■ 主　编　项立群　万上海

线性代数
同步学习指导

DAISHU TONGBU XUEXI ZHIDAO

上海交通大学出版社

线性代数同步学习指导

主编　项立群　万上海

上海交通大學出版社

内 容 提 要

本书从教学实际出发，对线性代数知识点进行梳理，并结合例题作答，以帮助学生更好地理解、巩固和强化所学知识点。

本书共分为4个部分。第一部分对各章进行简单小结，并选择了一些典型习题作答；第二部分选编了若干应用案例；第三部分精心选编了10次作业，包含填空题、选择题、计算题、证明题等题型，另配自测题一份；第四部分为部分选择题及近年试卷四份和全书练习解答；最后附全国高等教育自学考试线性代数试题一份，供参考。

本书适合大学生学习《线性代数》时作为练习册和辅导资料使用，也可以作为硕士研究生入学数学考试的复习资料。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数同步学习指导/项立群，万上海主编. —上海：上海交通大学出版社，2008(2010 重印)

ISBN978-7-313-05243-8

Ⅰ. 线... Ⅱ. ①项...②万... Ⅲ. 线性代数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 076291 号

线性代数同步学习指导

项立群　万上海　**主编**

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路 877 号　邮政编码 200030)

电话：64071208　出版人：韩建民

常熟市华通印刷有限公司 印刷　全国新华书店经销

开本：787mm×960mm 1/16　印张：6　字数：110 千字

2008 年 7 月第 1 版　2010 年 1 月第 2 次印刷

ISBN978-7-313-05243-8/O・214　定价：9.00 元

前　　言

《线性代数》是本科生的一门基础课，理工类学生要学，经济、管理等专业也要学，全国硕士研究生入学考试中的数学一、二、三、四全部要考，分值高达 34 分左右。但《线性代数》是一门逻辑性很强的新课程，概念多、定理多、符号多、运算规律多，理论体系抽象、解题思路特殊，且内容相互纵横交错、知识前后紧密联系，更由于教学时间一般只有 30 学时，许多同学感到《线性代数》抽象、难学，考试常常不理想。

为了帮助大家更好地学习、掌握《线性代数》，我们编写了本书。第一部分对各章进行简单小结，帮助理清脉络，突出解题方法，并选择了一些典型习题作答，涉及线性代数各种主要解题方法，有的还提供一题多解，开拓思路。第二部分选编了若干应用案例，让大家体会抽象理论的应用。第三部分精心选编了 10 次作业，包含填空题、选择题、计算题、证明题等题型，另配自测题一份。既可以复习基本概念，又能复习基本计算方法和分析证明方法，同时可以弥补一般教材填空题、选择题等现代考试常常出现的题型缺乏之不足。第四部分为部分选择题及《线性代数》近年试卷四份和解答。最后附全国高等教育自学考试线性代数试题一份，供参考。希望大家学会从不同角度、不同观点认识和理解各个概念，了解新规则、掌握新方法、解决新问题。

本书适合大学生学习《线性代数》时作为练习册和辅导资料使用，也可以作为硕士研究生入学数学考试的复习资料。

本书由项立群、万上海主编，参加编写的人员还有夏登峰、刘宏建。

虽然本书已使用并修改数次，限于水平，有不妥之处欢迎大家批评指正，衷心希望大家喜欢并学好《线性代数》!

安徽工程科技学院应用数理系线性代数课程组

2008 年 8 月

目　　录

第 1 章　要点解析

1.1　行列式与矩阵

1.1.1　内容提要

1.1.1.1　n 阶行列式的定义

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}。$$

1.1.1.2　行列式的性质

(1) 行列式与它的转置行列式相等。

(2) 交换行列式的两行(列),行列式变号。

(3) 行列式中某行(列) 元素的公因子可提到行列式外面来。

(4) 行列式中有两行(列) 元素相同,则此行列式的值为零。

(5) 行列式中有两行(列) 元素对应成比例,则此行列式的值为零。

(6) 若行列式中某行(列) 的元素是两数之和,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$。

(7) 将行列式某行(列) 的 k 倍加到另一行(列) 上去,行列式的值不变。

1.1.1.3 行列式依行(列)展开

(1) 余子式:去掉 n 阶行列式 D 中元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列元素,剩下的元素按原位置次序所构成的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式,记为 M_{ij}。

(2) 代数余子式:a_{ij} 的代数余子式记为 A_{ij},$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$。

(3) 按行展开 $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}A_{kj}=\begin{cases}D & i=k\\0 & i\neq k\end{cases}$,按列展开 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}A_{is}=\begin{cases}D & j=s\\0 & j\neq s\end{cases}$。

1.1.1.4 范德蒙行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2\\\vdots & \vdots & & \vdots\\x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)。$$

1.1.1.5 克莱姆法则

请记住条件及结论,注意 D_i 与 D 这两个行列式的区别。

1.1.1.6 矩阵的概念

1. 定义

由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 组成的 m 行 n 列的矩形数表

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

称为 $m\times n$ 矩阵,记为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$。

2. 特殊的矩阵

(1) 方阵:行数与列数相等的矩阵。

(2) 上(下)三角阵:主对角线以下(上)的元素全为零的方阵称为上(下)三角阵。

(3) 对角阵:主对角线以外的元素全为零的方阵。

(4) 单位矩阵:主对角线上元素全是 1 的对角阵,记为 $\boldsymbol{E}$。

3. 矩阵的相等

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{mn}$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{mn}$,若 $a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$,则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相等,记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$。

1.1.1.7 矩阵的运算

1. 加法

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{mn}$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{mn}$,则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{mn}$。

2. 数与矩阵的乘法

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{mn}$，$k$ 为常数，则 $k\boldsymbol{A}=(ka_{ij})_{mn}$。

3. 矩阵的乘法

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{mn}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{np}$，则 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{mp}$，其中 $c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$。

4. 特别注意

一般 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$；$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，不能推出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$；$(\boldsymbol{AB})^k\neq\boldsymbol{A}^k\cdot\boldsymbol{B}^k$。

5. 矩阵的转置

设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{mn}$，将 $\boldsymbol{A}$ 的行与列的元素位置交换，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置，记为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(a_{ji})_{nm}$。若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为对称阵。

6. 逆矩阵

(1) 定义：设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，若存在一个 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为可逆阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，记作 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$。

(2) $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件：$\boldsymbol{A}$ 可逆 $\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|\neq 0$。

(3) 可逆阵的性质：

① 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也可逆，且 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$。

② 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，$k\neq 0$，则 $k\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $(k\boldsymbol{A})^{-1}=\dfrac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}$。

③ 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 也可逆，且 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$。

④ 若 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均可逆且同阶，则 $\boldsymbol{AB}$ 也可逆，且 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$。

(4) 伴随矩阵：

① 定义：$\boldsymbol{A}^*=(A_{ij})_n^{\mathrm{T}}$，其中 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式。

② 性质：

a. $\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$。

b. $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$。

c. $(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$。

d. 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^*$ 也可逆，且 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^*=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}$。

③ 用伴随矩阵求逆矩阵公式：$\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$。

1.1.1.8　方阵的行列式

1. 定义

由 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 构成的 n 阶行列式，记为 $|\boldsymbol{A}|$ 或 $\det\boldsymbol{A}$。

2. 性质

(1) $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$。

(2) $|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$。

(3) $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$。

(4) $|\boldsymbol{A}^{-1}|=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}$。

1.1.1.9 特殊矩阵的行列式及逆矩阵

(1) 单位阵 $\boldsymbol{E}$：$|\boldsymbol{E}|=1$；$\boldsymbol{E}^{-1}=\boldsymbol{E}$。

(2) 数量矩阵 $k\boldsymbol{E}$：$|k\boldsymbol{E}|=k^n$；当 $k\neq 0$ 时，$(k\boldsymbol{E})^{-1}=\dfrac{1}{k}\boldsymbol{E}$。

(3) 对角阵：设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$，则 $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$。

若 $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n\neq 0$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\lambda_1^{-1} & & & \\ & \lambda_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^{-1}\end{pmatrix}$。对于副对角行列式：副对角元素的乘积 $\times(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$。

(4) 上、下三角行列式（|◥|，|◣|）：主对角元素的乘积；若 $|A|\neq 0$，则 A^{-1} 仍为上三、下三角阵。|◤|和|◢|：副对角元素的乘积 $\times(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$。

1.1.1.10 矩阵的初等变换与初等矩阵

1. 矩阵的初等变换

定义：以下三种变换，① 交换两行（列）。② 某行（列）乘一个不为零的常数 k。③ 某行（列）的 k 倍加到另一行（列）上去，称为矩阵的初等变换。

2. 初等矩阵

(1) 定义：将 n 阶单位阵 $\boldsymbol{E}$ 进行一次初等变换得到的矩阵称为初等阵；交换 i，j 两行（列），记为 $\boldsymbol{E}(i,j)$；第 i 行（列）乘不为零的常数 k 记为 $\boldsymbol{E}(i(k))$；第 j 行的 k 倍加到第 i 行上去，记为 $\boldsymbol{E}(i\,j(k))$。

(2) 性质：初等阵是可逆阵，且逆阵仍为同型的初等阵。

$$[\boldsymbol{E}(i,j)]^{-1}=\boldsymbol{E}(i,j),\ [\boldsymbol{E}(i(k))]^{-1}=\boldsymbol{E}\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right),$$

$$[\boldsymbol{E}(ij(k))]^{-1}=\boldsymbol{E}[ij(-k)]。$$

(3) 方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆与初等阵的关系：若方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则存在有限个初等阵 $\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_t$，使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_t$。

(4) 初等阵的行列式：$|\boldsymbol{E}(i,j)|=-1$，$|\boldsymbol{E}(i(k))|=k$，$|\boldsymbol{E}(ij(k))|=1$。

(5) 初等阵的作用：对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行一次初等行(列)变换，相当于用相应的初等阵左(右)乘矩阵 $\boldsymbol{A}$。

3. 矩阵的等价

(1) 定义：若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换变到矩阵 $\boldsymbol{B}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价。

(2) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价的三种等价说法：

① $\boldsymbol{A}$ 经过一系列初等变换变到 $\boldsymbol{B}$。

② 存在一些初等阵 $\boldsymbol{E}_1,\cdots,\boldsymbol{E}_s,\boldsymbol{F}_1,\cdots,\boldsymbol{F}_t$，使得 $\boldsymbol{E}_s\cdots\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{F}_1\cdots\boldsymbol{F}_t=\boldsymbol{B}$。

③ 存在可逆阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$。

1.1.1.11　分块矩阵

1. 定义

以子块为元素的形式上的矩阵称为分块矩阵。

2. 运算

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{B}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|;\begin{vmatrix}\boldsymbol{C}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{C}\end{vmatrix}=(-1)^{m\cdot n}|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|。$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}^{-1}\end{bmatrix};\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{O}\\-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{B}^{-1}\end{bmatrix}。$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}^{-1}\\\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix};\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{-1}&-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}^{-1}\end{bmatrix}。$$

1.1.2　重点

(1) 计算行列式。

(2) 矩阵的乘法。

(3) 矩阵的逆。

(4) 矩阵的初等变换。

1.1.3　典型例题

1.1.3.1　行列式的计算

1. 用定义计算行列式

【例 1】 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}0&0&0&\cdots&0&1&0\\0&0&0&\cdots&2&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots\\2008&0&0&\cdots&0&0&0\\x_1&x_2&x_3&\cdots&x_{2007}&x_{2008}&2009\end{vmatrix}$。

解　由于前 2008 行每行都只有一个元素不为 0，由行列式定义知 D 只含一

项：2009!，且符号为$(-1)^{\tau(2008,2007,\cdots,1,2009)}=(-1)^{2007+2006+\cdots+1}=1$，从而$D=2009!$。

2. 用行列式性质计算

【例2】 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}$。 (2) $\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$。

解 (1)
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix}(r_1+r_3\text{ 得到})$$
$$=(a+b+c)\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}(r_1\leftrightarrow r_2\text{ 后 }r_1\leftrightarrow r_3\text{ 得到})$$
$$=(a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b)。$$

(2)
$$\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1000 & 427 & 327 \\ 2000 & 543 & 443 \\ 1000 & 721 & 621 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1000 & 100 & 327 \\ 2000 & 100 & 443 \\ 1000 & 100 & 621 \end{vmatrix}$$
$$=10^5\begin{vmatrix} 1 & 1 & 327 \\ 2 & 1 & 443 \\ 1 & 1 & 621 \end{vmatrix}=10^5\begin{vmatrix} 1 & 1 & 327 \\ 0 & -1 & -211 \\ 0 & 0 & 294 \end{vmatrix}=-294\times10^5。$$

【例3】 计算n阶行列式$D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$。

解 (化三角形法)

① 各行加到第1行。

② 提取公因式$x+(n-1)a$。

③ 第1行乘以$-a$加到第2至n行。

$$D_n=\begin{vmatrix} x+(n-1)a & x+(n-1)a & x+(n-1)a & \cdots & x+(n-1)a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}。$$

一般原理:化成上三角形行列式。

另解　(递推法)将第 1 列元素写成两项之和,用行列式性质得

$$D_n=\begin{vmatrix} (x-a)+a & a & a & \cdots & a \\ 0+a & x & a & \cdots & a \\ 0+a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0+a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x-a & a & a & \cdots & a \\ 0 & x & a & \cdots & a \\ 0 & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$=(x-a)D_{n-1}+\begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$=(x-a)D_{n-1}+a(x-a)^{n-1}。$$

故有 $D_1=x, D_2=\begin{vmatrix} x & a \\ a & x \end{vmatrix}=(x-a)D_1+a(x-a)=(x+a)(x-a)$。

$D_n=(x-a)D_{n-1}+a(x-a)^{n-1}$， $(x-a)D_{n-1}=(x-a)^2D_{n-2}+a(x-a)^{n-1},\cdots,(x-a)^{n-2}D_2=(x-a)^{n-1}D_1+a(x-a)^{n-1}$。

故 $D_n=(x-a)^{n-1}x+(n-1)a(x-a)^{n-1}=(x-a)^{n-1}[x+(n-1)a]$。

一般原理：利用按行(列)展开或行列式性质得到高阶行列式与一个低阶行列式的关系(称为递推关系式)，逐步推算出原行列式，也称降阶法。

3. 利用行列式展开计算(适合某行(列)零元素较多的行列式)

【例 4】 计算 n 阶行列式：$D_n=\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$。

解 将行列式按第 1 列展开得(因为第 1 列只有两个元素不等于零)

$$D_n=x(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}+y(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \end{vmatrix}$$

$=x^n+(-1)^{n+1}y^n$。

4. 利用范德蒙行列式计算(注意形式及结果)

【例 5】 计算行列式：$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & x_4^4 \end{vmatrix}$。

解 当 x_1、x_2、x_3、x_4 中有两个相等时，$D=0$。当 x_1、x_2、x_3、x_4 两两不等时，令

$$f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 & x^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 & x^3 \\ x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & x_4^4 & x^4 \end{vmatrix},$$

将 $f(x)$ 按第 5 列展开得 $f(x)=A_{15}+xA_{25}+x^2A_{35}+x^3A_{45}+x^4A_{55}$。

又 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=f(x_4)=0$，故 x_1、x_2、x_3、x_4 是 $f(x)$ 的根，由根与

系数之间的关系知 $x_1+x_2+x_3+x_4=-\dfrac{A_{45}}{A_{55}}$,所以

$$D=-A_{45}=(x_1+x_2+x_3+x_4)A_{55}。$$

又 $A_{55}=(-1)^{\tau(55)}(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)(x_3-x_2)(x_4-x_2)(x_4-x_3)$,

故 $D=(x_1+x_2+x_3+x_4)\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}(x_j-x_i)$。

5. 抽象行列式的计算

【例 6】 (1) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵,$|\boldsymbol{A}|=2$,$|\boldsymbol{B}|=-3$,求 $|2\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1}|$。(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶方阵,$|\boldsymbol{A}|=\dfrac{1}{2}$,求 $|(3\boldsymbol{A})^{-1}-2\boldsymbol{A}^*|$。

解 (1) 利用 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$,

$$|2\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1}|=|2\cdot 2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}|=|4\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}|=4^n|\boldsymbol{A}^{-1}||\boldsymbol{B}^{-1}|=-\frac{2^{2n-1}}{3}。$$

(2) 由条件 $(3\boldsymbol{A})^{-1}=\dfrac{1}{3}\boldsymbol{A}^{-1}$,$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{A}^{-1}$,故

$$原式=\left|-\frac{2}{3}\boldsymbol{A}^{-1}\right|=(-\frac{2}{3})^3|\boldsymbol{A}|^{-1}=-\frac{16}{27}。$$

1.1.3.2 矩阵的运算

1. 求方阵的幂

【例 7】 已知 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$,其中 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{C}=(2,-1,2)$,求 $\boldsymbol{A}^n$。

解 因为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2&-1&2\\4&-2&4\\2&-1&2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}^2=(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})=2(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})=2\boldsymbol{A}$,

$$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}^2\cdot\boldsymbol{A}=(2\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{A}^2=2^2\boldsymbol{A},\cdots,\boldsymbol{A}^n=2^{n-1}\boldsymbol{A}。$$

用数学归纳法证明:当 $n=2$ 时,$\boldsymbol{A}^2=2\boldsymbol{A}$,结论成立。

假设对 $n-1$ 时结论成立,则 $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{A}=(2^{n-2}\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}=2^{n-2}(\boldsymbol{A}^2)=2^{n-1}\boldsymbol{A}$。由归纳原理,结论成立,从而 $\boldsymbol{A}^n=2^{n-1}\boldsymbol{A}$。

2. 求方阵的逆矩阵

【例 8】 求下列矩阵的逆矩阵。

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2&-1\\1&1&2\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$。 (2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\2&3&0&0\\0&0&2&1\\0&0&5&4\end{pmatrix}$。

解 (1) 由于$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}0&2&-1\\1&1&2\\-1&-1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&2&-1\\1&0&1\\-1&0&0\end{vmatrix}=-2\neq0$,所以可逆,下求逆矩阵。

方法一 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*=\dfrac{1}{-2}\begin{pmatrix}1&3&5\\-1&-1&-1\\0&-2&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2}&-\dfrac{3}{2}&-\dfrac{5}{2}\\\dfrac{1}{2}&\dfrac{1}{2}&\dfrac{1}{2}\\0&1&1\end{pmatrix}$。

方法二 用初等行变换方法,请自己练习。

(2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}$。故 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^{-1}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_2^{-1}\end{pmatrix}$,故

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}-3&2&0&0\\2&-1&0&0\\0&0&4/3&-1/3\\0&0&-5/3&2/3\end{pmatrix}。$$

1.1.3.3 方阵可逆的证明

【例 9】 已知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为三阶方阵,且满足 $2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为三阶单位阵。

(1) 证明矩阵 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 可逆。

(2) 若 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$,求矩阵 $\boldsymbol{A}$。

解 (1) 由等式 $2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E}$,两边左乘 $\boldsymbol{A}$,得

$$2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{A},$$
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O},$$
$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E})=8\boldsymbol{E},$$

即$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\left[\dfrac{1}{8}(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E})\right]=\boldsymbol{E}$,故 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 可逆,且

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=\frac{1}{8}(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E})。$$

(2) 由(1)知:$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E})=2\boldsymbol{B}$,故 $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E})^{-1}$。

又$(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0\\ -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，故$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ -1 & -1 & -2\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$。

1.2 向量的线性相关性，矩阵的秩

1.2.1 内容提要

1.2.1.1 n 维向量

1. 定义

称 n 个实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的一个有序数组 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 为实数集 $\mathbf{R}$ 上的 n 维向量。$a_i\in\mathbf{R}$ 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的第 i 个分量，分量的个数称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的维数。

2. 零向量

分量全是 0 的向量称为零向量，记为 $\mathbf{0}$。

3. 行向量与列向量

写成一行 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 的向量称为行向量。写成一列 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$ 的向量称为列向量。

1.2.1.2 向量的线性运算

1. 向量的加法

设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，则

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)。$$

2. 数与向量的乘法

设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$k\in\mathbf{R}$，数 k 与向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的乘积为 $k\boldsymbol{\alpha}=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)$。

1.2.1.3 向量组的线性相关与线性无关

1. 向量的线性组合(线性表示)

对 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 和 $\boldsymbol{\beta}$，若存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$，则称 $\boldsymbol{\beta}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个线性组合。或称 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示。

2. 向量组的等价

若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的每一个向量都可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示，且向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 的每一个向量也可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，则称两个向量组等价。