光学仪器理論

第三分册

(苏) 图多罗夫斯基 著

光学儀器理論

第三分册

著作者：А.И.ТУДОРОВСКИЙ

翻譯者：王之江　黄幼心　王乃弘

江苏工业学院图书馆
藏　书　章

中國科學院儀器館　印

光学儀器理論

第三册（目錄）

第十一章　三級像差理論

第十二章　光学系統的色像差

第十三章　程　函

第十四章 成像的繞射理論

第十一章　三級像差理論

§127.　塞特輔助傍軸光线及其幾何不变量

在像差理論中計算其展開式的係数時，通常不是将係数直接表示为光学系统結構要素（表面半径，頂点间距离，折射率）的函数，而表示为其他量（結構要素的函数）的函数。最常用的是：由傍軸光线　成像時决定軸上像点位置的光軸线段長，在一傍軸光线通过系统時和光軸的交角，最后或用同一傍軸光线之亚培"零不变量"。

若将軸上某一点出発的傍軸光线光路計完，就可得到线段之全部 s_1，s_1'，s_2，s_2'-----s_i，s_i'------ s_k，s_k'。s_i，s_i'之整体不足以完全决定光学系统，可以再加上所有媒质折射率的全部，即 n_1 n_2----- n_k。有了这二部分就可由亚培零不变量而决定系统所有半径：

$$Q_{si}=n_i\left(\frac{1}{r_i}-\frac{1}{s_i}\right)=n_i'\left(\frac{1}{r_i}-\frac{1}{s_i'}\right) \tag{127.1}$$

及决定所有折射面頂点间距离：

$$d_i=s_i'-s_i+1 \tag{127.2}$$

若代替折射率之整体为由軸上某另一点発出的傍軸线所截线段，称之为 x，即 x_1，x_1'，x_2，x_2'-----x_k，x_k'，那麽这二组数量的總和再加上系统某一媒质的折射率（例如 n_1）就能完全决定这系统。

实际上，对这第二光线也可寫出亚培不变量：

$$Q_{xi}=n_i\left(\frac{1}{r_i}-\frac{1}{x_i}\right)=n_i'\left(\frac{1}{r_i}-\frac{1}{x_i'}\right) \tag{127.3}$$

显然，由二不变量的方程式，可消去折射率而解出半径 r_i，而之后得出折射率之比 $n_i':n_i$。

通常所选的一对傍軸线之一，是由物空间的物平面和光軸的交点出発，交入射光瞳於坐标为 m_1 及 M_1 的点，此点在高斯

光学的区域内；另一傍軸光线由物平面的軸外点発出，此点也在高斯光学的区域内，和軸的距离为 l_1，且通过入射光瞳中心。这对光线在以后称何赛特第一和第二輔助光线。

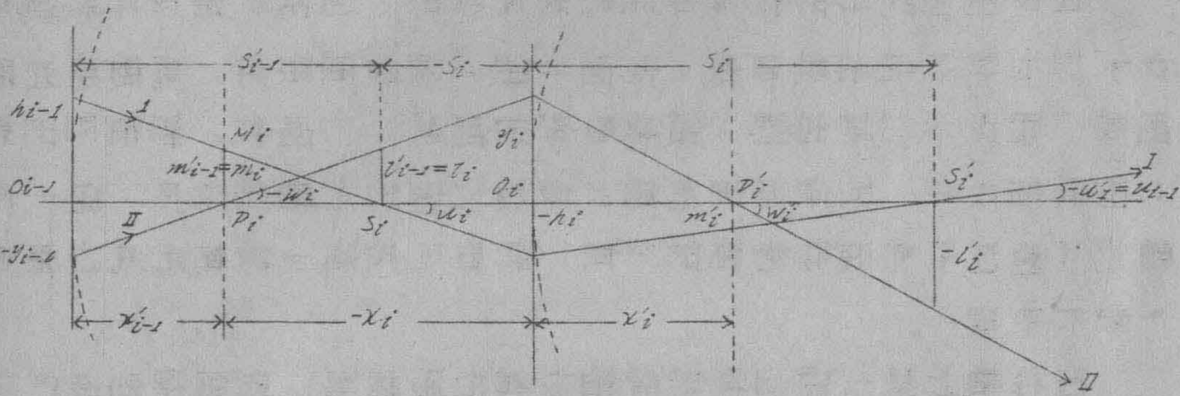

图 229

在图229 为二輔助光线经 O_{i-1} 面折射后再经 O_i 面的图形；一对球面 O_{i-1} 及 O_i 以平面表示，入射光瞳的高斯像为 P_i 及 P'_i，軸上点的高斯像为 S_i 及 S'_i。光线 I 经过光瞳面 P_i 上的 M_i 点，此点具坐标 x'_{i-1} 及 m'_{i-1}（对 O_{i-1} 而言）或坐标 x_i 及 m_i $(=m'_{i-1})$（对 O_i）及经过具有坐标 S'_{i-1} 及零或 S_i 及零的 S_i 点；光线 I 经 O_i 面折射后其共軛点坐标为 x'_i 及 m'_i；S'_i 及 0。光线 II 经过入射光瞳的像 P_i 及 P'_i 的中心及经过 S_i 及 S'_i 上的共軛线段 l_i 及 l'_i 之端点。第一光线的折射点纵坐标为 h_i，第二光线为 y_i，光线和軸交角为：u_i $(=u'_{i-1})$ 及 u'_i $(=u_{i+1})$；w_i $(=w'_{i-1})$ 及 w'_i $(=w_{i+1})$。

显然可得下列関係：

$$h_i=S_i u_i=S'_i u'_i \tag{127.4}$$

$$y_i=x_i w_i=x'_i w'_i \tag{127.5}$$

$$l_i=(x_i-S_i)w_i \quad 及 \quad l'_i=(x'_i-S'_i)w'_i \tag{127.6}$$

$$m_i=(S_i-x_i)u_i \quad 及 \quad m'_i=(S'_i-x'_i)u'_i \tag{127.7}$$

若所引的第一輔助光线不在經面而在緯面内；则光线和入射

光瞳的像交点坐标由§124 所定为 x_i，M_i 及 x_i'，M_i'；其与轴交角称为 v_i 及 v_i'。对於这條光线有下列関係：

$$n_i = s_i v_i = s_i' v_i' ; \qquad (127.8)$$

$$M_i = (s_i - x_i) v_i \text{ 及 } M_i' = (s_i' - x_i') v_i' \qquad (127.9)$$

$L—H$ 公式（63.1）对这三條光线得出下列对整個系统的三個不变量（不僅对一次折射不变）：

$$\left.\begin{aligned} l_k' n_k' u_k' &= l_k n_k u_k = \cdots = l_i' n_i' u_i' = \cdots = l_1 n_1 u_1 \\ m_k' n_k' w_k' &= m_k n_k w_k = \cdots = m_i' n_i' w_i' = \cdots = m_1 n_1 w_1 \\ M_k' n_k' v_k' &= M_k n_k v_k = \cdots = M_i' n_i' v_i' = \cdots = M_1 n_1 v_1 \end{aligned}\right\} (127.10)$$

由第一不变量方程式可导出極常用於像差理論的不变量，此不变量是由賽特导出的。在此将 l 代为（127.6）中的值，再由（127.4），（127.5）消去角 w 和 u。得：

$$\frac{h_k' y_k' n_k' (x_k' - s_k')}{s_k' x_k'} = \frac{h_k y_k n_k (x_k - s_k)}{s_k x_k} = \cdots = \frac{h_1 y_1 n_1' (x_1' - s_1')}{s_1' x_1'}$$

$$= \frac{h_1 y_1 n_1 (x_1 - s_1)}{s_1 x_1} \qquad (127.11)$$

很容易由（127.3），（127.1）得出。$\dfrac{h_i (x_i - s_i)}{s_i x_i}$ 等於 $Q_{xi} - Q_{si}$ 因而得到賽特不变量：

$$h_k y_k (Q_{xk} - Q_{sk}) = \cdots = h_i y_i (Q_{xi} - Q_{si}) = \cdots\cdots$$

$$= h_1 y_1 (Q_{x1} - Q_{s1}) \qquad (127.12)$$

由这公式很容易导出公式（123.7），这衹要把（127.11）中以 $\dfrac{h_k}{s_k} = u_k$，$\dfrac{y_k}{x_k} = w_k$，再将角度之比寫化為放大率 γ 及 γ_p 即得：

$$n_k' \gamma \gamma_p P_k' = n_1 P_1 \qquad (127.13)$$

再由公式（82.4）代替 γ 及 γ_p 即得公式（123.7）。

由公式（127.10）及（127.11）相除並用（127.4），（127.5）及（127.8）可引出三個对於像差理論極重要的不变量如下：

$$\frac{l_i x_i}{y_i (x_i - s_i)} ; \quad \frac{m_i s_i}{h_i (x_i - s_i)} ; \quad \frac{M_i s_i}{h_i (x_i - s_i)} 。$$

这几個分式不变量都是对整個系統而言的；在以后的演称中这些公式需要下列的形状，即：

$$\frac{l_i x_i}{s_i-x_i}=\frac{l_i x_i}{s_i-x_i}=\frac{l_1 x_1}{s_1-x_1}\ \frac{y_i}{y_1};\tag{127.14}$$

$$\frac{m_i s_i}{s_i-x_i}=\frac{m_i s_i}{s_i-x_i}=\frac{m_1 s_1}{s_1-x_1}\ \frac{h_i}{h_1};\tag{127.15}$$

$$\frac{M_i s_i}{s_i-x_i}=\frac{M_i s_i}{s_i-x_i}=\frac{M_1 s_1}{s_1-x_1}\ \frac{h_i}{h_1};\tag{127.16}$$

§128、一些輔助公式反变換

在以后将把三級像差的係数表示为 Q_s 及 Q_x 的函数；此外並将入射光瞳和物体与光学系统间距离発生变动時像数间的関係导出。因此将不变量间和其他决定輔助傍軸綫光路的量间関係，先準備好这些関係是在以后演称中所必須的。

在演称中一直遵守下列規定：在折射前后的相似数量用同一符号代表，以符号右上角的撇号标誌折射后的数量；由此在公式中時常会遇到二函数具有同样的字母而祇有撇号差别的差，即：

$$f(S',x',m',M',\cdots a',b')-f(S,x,m,M,\cdots a,b)。$$

为简化起見，以后这差数以符号 Δ 代表：

$$\Delta f(S,x,m,M,\cdots a,b)=f(S',x',m',M',\cdots a',b')-f(S,x,m,M,\cdots a,b)。$$

二輔助光綫之间的差别，僅在於射入第一面時，交軸於不同距离的点 s 及 x；所以並沒有什么本質上的差别，隨便認为那一個是物平面另一個是入射光瞳都是一樣。因此在每一公式中将 s 換为 x，x 換为 s，高度 h 換为 y 而 y 換为 h，不变量 Q_s 換化 Q_x 等々就会得到新公式。

由公式（127.1）出発，可得到

$$\frac{1}{s'}=\frac{1}{r}-\frac{Q_s}{n'} \quad 及 \quad \frac{1}{s}=\frac{1}{r}-\frac{Q_s}{n}\tag{128.1}$$

将第一式除以 n'，第二式以 n 並由第一式减去第二式：

$$\Delta\frac{1}{ns}=\frac{1}{\gamma}\;\Delta\frac{1}{n}-Qs\,\Delta\frac{1}{n^2} \tag{128.2}$$

不用說，对第二主光线有

$$\Delta\frac{1}{nx}=\frac{1}{\gamma}\;\Delta\frac{1}{n}-Qx\,\Delta\frac{1}{n^2} \tag{128.3}$$

由这二式得出下列不变量的関係式：

$$\frac{\Delta\frac{1}{ns}-\frac{1}{\gamma}\Delta\frac{1}{n}}{Qs}=\frac{\Delta\frac{1}{nx}-\frac{1}{\gamma}\Delta\frac{1}{n}}{Qx}=\frac{\Delta\frac{1}{n\bar{s}}-\frac{1}{\gamma}\Delta\frac{1}{n}}{Q\bar{s}}$$

$$=-\Delta\frac{1}{n^2} \tag{128.4}$$

$\bar{s}$ 和 $\bar{Q}s$ 是由距离 $\bar{s}$ 决定的第三傍軸线。

方程式（128.4）的第一式可寫作：

$$Qx\,\Delta\frac{1}{ns}-Qs\,\Delta\frac{1}{nx}=(Qx-Qs)\frac{1}{\gamma}\Delta\frac{1}{n} \tag{128.5}$$

将(128.1) 自乘二次方並由第一式減去第二式：

$$\Delta\frac{1}{s^2}=-\frac{2Qs}{\gamma}\;\Delta\frac{1}{n}+Q_s^2\;\Delta\frac{1}{n^2}$$

由这方程式反（128.2）消去 $\Delta\frac{1}{n^2}$ 得：

$$\Delta\frac{1}{s^2}=-Q_S\,\Delta\frac{1}{ns}-\frac{Qs}{\gamma}\Delta\frac{1}{n} \tag{128.6}$$

将 s 換作 x：

$$\Delta\frac{1}{x^2}=-Qx\;\Delta\frac{1}{nx}-\frac{Qx}{\gamma}\Delta\frac{1}{n} \tag{128.7}$$

由方程式（127,3）有

$$\frac{1}{x'}=\frac{1}{\gamma}-\frac{Qx}{n'}\quad 反\quad \frac{1}{x}=\frac{1}{\gamma}-\frac{Qx}{n} \tag{128.8}$$

这式子和（128.1）相应的式子相減得：

$$\frac{1}{x'}-\frac{1}{s'}=\frac{Qs-Qx}{n'}$$

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{s}=\frac{Qs-Qx}{n}$$

将第一式乘以 $\frac{1}{s'}$，第二式以 $\frac{1}{s}$，由第一式減去第二式：

$$\Delta\frac{1}{xs}=\Delta\frac{1}{s^2}+(Qs-Qx)\Delta\frac{1}{ns}$$

将其中 $\Delta\frac{1}{s^2}$ 代为（128.6）所給值即得：

$$\Delta\frac{1}{xs}=-Qx\,\Delta\frac{1}{ns}-\frac{Qs}{\gamma}\Delta\frac{1}{n} \tag{128.9}$$

以x和s互换：

$$\Delta\frac{1}{xs}=-Q_s\Delta\frac{1}{nx}-\frac{Q_x}{\gamma}\Delta\frac{1}{n} \qquad (128.10)$$

由这二方程式消去 $\Delta\frac{1}{n}$ 得：

$$Q_s^2\Delta\frac{1}{nx}-Q_x^2\Delta\frac{1}{ns}=(Q_x-Q_s)\Delta\frac{1}{xs} \qquad (128.11)$$

将(128.10)所定$\Delta\frac{1}{xs}$ 代入(128.11)，并将其中的$\Delta\frac{1}{nx}$ 按(128.7)代换*；得：

$$Q_s^2\Delta\frac{1}{nx}-Q_x^2\Delta\frac{1}{ns}=(Q_x-Q_s)\left[\frac{Q_s}{Q_x}\Delta\frac{1}{x^2}-(Q_x-Q_s)\frac{1}{\gamma}\Delta\frac{1}{n}\right] \qquad (128.12)$$

将(128.9)、(128.10)中右方之第二项用(128.6)，(128.7)消去，即得

$$\Delta\frac{1}{xs}=(Q_s-Q_x)\Delta\frac{1}{ns}+\Delta\frac{1}{s^2} \qquad (128.13)$$

$$\Delta\frac{1}{xs}=(Q_x-Q_s)\Delta\frac{1}{nx}+\Delta\frac{1}{x^2} \qquad (128.14)$$

将(128.11)中$\Delta\frac{1}{xs}$ 代以(128.13)所定的值得

$$Q_x^2\Delta\frac{1}{ns}=Q_x(2Q_s-Q_x)\Delta\frac{1}{nx}-(Q_x-Q_s)\Delta\frac{1}{x^2} \qquad (128.15)$$

同样代换x和s：

$$Q_s^2\Delta\frac{1}{nx}=Q_s(2Q_x-Q_s)\Delta\frac{1}{ns}-(Q_s-Q_x)\Delta\frac{1}{s^2} \qquad (128.16)$$

在(128.16)等式二方各加上 $Q_s^2\Delta\frac{1}{ns}$；经运算得：

$$Q_s^2\left(\Delta\frac{1}{nx}+\Delta\frac{1}{ns}\right)=2Q_xQ_s\Delta\frac{1}{ns}+(Q_x-Q_s)\Delta\frac{1}{s^2} \qquad (128.17)$$

把(128.7)，(128.6)中$\Delta\frac{1}{x^2}$及$\Delta\frac{1}{s^2}$ 的值代入(128.15)，(128.16)：

$$Q_x^2\Delta\frac{1}{ns}=Q_xQ_s\Delta\frac{1}{nx}+\frac{Q_x(Q_x-Q_s)}{\gamma}\Delta\frac{1}{n} \qquad (128.18)$$

$$Q_s^2\Delta\frac{1}{nx}=Q_xQ_s\Delta\frac{1}{nx}+\frac{Q_s(Q_s-Q_x)}{\gamma}\Delta\frac{1}{n} \qquad (128.19)$$

将这二式相加得：

$$Q_xQ_s\left(\Delta\frac{1}{nx}+\Delta\frac{1}{ns}\right)=Q_x^2\Delta\frac{1}{ns}+Q_s^2\Delta\frac{1}{nx}-(Q_x-Q_s)^2\frac{1}{\gamma}\Delta\frac{1}{n} \qquad (128.20)$$

下面将推演辅助近轴光线折射点高度与其他有关数量间的关

---

*原文为：将方程式(128.7)所决定的差数$\Delta\frac{1}{nx}$ 之值代入公式(128.11)。

系。

第二辅助光线的折射点高度纵坐标 y_i，可表示为第一辅助光线之同一坐标 h_i 及折射面顶点间距离 d_i 的函数。为此，观察图229，得下列関係：

$$\frac{h_i}{h_{i-1}}=\frac{s_i}{s_{i-1}} \quad 及 \quad \frac{y_i}{y_{i-1}}=\frac{x_i}{x_{i-1}} \tag{128.21}$$

由公式的性質有：

$$\frac{h_i-h_{i-1}}{h_{i-1}}=\frac{s_i-s'_{i-1}}{s'_{i-1}} 及 \frac{y_i-y_{i-1}}{y_{i-1}}=\frac{x_i-x_{i-1}}{x'_{i-1}}$$

由於 $d_{i-1}=x'_{i-1}=s_{i-1}-s_i$ 故有：

$$\frac{h_i-h_{i-1}}{h_{i-1}}=\frac{d_{i-1}}{s'_{i-1}} 及 \frac{y_i-y_{i-1}}{y_{i-1}}=\frac{d_{i-1}}{x'_{i-1}}。$$

由第一式減去第二式：

$$\frac{y_i}{y_{i-1}}-\frac{h_i}{h_{i-1}}=-d_{i-1}\left(\frac{1}{x'_{i-1}}-\frac{1}{s'_{i-1}}\right)=\frac{d_{i-1}}{n'_{i-1}}(Q_{x,i-1}-Q_{s,i-1})$$

在方程式二方各乘以 y_{i-1} 除以 h_i：

$$\frac{y_i}{h_i}-\frac{y_{i-1}}{h_{i-1}}=d_{i-1}\frac{y_{i-1}}{h_{i-1}h_i}(Q_{x,i-1}-Q_{s,i-1})$$

利用赛特不变量 (127.12) 上方程式变为

$$\frac{y_i}{h_i}-\frac{y_{i-1}}{h_{i-1}}=\frac{d_{i-1}}{n_{i-1}h_{i-1}h_i}h_1y_1(Q_{x1}-Q_{s1}) \tag{128-22}$$

将这方程式用於最初 i 個折射面，並将 i 個方程式相加結果得到：

$$\frac{y_i}{h_i}-\frac{y_1}{h_1}=h_1y_1(Q_{x1}-Q_{s1})\sum_{j=2}^{j=i}\frac{d_{j-1}}{n_jh_jh_{j-1}}。$$

将方程式二方都乘以 $\frac{h_i}{y_1}$ 就得到所求的公式

$$\frac{y_i}{y_1}=\frac{h_i}{h_1}+h_1h_i(Q_{x1}-Q_{s1})\sum_{j=2}^{j=i}\frac{d_{j-1}}{n_jh_jh_{j-1}} \tag{128.23}$$

若将系統的有效光栏换为另一個，因而光瞳的位置発生变化通过新入射光瞳中心的辅助傍軸光线之量仍用前述符号代表，但在上面加上一横：$\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{Q}_{xx}$ 等。对於这些数量把公式 (128·23) 变换为：

$$\frac{\bar{y}_i}{\bar{y}_1}=\frac{h_i}{h_1}+h_1h_i(\bar{Q}_{x1}-Q_{s1})\sum_{j=2}^{j=i}\frac{d_{j-1}}{n_jh_jh_{j-1}} \tag{128·24}$$

从二方程式中将和 $\sum_{j=2}^{j=i}$ 消去：

$$\frac{\frac{\overline{y_i}}{\overline{y_1}}-\frac{h_i}{h_1}}{\frac{y_i}{y_1}-\frac{h_i}{h_1}}=\frac{\overline{Q}_{x1}-Q_{s1}}{Q_{x1}-Q_{s1}}=\frac{x_1(\overline{x}_1-S_1)}{\overline{x}_1(x_1-S_1)}\text{。}$$

将方程式对 $\frac{\overline{y_i}}{\overline{y_1}}$ 解出；並为简化起見引用下列符号：

$$A_x=\frac{x_1(\overline{x}_1-S_1)}{\overline{x}_1(x_1-S_1)}\text{；}\quad B_x=A_x-1=\frac{S_1(\overline{x}_1-x_1)}{\overline{x}_1(x_1-S_1)} \qquad (128.25)$$

則得：

$$\frac{\overline{y_i}}{\overline{y_1}}=A_x\frac{y_i}{y_1}-B\frac{h_i}{h_1} \qquad (128.26)$$

与上面移动光栏相似地移动物平面位置而光栏不动，此時与新的第一輔助近軸綫相関的量用以前的字母上加一横如 $\overline{S}_1$，$\overline{h}_1$，$\overline{Q}_{s1}$ 等代表。为找出 $\frac{\overline{h_i}}{\overline{h_1}}$ 的值衹須简单地把 x 和 s，h 与 y 对换不須化新的推导。即得：

$$A_s=\frac{S_1(x_1-\overline{S}_1)}{\overline{S}_1(x_1-S_1)}\text{；}\quad B_s=A_s-1=\frac{x_1(s_1-\overline{s}_1)}{\overline{S}_1(x_1-s_1)} \qquad (128.27)$$

$$\frac{\overline{h_i}}{\overline{h_1}}=A_s\frac{h_i}{h_1}-B_s\frac{y_i}{y_1} \qquad (128.28)$$

为求在二不同入射光瞳位置间，不变量 $\overline{Q}_{xi}$ 和 Q_{xi} 的関係，应用公式（127.12）二次：

$$h_i\overline{y}_i(\overline{Q}_{xi}-Q_{si})=\frac{h_1\overline{y}_1(\overline{x}_1-S_1)}{s_1\overline{x}_1}\text{；}$$

$$h_i y_i(Q_{xi}-Q_{si})=\frac{h_1 y_1(x_1-S_1)}{s_1 x_1}\text{。}$$

以二式相除：

$$\frac{\overline{y}_i}{y_i}\,\frac{(\overline{Q}_{xi}-Q_{si})}{(Q_{xi}-Q_{si})}=\frac{\overline{y}_1}{y_1}\,\frac{x_1(\overline{x}_1-s_1)}{\overline{x}_1(x_1-s_1)}=A\frac{\overline{y}_1}{y_1}\text{。}$$

由此得：

$$\frac{\overline{y_i}}{\overline{y_1}}\overline{Q}_{xi}=\frac{\overline{y_i}}{\overline{y_1}}Q_{si}+A_x\frac{y_i}{y_1}(Q_{xi}-Q_{si})$$

等式右方第一项中 $\frac{\overline{y_i}}{\overline{y_1}}$ 以（128.26）代入得：

$$\frac{\overline{y_i}}{\overline{y_1}}\overline{Q}_{xi}=A_x\frac{y_i}{y_1}Q_{xi}-B_x\frac{h_i}{h_1}Q_{si} \qquad (128.29)$$

对於变更物平面而光瞳不变时有相似的公式：

$$\frac{\overline{h_i}}{h_1}\overline{Q_{si}}=A_s\frac{h_i}{h_1}Q_{si}-B_s\frac{y_i}{y_1}Q_{xi} \qquad (128.30)$$

另外一方面，从(128.4)可得：

$$\Delta\frac{1}{n_i\overline{s_i}}=\frac{\overline{Q_{si}}}{Q_{xi}}\left(\Delta\frac{1}{n_ix_i}-\frac{1}{\gamma_i}\Delta\frac{1}{n_i}\right)+\frac{1}{\gamma_i}\Delta\frac{1}{n_i}$$

$$\Delta\frac{1}{n_is_i}=\frac{Q_{si}}{Q_{xi}}\left(\Delta\frac{1}{n_ix_i}-\frac{1}{\gamma_i}\Delta\frac{1}{n_i}\right)+\frac{1}{\gamma_i}\Delta\frac{1}{n_i}$$

把第一式乘以$\frac{\overline{h_i}}{h_1}$，第二式以$\frac{h_i}{h_1}A_s$并从第一式减去第二式；

$$\frac{\overline{h_i}}{h_1}\Delta\frac{1}{n_i\overline{s_i}}-A_s\frac{h_i}{h_1}\Delta\frac{1}{n_is_i}=\left(\frac{\overline{h_i}}{h_1}\overline{Q_{si}}-A_s\frac{h_i}{h_1}Q_{si}\right)\cdot$$

$$\left(\Delta\frac{1}{n_ix_i}-\frac{1}{\gamma_i}\Delta\frac{1}{n_i}\right)\frac{1}{Q_{xi}}+\frac{1}{\gamma}\Delta\frac{1}{n_i}\left(\frac{\overline{h_i}}{h_1}-A_s\frac{h_i}{h_1}\right)。$$

再用方程式(128.30)，(128.28)以简化得：

$$\frac{\overline{h_i}}{h_1}\Delta\frac{1}{n_i\overline{s_i}}=A_s\frac{h_i}{h_1}\Delta\frac{1}{n_is_i}-B_s\frac{y_i}{y_1}\Delta\frac{1}{n_ix_i} \qquad (128.31)$$

§129、对经外光线的刻柏不变量

图230是图125的变形；MA及MA'为入射及折射光线；QMC为入射面，MC为折射表面的半径，等於γ；K点是M点在径面XOY上的投影；KA和KA'为MA及$M'A'$在这面上的

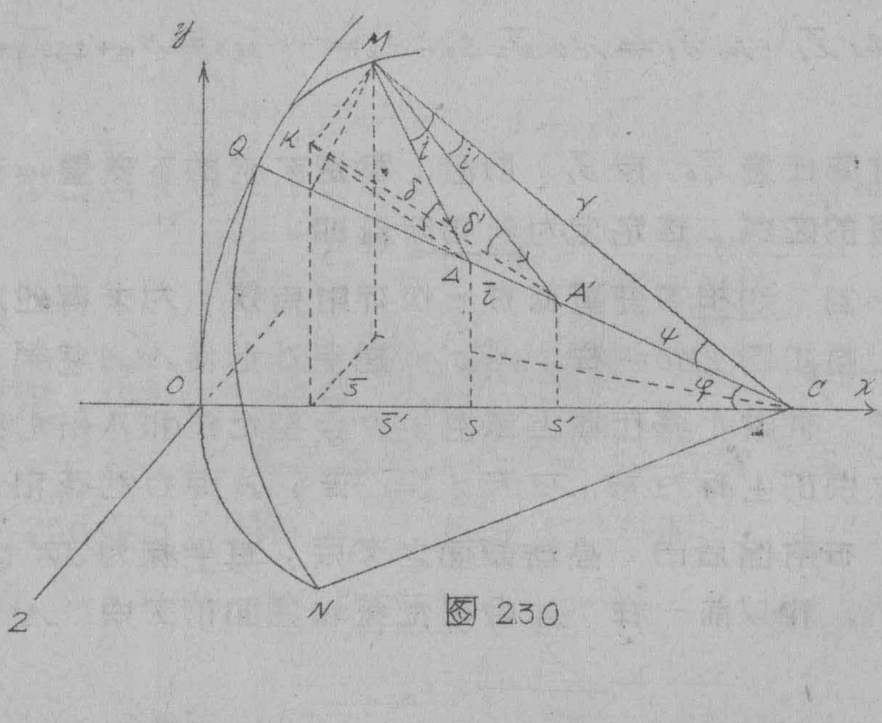

图230

投影；光线及其投影间的交角为δ及δ'。点A的坐标$OS(=\overline{s})$及$AS(=\overline{l})$；点A'的坐标为$OS'(=\overline{s}')$及$A'S'(=\overline{l}')$；线段QA及QA'之長等於p及p'。

对三角形MAC及$MA'C$得：

$$\frac{r-p}{\sin i}=\frac{\overline{AM}}{\sin\varphi} \quad 及 \quad \frac{r-p'}{\sin i'}=\frac{\overline{A'M}}{\sin\varphi}；$$

其中i及i'为入射及折射角，φ为角AeM。

将二式相除，並由折射定律得：

$$\frac{r-p}{r-p'}=\frac{n'}{n}\ \frac{\overline{AM}}{\overline{A'M}} \qquad (129.1)$$

由直角三角形AKM，及$A'KM$可得：

$$KM=\overline{AM}\cdot\sin\delta=\overline{A'M}\sin\delta'$$

而由三角形ASC及$A'S'C$：

$$\overline{l}=(r-p)\sin\varphi，\overline{l}'=(r-p')\sin\varphi$$

由这后三個方程式消去(129.1)中的$\frac{r-p}{r-p'}$及$\frac{\overline{AM}}{\overline{A'M}}$得：

$$n'\overline{l}'\sin\delta'=n\overline{l}\sin\delta \qquad (129.2)$$

因为对於任意的第i面$n_i'=n_{i+1}$，$\overline{l}_i'=\overline{l}_{i+1}$及$\delta_i'=\delta_{i+1}$，所以上面的等式，对於这条光线所有折射过程都成立，即：

$$n_1\overline{l}_1\sin\delta_1=n_2\overline{l}_2\sin\delta_2=\text{------}=n_{k+1}\overline{l}_{k+1}\sin\delta_{k+1} \qquad (129.3)$$

这乘积对於任意$\overline{l}_i$及δ_i的值，都是系统的不变量，並不限於傍軸光线的区域。这定理为刻柏所証明。

另一個刻柏不变量祇对一次折射有效；为求得他須看圖231，在这上面如圖230一样，MQC是经外光线MA经第i面折射的入射面，折射光线在圖上未画；P点是光线和入射光瞳的像之交点；P点的坐标为$\overline{m}$，$\overline{M}$及$x(=\overline{OE})$，B点为光线和物平面经$i-1$折射面后的高斯像面之交点；其坐标为$\overline{OF}(=s)$，g及δG。和以前一样，A点是光线和经面的交点，M为折射点，

光线AM及其在经面上 投影AK间交角为δ；取M点的坐标为a、b、c。线段MA之长，即由折射点至经面的长称为V。

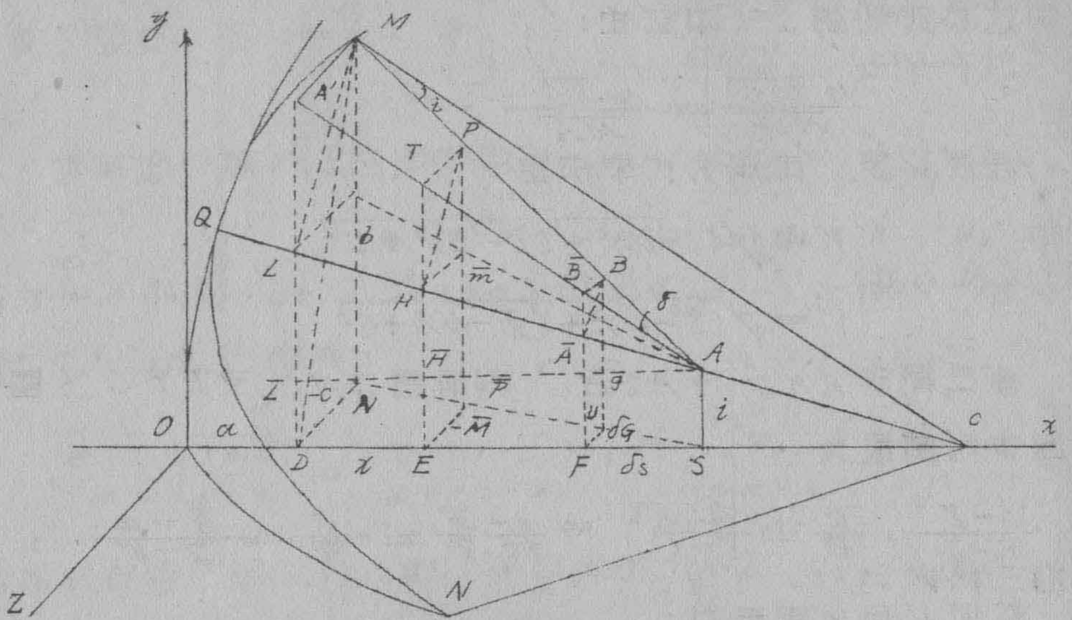

图 231

为了不使图形过於複雜，折射光线MA' （图230）未在图231画出，同样地未画出下一個第i号入射光瞳及下一個高斯像；再下面将用与入射光线MA相应的符号加以撇号来代表折射后的相应数量。

由三角形AKM有：

$$\overline{KM}=V\sin\delta,$$

由图230的三角形$A'KM$则有：

$$\overline{KM}=V'\sin\delta'$$

因而

$$V\sin\delta=V'\sin\delta'$$

利用方程式（129·2） 即得

$$\frac{V}{V'}=\frac{n\,\overline{l}}{n'\,\overline{l}'}$$

由图230中的三角形ASC 及$A'S'C$可得

$$\frac{\overline{l}}{\overline{l}'}=\frac{\gamma-S}{\gamma-S}$$