高等农牧水产院校教材

高等数学

蔡贤如　孙洪飞
吕振环　李海春　主编

吉林科学技术出版社

高等农牧水产院校教材

高 等 数 学

主　编　蔡贤如　孙洪飞　吕振环　李海春
副主编　王　奇　张丽梅
主　审　刘来福

吉林科学技术出版社

编 委 名 单

主　　编　蔡贤如　孙洪飞　吕振环　李海春

副 主 编　王　奇　张丽梅

主　　审　刘来福

编写人员　（以姓氏笔划为序）

　　　　　王　奇　孙洪飞　吕振环　李海春

　　　　　李　旻　李利峰　张　远　张丽梅

　　　　　蔡贤如

高等农牧水产院校教材

高等数学

蔡贤如等　主编

责任编辑：王宏伟　　封面设计：李　者

出版发行　吉林科学技术出版社　787×1092 毫米 16 开本　448,000 字　20 印张

2000 年 5 月第 1 版　2000 年 5 月第 1 次印刷

定价：22.5 元

印刷　沈阳农业大学印刷厂

ISBN 7-5384-2145-9/O·71

地址　长春市人民大街 124 号　邮编　130021　电话　5635183　传真　5635185

电子信箱 JLKJCBS@public.cc.jl.cn

前　言

作为21世纪的高等数学教材，编写的宗旨是：遵照农业部学科组关于《高等数学教学的基本要求》，遵照数学为农业生产实际及农业科研服务；遵照面向21世纪数学教学内容和课程体系的改革要求，对传统的高等数学教材作了这样一些处理：

1．教材中保留了极限的的“$\varepsilon—\delta$”定义，也给出了朴素的极限概念的引入，要求教学中在“$\varepsilon—\delta$”定义上尽量少花时间，以免在一开头就形成了“大块头”的极限论，让初学者望而生畏。

2．在微分方程一章中，加入了微分方程在数学建模中的应用一节，使学生在头脑中初步树立起数学建模的思想。

3．最后加了一章“无穷级数”，着重介绍了幂级数的概念、性质及应用。这一章的讲授要视各院校的学时数而定，因而放在了书的最后。

4．在大部分章节的后面加了综合性类型例题，以提高学生的综合应用能力。

本书由沈阳农业大学蔡贤如教授等同志主编，北京师范大学刘来福教授主审。

本书出版中得到沈阳农业大学与编者所在院校及王学恕教授的大力支持，在此一并致谢。

由于水平所限，书中不足之处，恳请读者批评指正。

编者

2000年3月

目　　录

第一章　函数、极限与连续

函数是高等数学研究的主要对象。极限方法则是高等数学中研究问题的一种基本方法。本章在复习函数概念的基础上着重介绍极限的概念和函数的连续性。

第一节　函　　数

一、函数的概念

在观察自然现象或研究工程问题时，常常发现有几个变量在变化着，它们并不是孤立的，而是相互依赖、相互制约的。变量之间的确定性依赖关系，就称为函数关系。

定义　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集。如果对于每个数 $x \in D$，变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y = f(x)$。数集 D 叫做这个函数的定义域，x 叫做自变量，y 叫做因变量。

当 x 取值 $x_0 \in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值，称为函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$。当 x_0 遍取 D 的各个数值时，对应的函数值全体组成的数集 $W = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数的值域。

如果自变量在定义域内任取一个数值时，对应的函数值总是只有一个，则称这种函数为单值函数，否则叫做多值函数。本书中的函数凡是没有特别说明，都是指单值函数。定义域 D 和对应规律是函数概念的两个要素。很多函数的定义域可用区间表示，对应规律可用表格、图象或解析式表示。

在用解析式表示的函数中，有时会遇到一个函数要用几个式子表示的情形。

例如，函数

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

其定义域是$(-\infty, +\infty)$，其图形如图 1-1 所示。

又如符号函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

其定义域为$(-\infty, +\infty)$。当 x 取$(-\infty, 0)$内的数值时，函数值均为 -1，而当 x 取$(0, +\infty)$内的数值时，函数值均为 1，而 $f(0) = 0$。故值域 $W = \{-1, 0, 1\}$ 是个离散的数集，该函数的图形如图 1-2 所示，也可记作 $y = \operatorname{sgn} x$。

这种在定义域内的不同范围用不同的式子表示的一个函数，称为分段函数。

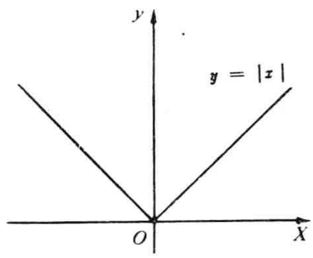


图 1-1

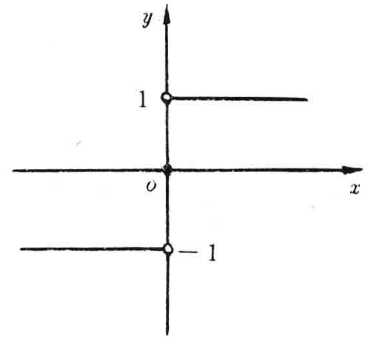


图 1-2

例 1 已知分段函数

$$y = f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & \text{当 } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1 + x, & \text{当 } x > 1 \end{cases}$$

试求

(1) 函数的定义域，值域；

(2) $f\left(\frac{1}{2}\right), f(1), f(3)$；

(3) 画出函数的图形。

解 (1) 函数的定义域为 $D = [0, +\infty)$，值域为 $W = [0, +\infty)$；

(2) 因为 $\frac{1}{2} \in [0,1]$，所以 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$；

$1 \in [0,1]$，所以 $f(1) = 2\sqrt{1} = 2$；

$3 \in (1, +\infty)$，所以 $f(3) = 1 + 3 = 4$；

(3) 根据函数定义，在$[0,1]$上，函数的图形为曲线 $y = 2\sqrt{x}$，在$(1, +\infty)$上，函数的图形为直线 $y = 1 + x$，该函数图形如图 1-3 所示。

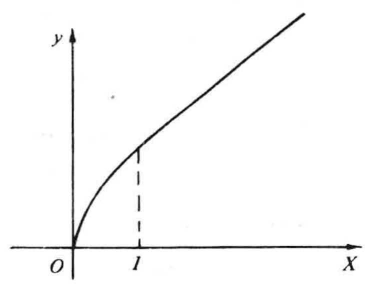


图 1-3

例 2 设 x 为任一实数，不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分，记作 $[x]$，例如

$$\left[\frac{5}{7}\right] = 0, \qquad [\sqrt{2}] = 1, \qquad [\pi] = 3$$

$$[-1] = -1, \qquad [-3,5] = -4$$

把 x 看成变量，则函数

$$y = [x]$$

的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$，值域 $W = Z$，图形为阶梯曲线，在 x 为整数值处发生跳跃，跃变为 1(自已画一下)，这函数称为取整函数。

二、函数的几种特性

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $A \subset D$。如果存在正数 M，使得对于一切 $x \in A$，有

$$|f(x)| \leqslant M$$

则称函数 $f(x)$ 在 A 上有界。如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 A 上无界。

例如，函数 $f(x) = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界，因为存在正数 $M = 1$，对于一切 $x \in (-\infty, +\infty)$，有 $|\sin x| \leqslant 1$。函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 内无界，因为对于 $(0,1)$ 内的一切 x，能使 $\left|\frac{1}{x}\right| \leqslant M$ 成立的 M 是不存在的。但 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在区间 $(1,2)$ 内是有界的，因为可取正数 $M = 1$，对于一切 $x \in (1,2)$，都有 $\left|\frac{1}{x}\right| \leqslant 1$。

有界函数的图形介于直线 $y = M$ 与 $y = -M$ 之间。

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I \subset D$。如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有

$$f(x_1) < f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的，区间 I 为函数 $f(x)$ 的单调增区间；如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有

$$f(x_1) > f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的，区间 I 为函数 $f(x)$ 的单调减区间。

例如，函数 $f(x) = x^2$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调增加，在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调减少，但在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内不是单调的。

3. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于坐标原点对称（即若 $x \in D$，则必有 $-x \in D$）。如果对于任何 $x \in D$，恒有

$$f(-x) = f(x)$$

成立，则称 $f(x)$ 为偶函数。如果对于任何 $x \in D$，恒有

$$f(-x) = -f(x)$$

成立，则称 $f(x)$ 为奇函数。

例如，函数 $f(x) = x^2$ 是偶函数，函数 $f(x) = x^3$ 是奇函数。

偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于坐标原点对称。

4. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在不为零的数 T，使得对于任何 $x \in D$，有 $(x \pm T) \in D$ 且

$$f(x + T) = f(x)$$

恒成立，则称函数 $f(x)$ 为周期函数，T 称为函数 $f(x)$ 的周期。通常我们说周期函数的

周期是指最小正周期。

例如，函数 $f(x)=\sin x$ 是周期函数，它的周期 $T=2\pi$。函数 $f(x)=\sin(2x+3)$ 也是周期函数，它的周期是 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$。

以 T 为周期的周期函数，在定义域内每个长度为 T 的区间上，其图形有相同的形状。

三、反函数

对于函数 $y=f(x)$，如果把 y 看作自变量，x 看作因变量，且由 $y=f(x)$ 能够确定一个新的函数 $x=\varphi(y)$，则称这个新的函数为函数 $y=f(x)$ 的反函数，可记作 $x=f^{-1}(y)$；相对于反函数 $x=f^{-1}(y)$ 来说，$y=f(x)$ 称为直接函数。

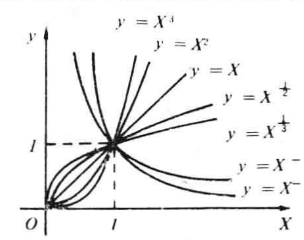
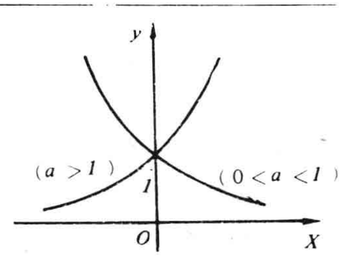
函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图形是相同的。但是，习惯上常以 x 表示自变量，y 表示因变量，于是 $x=f^{-1}(y)$ 按习惯表示为 $y=f^{-1}(x)$，因此，函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 是对称的。

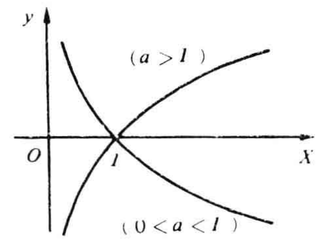
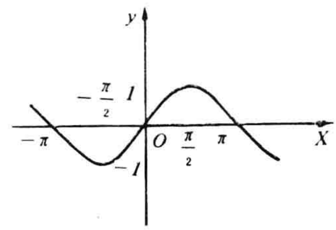
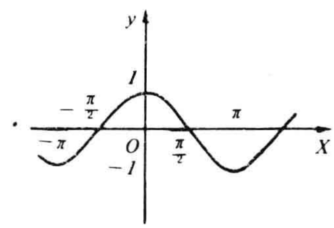
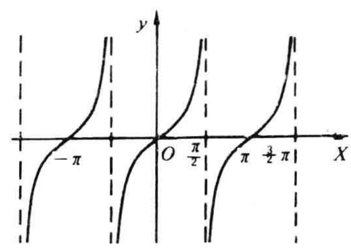
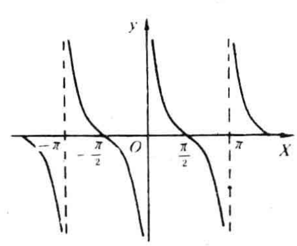
这里还要指出，单值函数 $y=f(x)$ 的反函数不一定是单值的，单调函数的反函数一定存在，且亦为单调函数。

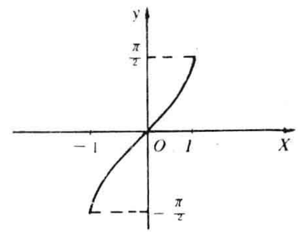
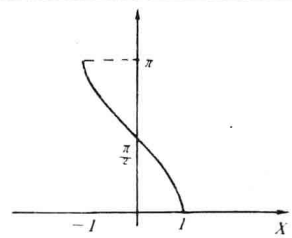
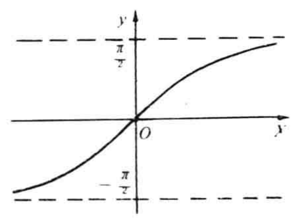
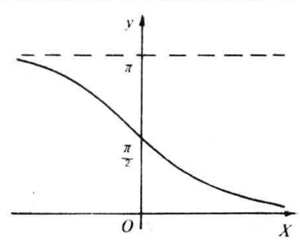
四、基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数统称为基本初等函数。对这些函数的定义和性质，在中学数学里已有较详细的介绍，此处不再赘述。为便于查阅，择其要点列表 1 于下。

表 1　　基本初等函数的定义和性质

名称	解析式	定义域	特性	图形
幂函数	$y=x^{\mu}$ （μ 为实常数）	随 μ 而定，但不论 μ 为何值在 $(0,+\infty)$ 内总有意义	在 $(0,+\infty)$ 内单调；奇偶性与 μ 有关，图形过点 $(1,1)$	
指数函数	$y=a^{x}$ $(a>0,a\neq1)$	$(-\infty,+\infty)$	单调，图形在 x 轴上方，过点 $(0,1)$	

名称		解析式	定义域	特性	图形
对数函数		$y=\log_a x$ $(a>0, a\neq 1)$	$(0,+\infty)$	单调，图形在 y 轴右方，过点 $(1,0)$	
三角函数	正弦函数	$y=\sin x$	$(-\infty,+\infty)$	有界 $(\lvert\sin x\rvert\leqslant 1)$ 以 2π 为周期的奇函数	
	余弦函数	$y=\cos x$	$(-\infty,+\infty)$	有界 $(\lvert\cos x\rvert\leqslant 1)$ 以 2π 为周期的偶函数	
	正切函数	$y=\tan x$	$x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$ $k\in Z$	以 π 为周期的奇函数；在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内单调增加	
	余切函数	$y=\cot x$	$x\neq k\pi$ $k\in Z$	以 π 为周期的奇函数；在 $(0,\pi)$ 内单调减少	

名称		解析式	定义域	特性	图形
反三角函数	反正弦函数	$y=\arcsin x$	$[-1,1]$	有界($\lvert\arcsin x\rvert\leqslant\frac{\pi}{2}$)单调增加的奇函数	
	反余弦函数	$y=\arccos x$	$[-1,1]$	有界($0\leqslant\arccos x\leqslant\pi$)单调减函数	
	反正切函数	$y=\arctan x$	$(-\infty,+\infty)$	有界($\lvert\arctan x\rvert<\frac{\pi}{2}$)单调增加的奇函数	
	反余切函数	$y=\operatorname{arccot} x$	$(-\infty,+\infty)$	有界($0<\operatorname{arccot} x<\pi$)单调减函数	

五、复合函数，初等函数

1. 复合函数

设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，且 $\varphi(x)$ 的函数值的全部或部分在 $f(u)$ 的定义域内，则通过变量 u，y 就是 x 的函数，记为 $y=f[\varphi(x)]$，并称它为前两个函数的复合函数，u 称为中间变量。

例如，函数 $y=\ln u$ 与 $u=\sin x$ 可以复合成函数 $y=\ln\sin x$，这里，$u=\sin x$ 的值域的一部分在 $y=\ln u$ 的定义域内。

值得注意的是，并不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数。例如，$y=\arccos u$ 与 $u=2+\sqrt{x}$ 就不能复合成一个复合函数，这是因为 u 的值域完全不在 $y=\arccos u$ 的定义域内。

对于一个给定的复合函数，能够准确判断它是由哪些函数复合而成的，这往往是很重要的。例如，函数 $y=e^{\arctan\sqrt{x+1}}$ 是由 $y=e^u$，$u=\arctan v$，$v=\sqrt{w}$，$w=x+1$ 复合而

成的(u、v、w 都是中间变量),复合过程中的每个函数都是基本初等函数,或者是由常数及基本初等函数经过四则运算(加、减、乘、除)得到的表达式。在对一个复合函数的复合过程进行分解(即指出复合函数的复合过程)时,必须遵循这一原则。

例 3 指出下列函数的复合过程:

$$(1)\ y = \cos^2 x,\quad (2)\ y = 2^{(x-1)^2},\quad (3)\ y = \ln\{\ln[\ln(x^2+1)]\}$$

解 (1) $y = u^2, u = \cos x$, u 为中间变量;

(2) $y = 2^u, u = v^2, v = x - 1$, u, v 为中间变量;

(3) $y = \ln u, u = \ln v, v = \ln w, w = x^2 + 1$, u, v, w 为中间变量。

例 4 指出函数 $y = \arctan\sqrt{1-x^2}$ 的复合过程。

解 函数 $y = \arctan\sqrt{1-x^2}$ 的复合过程应分解为 $y = \arctan u, u = \sqrt{v}, v = 1 - x^2$, 而不能分解为 $y = \arctan\sqrt{u}, u = 1 - x^2$, 因为 $\arctan\sqrt{u}$ 不是基本初等函数。

2. 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次函数的复合步骤所构成的,并可用一个式子表示的函数,称为初等函数。

例如, $y = x + \sin^2 x, y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ 都是初等函数。

再如,有理整函数(或称多项式函数)

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad (a_0, a_1, \cdots, a_n \text{ 为常数})$$

有理分式函数

$$R(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}\cdots + b_0} \qquad (a_n \neq 0, b_m \neq 0, m、n \text{ 为非负整数})$$

也都是初等函数。

第二节 数列的极限

高等数学的研究对象是变量。为了很好地掌握变量的变化规律,不仅要考察变量的变化过程,更重要的是要从它的变化过程来判断它的变化趋势,而变量的确定的变化趋势就是变量的极限。本节介绍数列极限的概念。

一、数列的概念

按照一定的规则,依次由自然数 1,2,…, n ,…编号排成的一列数

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

叫做数列,记为 $\{x_n\}$ 或数列 x_n 。数列中的每一个数叫做数列的项,第 n 项 x_n 叫做数列的一般项或通项。例如

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots; \tag{1}$$

$$2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \cdots, \frac{n+1}{n}, \cdots; \tag{2}$$

$$1, -1, 1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots; \tag{3}$$

$$2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \cdots, \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}, \cdots; \tag{4}$$

$$2, 4, 8, \cdots, 2^n, \cdots; \tag{5}$$

都是数列的例子。

在几何上，数列 x_n 可看作数轴上的一个动点，它依次取数轴上的点 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$（图 1-4）。

数列 $\{x_n\}$ 可看作自变量为正整数 n 的函数：

$$x_n = f(n)$$

它的定义域是全体正整数，当自变量 n 依次取 1，2，3，…等一切正整数时，对应的函数值就排列成数列 $\{x_n\}$。

数列有以下性质：

单调性 如果数列满足条件

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant \cdots,$$

就称数列 x_n 是单调增加的；如果数列 x_n 满足条件

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \cdots \geqslant x_n \geqslant x_{n+1} \geqslant \cdots,$$

就称数列 x_n 是单调减少的。单调增加和单调减少的数列统称为单调数列（这里指的是广义单调）。例如 $\{\frac{1}{n}\}$ 是一个单调减少数列，而 $\{2^n\}$ 是一个单调增加数列。数列（1）、（2）、（5）都是单调数列。单调数列的点在数轴上只能单方向移动。

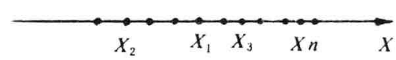


图 1-4

有界性 对于数列 x_n，如果存在着正数 M，使得对任何自然数 n，都有

$$|x_n| \leqslant M$$

成立，则称数列 x_n 是有界的；如果这样的正数 M 不存在，就说数列 x_n 是无界的。

例如，（1）、（2）、（3）、（4）都是有界数列。有界数列的点在数轴上都落在闭区间 $[-M, M]$ 上。

对于数列 x_n，我们要讨论的重要问题，是当项数 n 无限增大时，x_n 是否能够趋于一个确定的常数，这就是数列的极限问题。

二、数列的极限

设有数列 $\{x_n\}$，如果当 n 无限增大时，x_n 的值无限趋近于一个确定的常数 a（记作 $x_n \to a$），我们就称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限。例如，数列

$$2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \cdots, \frac{n+1}{n}, \cdots$$

的一般项

$$x_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$$

当 n 无限增大时，$\frac{1}{n}$ 无限趋近于零，因而 x_n 无限趋近于 1，就说 1 是数列 $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$ 的极

限。

为了确切地表明“无限增大”和“无限趋近”的意义，我们进一步考察数列 $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$。从数列的变化趋势看，当 $n \to \infty$ 时，$x_n \to 1$，这就意味着，当 n 充分大时，点 x_n 与 1 可以任意地接近，即 $|x_n - 1|$ 可以任意地小。换句话说，只要 n 足够大，$|x_n - 1| = \frac{1}{n}$ 就可以小于预先给定的任意小的正数 ε，对此，可由下表进行观察。

$\varepsilon =$	…	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	…
$n >$	…	10	10^2	10^3	10^4	10^5	…
$\|x_n - 1\| <$	…	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	…

从上表可看出，对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在着正整数，不妨记作 N，当 $n > N$ 时，即数列 $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$ 从第 $N+1$ 项开始，后面的一切项：$x_{N+1}, x_{N+2}, \cdots$ 都能使不等式

$$\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < \varepsilon$$

成立。这就是当 $n \to \infty$ 时，$\frac{n+1}{n} \to 1$ 的实质。由此例推广到一般，可得数列极限的定义如下：

定义　设有数列 $\{x_n\}$，a 为一常数，如果对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在正整数 N，使得对于 $n > N$ 时的一切 x_n，不等式

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

都成立，则称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，记为

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a$$

或

$$x_n \to a (n \to \infty)$$

如果数列没有极限，则称数列是发散的。例如，数列 $\{(-1)^{n+1}\}$ 的项总是交替地取值 1 与 -1，当 $n \to \infty$ 时，不接近于某一个确定的常数；而数列 $\{2n+1\}$ 的项 $(2n+1)$ 无限增大（当 $n \to \infty$ 时），所以它们都是发散的。

在几何上，常数 a 和数列 x_n 的各项都可用数轴上的对应点表示。因为 $|x_n - a| < \varepsilon$ 相当于 $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$，所以数列 $\{x_n\}$ 以 a 为极限的几何意义，就是对于任意给定的正数 ε，总能找到正整数 N，使得从第 $N+1$ 项开始，后面所有项 $x_{N+1}, x_{N+2}, \cdots, x_n, \cdots$ 的对应点都落在以 a 为中心，长度为 2ε 的开区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 内，至多有有限个点在这区间之外（图 1-5）。

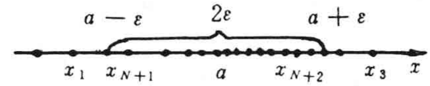


图 1-5

通常，我们将开区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 内点的全体称为 a 的 ε 邻域，即满足不等式 $|x - a| < \varepsilon$ 的实数 x 的全体，称为 a 的 ε 邻域。记 $U(a, \varepsilon)$ a 称为邻域中心，ε 称为邻域半径，将 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后所得到的点集称为 a 的去心的 δ 邻域。

上述几何解释也可说成：数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，就是对于任意给定的正数 ε，总存在

正整数 N，从 x_{N+1} 开始，后面所有的点都落在 a 的 ε 邻域内。

例 1 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$。

分析 $x_n=\frac{n+1}{n}$，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，由于 $|x_n-a|=|\frac{n+1}{n}-1|=\frac{1}{n}$，可知要使 $|x_n-a|=\frac{1}{n}<\varepsilon$，只要 $n>\frac{1}{\varepsilon}$ 即可，故可取正整数 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]$。

证 $|x_n-a|=\left|\frac{n+1}{n}-1\right|=\frac{1}{n}$

任给 $\varepsilon>0$，为使 $|x_n-a|<\varepsilon$，只要 $\frac{1}{n}<\varepsilon$ 或 $n>\frac{1}{\varepsilon}$。

所以，对于任意给定的正数 ε，存在正整数 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]$，则当 $n>N$ 时

就有
$$\left|\frac{n+1}{n}-1\right|<\varepsilon$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$$

例 2 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$。

证 $|x_n-a|=\left|\frac{1}{2^n}-0\right|=\frac{1}{2^n}$

任给 $\varepsilon>0$，为使 $|x_n-a|<\varepsilon$，即 $\frac{1}{2^n}<\varepsilon,2^n>\varepsilon$，只要 $n>\log_2\frac{1}{\varepsilon}$ 即可。

所以对任意给定的正数 ε，存在正整数 $N=[\log_2\frac{1}{\varepsilon}]$，则当 $n>N$ 时，就有
$$\left|\frac{1}{2^n}-0\right|<\varepsilon$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$$

三、收敛数列的有界性

定理 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛，则数列 $\{x_n\}$ 一定有界。

证 因数列 $\{x_n\}$ 收敛，故可设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，由数列极限的定义，对于 $\varepsilon=1$，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，总有
$$|x_n-a|<1$$

于是，当 $n>N$ 时
$$|x_n|=|(x_n-a)+a|\leqslant|x_n-a|+|a|<1+|a|$$

取 $M=\max\{|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_N|,1+|a|\}$，则对于一切自然数 n，都有
$$|x_n|\leqslant M$$

成立，所以数列 x_n 有界。

该定理的逆不真，即有界数列未必有极限。例如，数列
$$1,-1,1,-1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots$$

有界，但没有极限。