21世纪高等学校创新教材

线性代数学习与提高

李小刚　刘吉定　主编

科学出版社

21世纪高等学校创新教材

线性代数学习与提高

李小刚　刘吉定　主编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是与《线性代数及其应用》(李小刚主编，科学出版社出版)配套的辅助教材，也可与其他线性代数教材配套使用. 全书内容包括线性方程组的消元法、矩阵、行列式、矩阵的秩与向量空间、线性方程组、特征值与特征向量、线性空间与线性变换、线性代数的应用. 各章分为内容提要、题型归类与解题方法、自测题及解答三大部分. 书中所选习题具有代表性、题型多样、覆盖面广、解答详细.

本书适合线性代数课程的学习者和考研者学习使用或阅读参考，也可作为高等学校教师讲授线性代数课程的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习与提高/李小刚，刘吉定主编. 一北京:科学出版社，2011. 9
21 世纪高等学校创新教材
ISBN 978-7-03-032218-0

Ⅰ. 线… Ⅱ. ①李…②刘… Ⅲ. 线性代数一高等学校一教学参考资料
Ⅳ. O151. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 175882 号

责任编辑：王雨舸/责任校对：董艳辉
责任印制：彭 超/封面设计：苏 波

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com

武汉市新华印刷有限责任公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 8 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2011 年 8 月第一次印刷 印张：13 1/2
印数：1—6 000 字数：262 000

定价:23. 80 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前言

线性代数是高等学校理工科和经管类学生的必修课程，是全国硕士研究生入学考试数学科目的必考内容之一. 线性代数不仅是学习后续数学课程和专业课程的必备基础知识，也是自然科学和工程技术领域中的一种重要数学工具，它在培养学生的计算能力、逻辑推理能力和抽象思维能力方面起着十分重要的作用. 然而，线性代数具有内容丰富、习题类型多、技巧性强等特点，而教学时数有限，很多内容和方法不能在课堂教学内完成. 这就要求学生不仅要在课堂内系统学习基本概念和理论，还需要在课外进行大量的自学与练习以熟练掌握解题方法与技巧.

为了使正在学习线性代数的理工科和经管类本科生能较深刻地掌握线性代数的基本概念、基本理论和解题方法与技巧，同时，为了给考研复习的本科生提供参考资料，给讲授线性代数课程的高校教师提供教学参考书，我们根据长期的线性代数课程教学实践，参考了多种线性代数教材和复习资料，按《线性代数及其应用》（李小刚主编，科学出版社出版）的章节顺序，编写了本书. 该书信息量大，收集并解答了通行教材和辅导书上的习题. 每章具体内容如下.

（1）内容提要. 简要介绍每一章的基本概念、基本理论和基本方法.

（2）题型归类与解题方法. 精选了一批典型习题进行归类分析与解答，并对解题方法给予评注.

（3）自测题及解答. 每章给出了一套自测题及详细解答，供读者自测.

本书由李小刚、刘吉定主编，参编者有罗进、杨建华、杨向辉. 第一章、第三章由李小刚编写，第二章、第四章由刘吉定编写，第五章、第六章由杨建华编写，第七章、第八章由罗进编写，杨向辉对第二章至第六章的例题进行了归类并编写了评注，全书由刘吉定统稿. 本书的编写和出版，得到了相关教学管理部门的大力支持，在此一并表示衷心的感谢.

限于编者水平，书中疏漏之处在所难免，敬请读者不吝指教.

编　者

2011 年 8 月

目　录

第一章　线性方程组的消元法

第一节　内容提要

一、二元和三元线性方程组的求解

对于二元和三元线性方程组的求解，通常用消元法求解.

二、n 元线性方程组简介

1. n 元线性方程组的高斯消元法的矩阵描述

利用高斯消元法将 n 元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$ 同解地

化为三角形方程组 $\begin{cases} a'_{11}x_1+a'_{12}x_2+\cdots+a'_{1n}x_n=b'_1, \\ a'_{22}x_2+\cdots+a'_{2n}x_n=b'_2, \\ \cdots\cdots \\ a'_{nn}x_n=b'_n. \end{cases}$ 这样一个求解过程，可以用

如下矩阵的初等行变换来描述：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{nn} & b'_n \end{pmatrix}$$

2. 方程组的三种同解变形

(1) 第 i 个方程与第 j 个方程交换位置.
(2) 第 i 个方程乘上一个非零常数 k.
(3) 第 i 个方程加上第 j 个方程的 k 倍.

3. 矩阵的三种初等行变换

(1) 第 i 行与第 j 行对换，记为 $r_i \leftrightarrow r_j$.

(2) 第 i 行的每一个元都乘以 k，记为 kr_i ($k \neq 0$).

(3) 第 i 行的所有元加上相应的第 j 行元的 k 倍，记为 $r_i + kr_j$.

4. 线性方程组解的三种情形

(1) 方程组有唯一解：适定.

(2) 方程组无解：超定.

(3) 方程组有无穷多解：欠定.

第二节　典型例题

例 1　用高斯(Gauss)消元法求解方程组

$$\begin{cases} x+y+z=5 & (1) \\ x+y+w=3 & (2) \\ x+z+w=7 & (3) \\ y+z+w=9 & (4) \end{cases}$$

解　由$[(1)+(2)+(3)+(4)]\div 3-(1)$，得 $w=3$；

由$[(1)+(2)+(3)+(4)]\div 3-(2)$，得 $z=5$；

由$[(1)+(2)+(3)+(4)]\div 3-(3)$，得 $y=1$；

由$[(1)+(2)+(3)+(4)]\div 3-(4)$，得 $x=-1$.

所以方程组的解为 $\begin{cases} x=-1, \\ y=1, \\ z=5, \\ w=3. \end{cases}$

例 2　用高斯消元法求解方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-5, \\ x_1+2x_2-x_3+4x_4=-4, \\ 2x_1-3x_2-x_3-5x_4=16, \\ 3x_1+x_2+2x_3+11x_4=-16. \end{cases}$

解　方程组对应的矩阵为

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & -4 \\ 2 & -3 & -1 & -5 & 16 \\ 3 & 1 & 2 & 11 & -16 \end{pmatrix}$$

而

$$B \overset{r_2-r_1}{\underset{\substack{r_3-2r_1\\r_4-3r_1}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -3 & -7 & 26 \\ 0 & -2 & -1 & 8 & -1 \end{pmatrix} \overset{r_3+5r_2}{\underset{r_4+2r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -13 & 8 & 31 \\ 0 & 0 & -5 & 14 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_3-3r_4\\r_3\div 2}}{\underset{\substack{r_4+5r_3\\r_4\div(-71)}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -17 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{\substack{r_3+17r_4\\r_2+2r_3-3r_4}}{\underset{r_1-r_2-r_3-r_4}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

故方程组的解为$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = -2, \\ x_3 = -3, \\ x_4 = -1. \end{cases}$

第二章　矩　　阵

第一节　内 容 提 要

一、矩阵的概念

1. 矩阵的定义

称由 $m \times n$ 个数 a_{ij} $(i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的数表

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

为 $m \times n$ 矩阵，$m \times n$ 矩阵 A 简记为 $A = (a_{ij})_{m\times n}$ 或 $A = (a_{ij})$ 或 $A_{m\times n}$. a_{ij} 称为 A 的第 i 行第 j 列元素.

元素是实数的矩阵称为实矩阵，元素是复数的矩阵称为复矩阵.

2. 方阵

行数与列数都等于 n 的矩阵称为 n 阶矩阵或 n 阶方阵. n 阶矩阵 A 也记为 A_n.

3. 行矩阵和列矩阵

只有一行的矩阵称为行矩阵(或行向量). 记为

$$\boldsymbol{A} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

只有一列的矩阵称为列矩阵(或列向量). 记为

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

4. 零矩阵

元素全为 0 的矩阵称为零矩阵，记为 O.

5. 对角矩阵

$$\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

6. n 阶数量矩阵

$$\lambda E = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

7. n 阶单位矩阵

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

8. 上三角形矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

9. 下三角形矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

二、矩阵及其运算

1. 矩阵相等

两个矩阵的行数相等、列数也相等，就称它们是同型矩阵. 若 $A = (a_{ij})_{m\times n}$，

$B=(b_{ij})_{m\times n}$，且 $a_{ij}=b_{ij}$ $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，则称 A 与 B 相等，记为 $A=B$.

2. 矩阵的加法

定义 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{m\times n}$，则 $A+B\triangleq(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$.

运算规律：

(1) $A+B=B+A$

(2) $(A+B)+C=A+(B+C)$

设 $A=(a_{ij})$，记 $-A=(-a_{ij})$，称 $-A$ 为 A 的负矩阵. 显然

$$A+(-A)=O$$

规定 $A-B=A+(-B)$.

3. 数与矩阵相乘

定义 数 λ 与矩阵 $A=(a_{ij})$ 的乘积，记为 λA 或 $A\lambda$，规定为 $\lambda A=(\lambda a_{ij})$.

运算规律：

(1) $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$

(2) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$，$\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$.

4. 矩阵与矩阵相乘

定义 设 $A=(a_{ij})_{m\times s}$，$B=(b_{ij})_{s\times n}$，则规定 A 与 B 的乘积为 $C=(c_{ij})_{m\times n}$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

记为 $C=AB$.

运算规律：

(1) $(AB)C=A(BC)$

(2) $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$ (λ 为数)

(3) $(A+B)C=AC+BC$，$C(A+B)=CA+CB$

易见 $E_mA_{m\times n}=A_{m\times n}E_n=A_{m\times n}$，简写成 $EA=AE=A$.

定义 设 A 是 n 阶方阵，A 的幂规定如下：

$$A^1=A,A^2=A^1A^1,\cdots,A^{k+1}=A^kA^1.$$

运算规律：$A^{k+l}=A^kA^l$，$(A^k)^l=A^{kl}$ (k、l 为正整数). 但，一般地，$(AB)^k\neq A^kB^k$.

5. 矩阵的转置

定义 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，则 $A^{\mathrm{T}}\triangleq(b_{ij})_{n\times m}$，其中 $b_{ij}=a_{ji}$.

运算规律：

(1) $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$

(2) $(A+B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$

(3) $(\lambda A)^{\mathrm{T}} = \lambda A^{\mathrm{T}}$ (λ 为常数)

(4) $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$

对称矩阵　设 A 为 n 阶方阵，若 $A^{\mathrm{T}} = A$，即 $a_{ij} = a_{ji}$ $(i,j = 1,2,\cdots,n)$，则称 A 为对称矩阵，简称对称阵.

反称矩阵　设 A 为 n 阶方阵，若 $A^{\mathrm{T}} = -A$，即 $a_{ij} = -a_{ji}$ $(i,j = 1,2,\cdots,n)$，则称 A 为反称矩阵，简称反称阵.

6. 共轭矩阵

定义　设 $A = (a_{ij})$，记 $\overline{A} = (\overline{a}_{ij})$，称 $\overline{A}$ 为 A 的共轭矩阵.

运算规律：

(1) $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$

(2) $\overline{\lambda A} = \overline{\lambda}\,\overline{A}$

(3) $\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$

三、矩阵的逆

定义　对于 n 阶方阵 A，若存在 n 阶方阵 B，使得 $AB = BA = E$，则称 A 是可逆的，并称 B 为 A 的逆矩阵，简称逆阵.

唯一性　若 A 可逆，则 A 的逆阵唯一.

逆的运算性质：

(1) $(A^{-1})^{-1} = A$.

(2) $(\lambda A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}A^{-1}$

(3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(4) $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$

对角阵的逆　设 $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$，若 $\lambda_i \neq 0$ $(i = 1,2,\cdots,n)$，则

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & & \\ & \lambda_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}$$

当 A 可逆时，还可定义

$$A^0 = E, A^{-k} = (A^{-1})^k$$

其中 k 为正整数. 这样，当 A 可逆，λ,μ 为整数时，有

$$A^\lambda A^\mu = A^{\lambda+\mu}, \quad (A^\lambda)^\mu = A^{\lambda\mu}$$

四、分块矩阵

所谓矩阵分块，就是将矩阵 A 用若干条纵线和横线分成许多个小矩阵，每个小矩阵称为 A 的子块，以这些子块为元素的形式上的矩阵称为分块矩阵.

分块矩阵的运算(与普通矩阵的运算相类似).

(1) 设 A 与 B 有相同的行数和列数，且采用相同的分块法，即

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{sr} \end{bmatrix}$$

其中，$\forall i = 1,2,\cdots,s; j = 1,2,\cdots,r$. A_{ij} 与 B_{ij} 的行数与列数分别相同，则

$$A+B = \begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & \cdots & A_{1r}+B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1}+B_{s1} & \cdots & A_{sr}+B_{sr} \end{bmatrix}$$

(2) 设 λ 为任一数，$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{bmatrix}$，则 $\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{s1} & \cdots & \lambda A_{sr} \end{bmatrix}$.

(3) 设 A 是 $m \times l$ 矩阵，B 是 $l \times n$ 矩阵，分块成

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & \cdots & B_{tr} \end{bmatrix}$$

$\forall i = 1,2,\cdots,s; j = 1,2,\cdots,r$. $A_{i1}, A_{i2}, \cdots, A_{it}$ 的列数分别等于 $B_{1j}, B_{2j}, \cdots, B_{tj}$ 的行数，则

$$AB = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & \cdots & C_{sr} \end{bmatrix}$$

其中

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{t} A_{ik}B_{kj} \quad (i = 1,2,\cdots,s;\ j = 1,2,\cdots,r)$$

(4) 设 $A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{bmatrix}$，则 $A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} A_{11}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{s1}^{\mathrm{T}} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1r}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{sr}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$.

(5) 设 $A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$，其中 A_i $(i=1,2,\cdots,s)$ 都是方阵，则称 A 为分块对角阵. 若 A_i $(i=1,2,\cdots,s)$ 都是可逆阵，则 A 也可逆，且有

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}.$$

两种常见的分块法：

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$.

(1) 记 $\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$ $(i=1,2,\cdots,m)$，则 $A=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$；

(2) 记 $\boldsymbol{a}_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ $(j=1,2,\cdots,n)$，则 $A=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$.

设 $A=(a_{ij})_{m\times s}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$，$B=(b_{ij})_{s\times n}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n)$，则

$$AB=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n)=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_n \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_n \end{pmatrix}=(c_{ij})_{m\times n}$$

其中

$$c_{ij}=\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_j=(a_{i1},\ a_{i2},\ \cdots,\ a_{is})\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{sj} \end{pmatrix}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$$

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}=(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_n)$，则

$$\Lambda_m A_{m\times n}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm T}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm T}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm T}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm T}\\ \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm T}\\ \vdots\\ \lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm T}\end{pmatrix}$$

$$A_{m\times n}\Lambda_n=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}=(\lambda_1\boldsymbol{a}_1,\ \lambda_2\boldsymbol{a}_2,\cdots,\lambda_n\boldsymbol{a}_n)$$

五、矩阵的初等变换

1. 矩阵的初等变换的定义

下面三种变换称为矩阵的初等行(列)变换:

(1) $r_i\leftrightarrow r_j$ ($c_i\leftrightarrow c_j$)

(2) $r_i\times k$ 或($c_i\times k$) ($k\neq 0$)

(3) r_i+kr_j (c_i+kc_j)

矩阵的初等行变换与初等列变换统称矩阵的初等变换.

2. 初等变换的可逆性

三种初等变换都是可逆的,且有:

(1) $r_i\leftrightarrow r_j$ 的逆变换:$r_i\leftrightarrow r_j$.

(2) $r_i\times k$ 的逆变换:$r_i\times\left(\dfrac{1}{k}\right)$.

(3) r_i+kr_j 的逆变换:$r_i+(-k)r_j$.

3. 矩阵等价及其性质

若A经有限次初等(行或列)变换变成B,就称A与B(行或列)等价,记为$A\sim B$($A\overset{r}{\sim}B$ 或 $A\overset{c}{\sim}B$).

等价的性质:

(1) $A\sim A$.

(2) 若 $A\sim B$,则 $B\sim A$.

(3) 若 $A\sim B$,$B\sim C$,则 $A\sim C$.

形如 $B_1=\begin{pmatrix}2 & 2 & -7 & -4\\ 0 & 3 & -5 & -7\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 的矩阵称为行阶梯形矩阵,形如 $B_2=$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$的矩阵称为行最简形矩阵.

对行最简形矩阵再施行初等列变换，可变成一种形状更简单的形如 $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$的矩阵，称为标准形矩阵.

六、初等矩阵

1. 初等矩阵的定义

由 E 经一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵.

三种初等变换对应三种初等矩阵：

(1) $r_i \leftrightarrow r_j (c_i \leftrightarrow c_j)$：$E(i,j)$.

(2) $r_i \times k (c_i \times k)$：$E(i(k))$.

(3) $r_i + kr_j (c_j + kc_i)$：$E(ij(k))$.

2. 初等变换与初等矩阵的关系

设 A 是一个 $m \times n$ 矩阵，对 A 施行一次初等行(列)变换，相当于在 A 的左(右)边乘以相应的 $m(n)$ 阶初等矩阵.

初等矩阵是可逆的，且

$$E(i,j)^{-1} = E(i,j)$$

$$E(i(k))^{-1} = E(i(\frac{1}{k}))$$

$$E(ij(k))^{-1} = E(ij(-k))$$

3. 矩阵可逆的充分必要条件

(1) 方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow$ 存在有限个初等矩阵 $P_1, P_2, \cdots, P_l$，使 $A = P_1 P_2 \cdots P_l$.

(2) 方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow A \overset{r}{\sim} E$.

(3) n 阶方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow$ 存在 n 阶方阵 B，使 $AB = E$. 此时，$A^{-1} = B$.

证　只需证明充分性. 反设 A 不可逆，则 A 的行最简形矩阵 F 为 $F = \begin{pmatrix} E_r & C_{r(n-r)} \\ O & O \end{pmatrix}_{n \times n}$，即存在初等矩阵 $P_1, P_2, \cdots, P_l$，使得 $P_1 P_2 \cdots P_l A = F$，于是

$$P_1 P_2 \cdots P_l = P_1 P_2 \cdots P_l AB = FB = \begin{pmatrix} E_r & D_{r(n-r)} \\ O & O \end{pmatrix}_{n \times n}$$