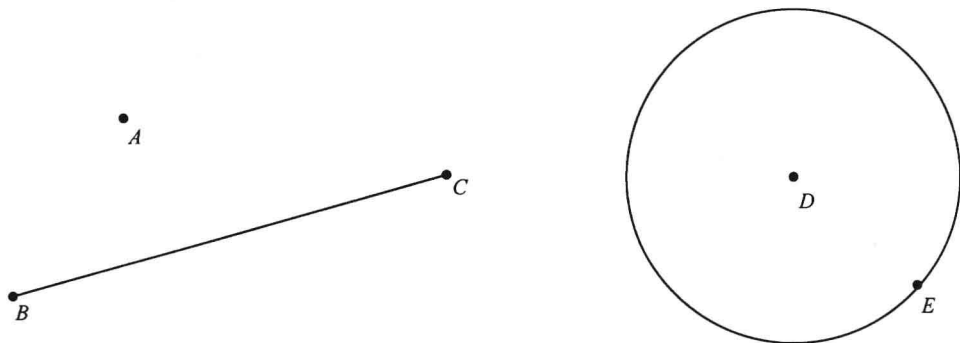



图1-1 利用画笔直接绘制的点、线、圆

单击“选择”工具，就回到了“选择”状态，这就表示放下了画笔。接下来就可以自由地选择、拖动之前所绘制的几何图形了，否则在“画笔”状态下会把作图区画得乱七八糟，就像不能拿着笔在纸上随便指指点点一样。

移动光标到点A的位置时，点A会变为红色，这时单击鼠标就选中了它。然后按住鼠标并拖动就可以移动点A的位置，松开鼠标就可以把它释放。请你也拖动一下其他点，可以发现它们都可以任意拖动。这些能够被任意拖动的点叫做自由点，也叫做完全自由点。

当拖动点B或者点C时，线段BC的长度会发生改变，与水平方向的夹角也会发生改变，这是因为线段BC完全是由端点B和端点C所控制。若不拖动点B和点C，线段

BC 的长度和与水平方向的夹角都不会改变. 可以做以下实验: 移动光标到线段 BC 上, 当 BC 变为红色, 单击鼠标就可以选中它, 然后按住鼠标并拖动就可以平移线段 BC , 如图 1-2 所示, 但它的长度和方向始终保持不变. 当然, 在这个过程中点 B 和点 C 的也会随着线段 BC 一起移动.

当拖动点 E 时, 会改变圆 D 的半径; 当拖动点 D 时, 会改变圆 D 的圆心位置, 同时因为改变了点 D 与点 E 之间的距离, 也会改变圆 D 的半径. 当然, 若不拖动点 E 和点 D , 则圆 D 的半径大小不会改变. 可以做类似的实验: 移动光标到圆 D 的圆周上, 当圆周变为红色, 单击鼠标并按住拖动就可以平移圆 D , 如图 1-3 所示, 但它的半径始终保持不变. 同样, 在这个过程中, 点 D 和点 E 也一起移动.

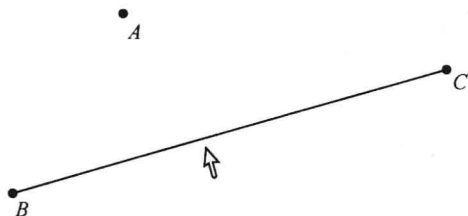


图 1-2 拖动线段 BC

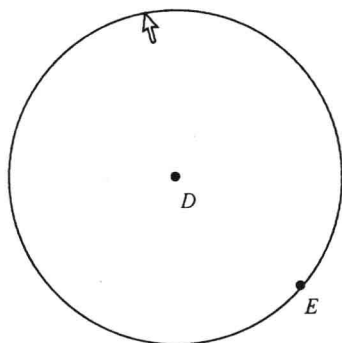



图 1-3 拖动圆周

单击“画笔”工具, 重新进入画图状态.

鼠标指向线段 BC 时, BC 会变为红色, 这时单击鼠标就可以作出线段 BC 上的点, 如点 F ; 单击点 A 并按住鼠标拖动到点 F 后松开鼠标, 就可以连接线段 AF .

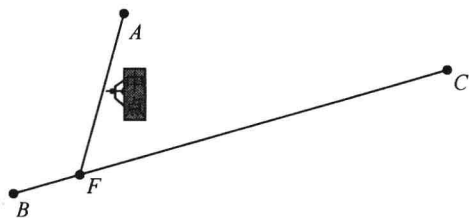


图 1-4 直接作出线段 AF 的中点

鼠标指向线段 AF 中点的附近位置时, 如图 1-4 所示, 光标右侧会出现“中点”提示, 这时单击鼠标就可以作出线段 AF 的中点, 如点 G .

这表明计算机会“察言观色”, 懂得我们的操作意图. 这是因为, 软件设计者在开发软件的过程中将人类的智慧与经验“教”给了计算机, 使它更加人性化、智能化. 因此, 超级

画板中的“画笔”也被称作“智能画笔”.

单击“选择”工具, 再次返回选择状态.

拖动点 F , 它的位置会发生改变, 但它只能在 BC 上移动. 这种只能在规定的路径上被拖动的点, 叫做半自由点. 类似的半自由点还有圆上的点、多边形边界上的点、曲线上的点等. 因为这种点是沿着某种路径有规律地运动, 所以通过它能够研究与其相关对象的运动规律, 因此这种类型的点在动态几何中非常重要.

拖动点 F , 可以发现当它被拖动时, 点 A 和点 F 会同时被拖动. 这种由其他对象确

定位置的点，叫做不自由点，或者约束点。类似的约束点还有垂足，交点，三角形的内心、外心、重心与垂心等。这种点因为其他点的运动而运动，所以常常被当作研究的主要对象，或者观察它的变化规律，或者探索它的轨迹曲线。

思考与练习

(1) 点 F 在线段 BC 上运动的过程中， AF 的中点 G 经过的路径是什么形状的图形？选择点 G ，单击工具条中的“跟踪”命令，可以帮助你观察点 G 经过的路径。

(2) 当点 F 在线段 BC 上运动的过程中，线段 AF 的长度会如何变化？是否有最大值和最小值？何时最短？何时最长？选择线段 AF ，单击工具中的“长度”命令，可以得到线段 AF 的长度测量结果。

(3) 若将“线段 BC ”更改为“直线 BC ”，上述 (1)、(2) 问题中的结论会发生变化吗？将“线段 BC ”更改为“直线 BC ”的方式是：在“选择”状态下，双击 BC ，即可打开它的属性对话框，如图 1-5 所示，将直线的类型由“线段”修改为“直线”，然后单击“确定”按钮即可完成。

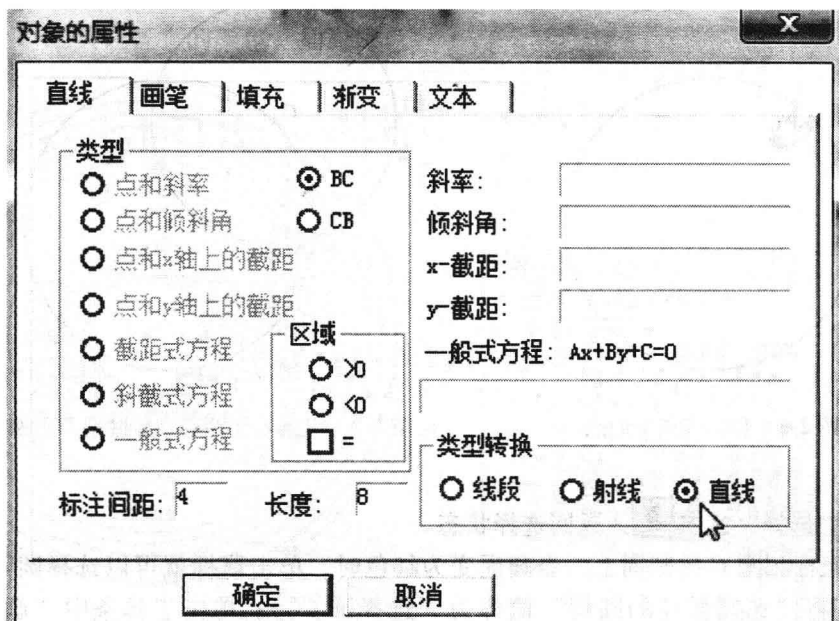


图 1-5 转换直线的现实方式

第二章 拖动试试规律现

单击“画笔”工具，进入画图状态。

单击鼠标右键，并按住拖动画出一个圆 A 。

移动光标到圆周上，如图 2-1 所示，当圆变为红色时，单击鼠标作出圆上的点 C ；重复类似操作作出圆上的另外一个点 D 。

光标指向点 C ，右键单击鼠标并按住拖动到点 D 上，当点 D 变为红色提示时，如图 2-2 所示，松开鼠标作出以点 C 为圆心、过点 D 的圆。画出了新的圆，却并没有增加新的点，这是因为圆 C 经过的是已经存在的点： D 。

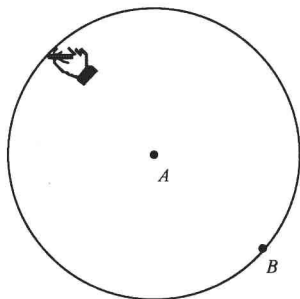


图 2-1 作出圆周上的点

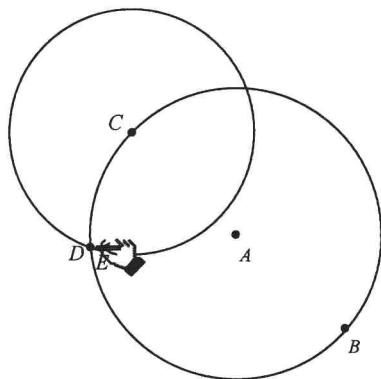




图 2-2 以点 C 为圆心、经过点 D 的圆

单击“选择”工具，返回选择状态。

移动光标到圆 C 的圆周上，当圆周变为红色时，单击鼠标就可以选择圆 C 的圆周（以后我们将“选择圆 C 的圆周”简称为“选择圆 C ”）；单击工具条中“画线颜色”工具右侧的，就可以打开调色板，如图 2-3 所示，例如将圆周 C 设置为红色，结果如图 2-4 所示。

在点 D 在圆 A 上运动的过程中，圆 C 如何变化？拖动点 D ，验证你的猜想。

除此之外，我们还可以通过跟踪圆 C ，比较和研究圆 C 的变化规律，操作是：

选择圆 C ，单击工具条中的“跟踪”命令。然后拖动点 D ，就可以观察到跟踪圆 C 得到的跟踪踪迹，如图 2-5 所示。

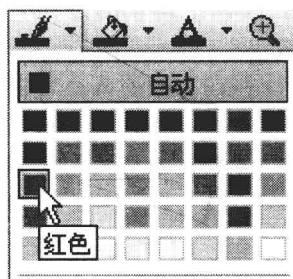


图 2-3 通过调色板设置画线颜色

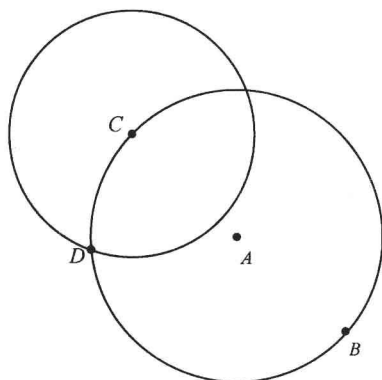


图 2-4 圆 C 的圆周被设置为红色

对象的跟踪踪迹，就像人在雪地上走路所留下的脚印一样：只能被看到而无法被捡起，并且风一吹就消失了。所以跟踪对象在作图区无法被选中，并且在作图区单击一下鼠标跟踪踪迹就不见了。

不过，我们可以在左边的对象工作区中选中跟踪对象，如图 2-6 所示，并且通过“画线颜色”工具设置它的颜色，如海绿色。

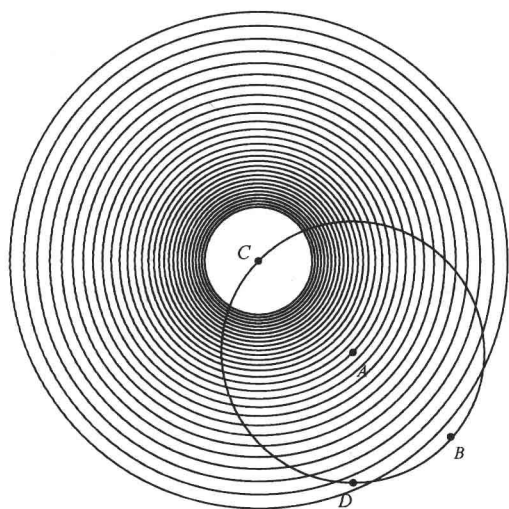


图 2-5 跟踪圆 C 得到的踪迹

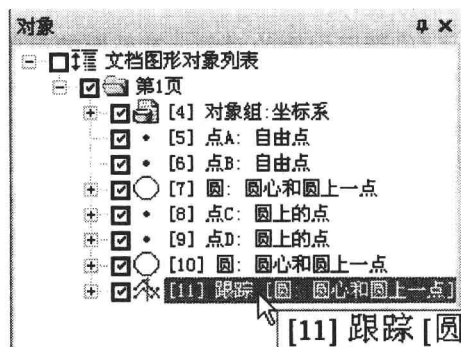


图 2-6 在对象工作区中选中跟踪对象

在作图区中我们所绘制和增加的任何对象，在左边的对象工作区中都“记了一笔账”。也就是说，左边对象工作区中的列表对应于右边作图中的对象。并且每个对象前面都有一个带勾“√”的方框“☑”，这个方框是控制它显示和隐藏的开关：例如用鼠标单击点 B 前的方框，勾“√”消失，同时作图区中点 B 被隐藏；鼠标再次单击点 B 前的方框，勾“√”重新出现，同时作图区中点 B 又重新出现。

事实上，在作图区中不容易选择的任何对象都可以通过左边的对象工作区轻松地选定！例如，不需要坐标系的时候，可以单击“对象组：坐标系”前的方框，将坐标系从作图区中隐藏。

下面继续研究这个图形中的一些问题。

点 C 在圆 A 上运动的过程中，圆 C 又如何变化呢？

拖动点 C 可以观察到，如图 2-7 所示，当点 C 在圆 A 上运动的过程中，圆 C 的圆心和半径都在变化，而其经过点 D 的性质始终保持不变。

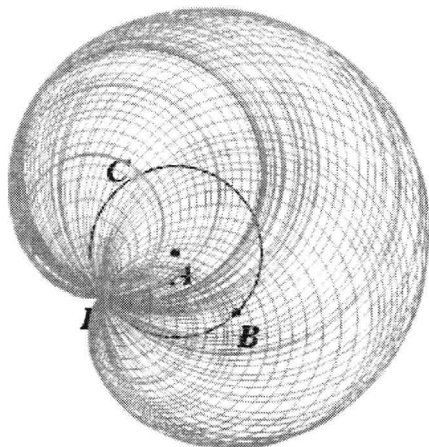


图 2-7 拖动点 C 的过程中跟踪圆 C 得到的跟踪踪迹

可以发现，所有对象都被圆 C 的跟踪踪迹遮挡住了，看起来不那么美观。就像左边对象列表中所显示的那样：刚开始绘制的对象在列表的上方，后来绘制的对象在列表的下方，依次编排；类似地，在对象列表上方的对象在作图区的“内侧”，在列表下方的对象在作图区的“外侧”。

作图区内侧的对象会被外侧的对象遮挡。但，不同对象之间的前后或内外关系可以重新布置。例如，在对象工作区中选择圆 C 的跟踪对象，单击工具条中的“后移”命令，则圆 C 的跟踪踪迹会被移动到作图区的最内侧，如图 2-8 所示，在对象列表中对应为最上方，如图 2-9 所示。

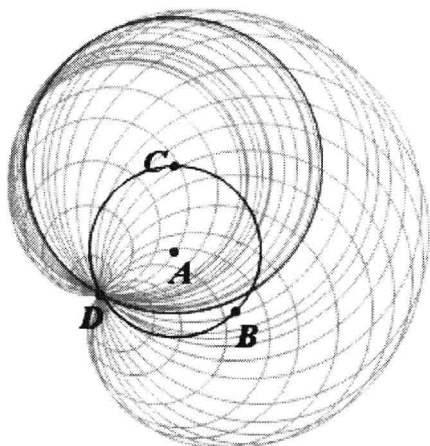


图 2-8 圆 C 的跟踪迹不再遮挡其他对象



图 2-9 圆 C 的跟踪被移到了最上方

在通过鼠标拖动圆上的点 C 的过程中，用力不均匀会导致点 C 的运动速度大小不同，因而得到的跟踪图像显得有些紊乱。若增加一个点 C 的动画按钮，就可以让点 C 自动地、均匀地在圆 A 上运动。操作如下：

选择点 C ，单击工具条中的“动画”命令，结果弹出一个动画设置对话框，在这里我们可以暂时不去理会对话框中每个选项的意义，而是直接单击“确定”按钮完成。

单击点 C 的动画按钮（左侧）就可以启动点 C 的动画，结果如图 2-10 所示，得到均匀的跟踪踪迹；再次单击动画按钮（左侧）就可以停止动画。需要注意的是：在进行其他任何操作之前，一定要先停止动画。

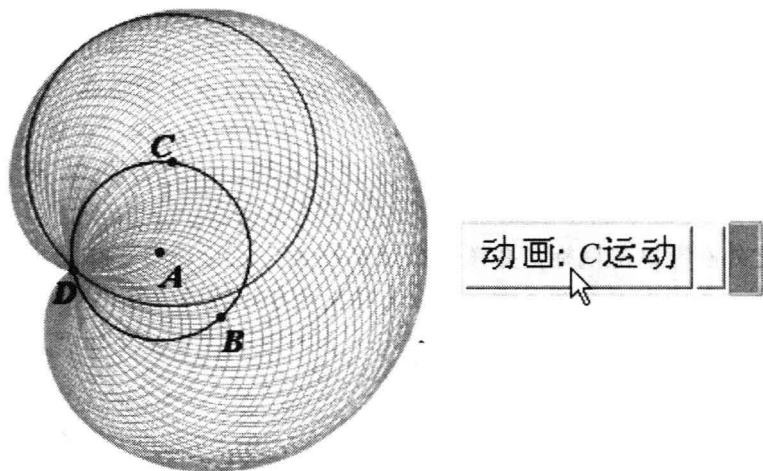


图 2-10 通过动画按钮控制点 C 均匀运动而得到的圆 C 的跟踪对象

思考与练习

(1) 点 C 的运动带动了圆 C 的改变，这种圆扫描过的区域叫做圆的包络。圆 C 的包络是一个什么形状的区域？你能说出它的哪些特点？你能给它取个名字吗？

(2) 改变点 D 在圆 A 上的位置，然后通过动画按钮重新得到圆 C 的包络。点 D 的位置对圆 C 的包络有哪些影响？点 B 和点 A 呢？