龙门状元

状元笔记

教材详解

高中数学必修5

RA

龙门书局教育研究中心组编
学科主编：傅荣强 李旦久 本册主编：王贵江

★内含教材习题答案★

取状元学习之精华
架成功积累之天梯

ZHUA JI
JIAO

龍門書局 龙门品牌·学子至爱
www.longmenbooks.com

状元笔记

教材详解

ZHUANGYUAN BIJI
JIAOCAI XIANGJIE

高中数学必修 5

RA

龙门书局教育研究中心组编
学科主编：傅荣强　李旦久
本册主编：王贵江

龍門書局
北　京

举报电话:010—64031958;13801093426
邮购电话:010—64034160

图书在版编目(CIP)数据

状元笔记教材详解:RA版课标本.高中数学.必修5/龙门书局教育研究中心组编;傅荣强,李旦久学科主编;王贵江本册主编.—北京:龙门书局,2011

ISBN 978-7-5088-2907-4

Ⅰ.状…　Ⅱ.①龙…②傅…③李…④王…　Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第059798号

策划编辑:田旭　刘娜　责任编辑:刘娜　赵瑞云　封面设计:魏晋文化

龍　門　書　局出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
www.longmenbooks.com
北京龙兴印刷厂印刷
科学出版社总发行　各地书店经销
*
2011年6月第　一　版　开本:890×1240　A5
2011年9月第二次印刷　印张:9 1/4
字数:288 000

定　价:　20.80元
(如有印装质量问题,我社负责调换)

策划者语

思路决定未来

状元的成功规律

① 天道酬勤

很多人都会把高考状元的成功归结为聪明，事实果真如此吗？在与他们接触了很久之后，我渐渐发现：他们中有一部分人的确是绝顶聪明，但更多状元的智商并不比普通人高太多，勤奋是他们共同的特质。江苏的一位状元说自己大年三十的晚上还学习到12点；河南的一位状元说自己在病床上还坚持看书；广东的一位状元对自己读了三年高中的县城竟然极其陌生……

这些事例再一次验证了：天道酬勤。

② 方法决定效率

他们每个人都有一套完整科学的学习方法，而且十分有效。我曾经反复揣摩他们的这些方法，禁不住欣欣然向往之：假若我们能懂得这些方法并在实际学习中灵活运用，北大、清华等一流名校的大门就会向我们敞开着。

有思路才有方法，好方法往往事半功倍！

③ 好心态比好成绩更重要

据我观察：他们心态都很好，也很自信。心理学家们认为：心理暗示往往能让人超越自己，激发潜力，增强自信心！

好书可以改变一个人的命运！

① 没有什么比基础更重要！第一秘诀：以教材为中心，夯实基础

曾经有位高考状元跟我说，考试中真正的难题很少，题目不会做或者做错了，多数是因为基础掌握得不够扎实。很多学生自认为自己的基础很不错，其实对知识点的掌握还是似是而非，往往“知其然不知其所以然”，并没有完全吃透知识点。

这位状元还跟我说：平时看的最多的书就是教材，每次看都会有新体会，看教材不是简单的记忆，而是深刻的理解，要把每个知识点的来龙去脉搞得清清楚楚。在考试的时候，每一道考题都可以还原成教材里的例题或者习题。

我跟很多老师探讨过这位状元所说的话，大家都深以为然，教材知识是一切知识的起点和基础。在本书的“基础知识全解”这个栏目中，我们将知识点按照重要程度采用“能级”区分，每个知识点是应该“记忆”还是“理解”，存在什么样的“误区”，如何进行“延伸拓展”、“思维发散”等等都进行细致入微的讲解。目的就是帮大家尽力吃透教材，真正夯实基础。

② 素质、能力比成绩更重要，方法、技巧是素质与能力的体现

任何知识的学习，最终要归结在素质的养成和能力的提升上。靠不断地机械地做题，考试是不能提升素质和能力的，最重要的是如何将知识转化成为个人的素质与能力。拥有素质与能力，就能生发解决问题的方法与技巧，也就拥有了打开一切的“金钥匙”。拥有素质与能力，也定将能考出相当理想的成绩！

在本书的“方法·技巧·能力”栏目中，我们用案例的方式，帮助你发散拓展、突破思维障碍，学会综合运用、举一反三，破解误区和陷阱，最终实现从知识向能力的转化、迁移，培养你的创造性思维和创新能力。

③ 新颖、原创、应试

兴趣是最好的老师，人类认识自然、探索自然就是从好奇、兴趣开始的。在本书的编写中，我们力求使用最新颖的素材，让大家学会运用知识理解、分析、判断社会热点问题；我们力求最大程度用新方法、新思路去做一些原创的讲解和题目，当然也要保留多年沉淀下来的经典题目；我们也力求能够将考试融汇到日常的学习中，“随风潜入夜，润物细无声”，在不知不觉中培养考取高分的素质和能力。

《状元笔记教材详解》专家团队

龙门专家团队

丛书组编：龙门书局教育研究中心
总　策　划：田　旭
执行编委：刘　娜　王美容
各学科主编：
语文：郭能全　王丽霞　涂木年
数学：李旦久　李新星　傅荣强　王思俭
英语：于　静　张成标　赵炳河　朱如忠　陈　俊
物理：胡志坚　张忠新
化学：曹丽敏　张希顺　朱智铭
生物：姚登江
历史：胡　希　魏　明　张华中
地理：何纪延　王太文
政治：张　清

专家团队：

语文
方钧鹤（江苏省扬州中学副校长，特级教师，教授级高级教师）
蒋念祖（江苏省扬州中学语文教科室主任，教授级高级教师）
郭能全（山东省莱芜二中高级教师）
王丽霞（山东省潍坊市安丘实验中学高级教师，省级教学能手）
涂木年（广东省广州六中语文组组长，特级教师）

数学
王思俭（江苏省苏州中学数学教研组组长，教授级高级教师）
周敏泽（江苏省常州高级中学数学教研组组长，特级教师，中国数学奥赛高级教练）
李旦久（山东省烟台一中中级教师）

英语
张成标（山东省济宁市育才中学高级教师，济宁市教学能手）
赵炳河（山东省东营市利津一中高级教师，省级教学能手）
朱如忠（江苏省扬州中学副校长，高级教师）
陈　俊（安徽省安庆教研室特级教师，安徽省学术带头人）
朱尔祥（山东省潍坊一中高级教师）
刘德梁（安徽省安庆一中高级教师）

物理
朱　浩（江苏省苏州中学特级教师，国际物理奥赛金牌教练）
陈连余（江苏省南京市金陵中学特级教师，市学科带头人）
张忠新（山东省潍坊一中高级教师，潍坊市教学能手，全国奥赛优秀指导老师，中国物理学会终身会员）
胡志坚（广东实验中学物理教研组组长，高级教师）

化学
顾德林（江苏省苏州中学特级教师）
朱智铭（北京市平谷中学化学组组长，高级教师）
张希顺（山东省潍坊中学化学组组长，高级教师）
曹丽敏（江苏省常州高级中学化学教研组组长，高级教师，市学科带头人）

生物
王苏豫（江苏省金陵中学教授级高级教师，苏教版生物教材编委会委员）
姚登江（山东省邹城实验中学生物组组长，高级教师）

思想政治
赵浩岭（江苏省扬州中学特级教师）
马维俊（江苏省常州高级中学高级教师）
张　清（山东省烟台一中备课组组长，中级教师）

历史
王　雄（江苏省扬州中学高级教师，教授级高级教师）
魏　明（山东省实验中学高级教师，省级骨干教师，市学科带头人）

地理
何纪延（江苏省苏州中学高级教师）

读者意见调查表

亲爱的读者朋友：

您好！感谢您选购龙门书局的图书（高中数学必修 5 · RA）。为了更好的满足您的学习需求，请将您的想法以及在使用过程中发现的不足和建议反馈给我们，以便不断提高图书质量。

1. 您认为本书的封面：A. 不错　B. 一般　C. 改进的地方________
2. 您认为本书哪些栏目对您学习帮助比较大（　　），您认为本书哪些栏目对您帮助不大（　　）
   A. 基础知识全解　B. 方法能力探究　C. 从教材看高考
   D. 课后习题　F. 教材习题答案
3. 吸引您购买本书的理由（　　）
   A. 知识点讲解全面　B. 方法能力讲解细致　C. 例题选取经典　D. 有易错提示
   E. 有课后练习　F. 有教材与高考的联系　G. 有教材习题答案　H. 其他________
   ____
4. 您所在学校使用的教材版本（如 R、JS 等）
   语文________ 数学________ 英语________ 物理________ 化学________
   生物________ 地理________ 历史________ 政治________
5. 您周边同学使用最多的同步图书________
   ____
6. 您在学习过程中遇到哪些困难？________
   ____
7. 您在使用本书时发现的错误（请标明页码、题号）________
   ____
   ____
8. 您认为本书需要改进的地方及其他建议________
   ____

您的个人档案（请务必详细填写）

姓名：　　学校：

年级：　　通讯地址：　　省　　市

邮编：　　职业：教师　学生　其他

联系方式：

来信请寄：北京市东城区东黄城根北街 16 号龙门编辑部　王美容（收）

邮编：100717

目录

第三章 不等式

第一章 解三角形

1.1 正弦定理和余弦定理

1.1.1 正弦定理

芝麻开门

在初中，我们在研究两个三角形的关系时，总是强调边边角(SSA)不能判断两个三角形全等(如图 1-1-1)，你知道为什么吗？下面，请大家跟随我一起探索这一奥秘吧！

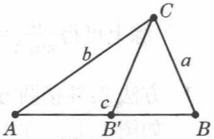

图 1-1-1

基础知识全解

★★★★知识点1 正弦定理的理解

[掌握] 在△ABC中，a,b,c分别为$\angle A,\angle B,\angle C$的对边，$R$为△$ABC$的外接圆的半径，则有$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$.

〈点拨〉 (1)正弦定理可以叙述为：在一个三角形中，各边和它所对角的正弦的比相等，都等于这个三角形外接圆的直径.

(2)此处比值一定要求是边与其所对角的正弦的比值.

(3)当$C=90°$时，$\sin A=\frac{a}{c}$，$\sin B=\frac{b}{c}$. 正弦定理是直角三角形边角关系的一个推广.

(4)正弦定理对任意三角形都成立，它揭示了三角形中边与角的一种关系. 运用正弦定理可以实现三角形中边与角的正弦之间的相互转化.

[了解] 正弦定理的证明

方法1：等高法

(1)如图 1-1-2，在锐角△ABC中，过C作$CD\perp AB$于D，则$CD=a\sin B$，$CD=b\sin A$.

$\therefore a\sin B=b\sin A$.

即$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，同理可得：$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，

$\therefore \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

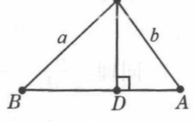

图 1-1-2

〈点拨〉 在证明正弦定理的时候，为了寻找边、角的关系，可以

转化为一个共同的量(高)加以实现,以上是教材给出的证明方法.

补充和探究:教材 P3[探究]正弦定理的证明

(2)在钝角△ABC中,$\angle CAB$是钝角.过C作$CD\perp AB$于D,交BA延长线于D,则$CD=a\sin B$,$CD=b\sin(\pi-\angle CAB)=b\sin A$.

$\therefore a\sin B=b\sin A$,$\therefore \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$.

同理可得$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$,

$\therefore \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

综上可得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

方法 2:外接圆方法

如图 1-1-3,在△ABC中,设三角形的外接圆半径为R,构造直角三角形(直径所对的圆周角是直角),连结BO并延长交圆O于B',连结AB'.

$\therefore \angle B'AB=90°$,$\angle B'=\angle C$.

在 Rt△$B'AB$中,$\frac{AB}{\sin B'}=B'B$,

$\therefore \frac{AB}{\sin B'}=\frac{AB}{\sin C}=B'B=2R$,

即$\frac{c}{\sin C}=2R$.

同理可证:

$\frac{a}{\sin A}=2R$,$\frac{b}{\sin B}=2R$,

$\therefore \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$.

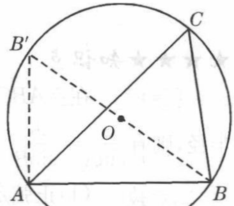

图 1-1-3

方法 3:向量法

如图 1-1-4,在△ABC中,$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$,作单位向量$\boldsymbol{j}$垂直于$AC$,

$\overrightarrow{AC}\cdot \boldsymbol{j}=\overrightarrow{AB}\cdot \boldsymbol{j}+\overrightarrow{BC}\cdot \boldsymbol{j}$,

即$0=c\cdot\cos(90°-A)+a\cdot\cos(90°+C)$,

$c\cdot\sin A-a\cdot\sin C=0$,

$\therefore \frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}$,

同理,$\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}$,

$\therefore \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

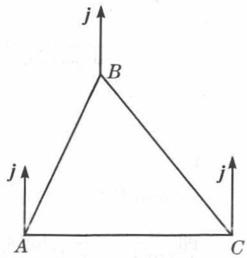

图 1-1-4

[拓展] 正弦定理的变形

(1)$a=2R\sin A, b=2R\sin B, c=2R\sin C$.

(2)$\sin A=\frac{a}{2R}, \sin B=\frac{b}{2R}, \sin C=\frac{c}{2R}$.

(3)$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$.

(4)$\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=\frac{a+b}{\sin A+\sin B}=\frac{a}{\sin A}$.

证明:(1)$\because \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$,

$\therefore \frac{a}{\sin A}=2R, \frac{b}{\sin B}=2R, \frac{c}{\sin C}=2R$,

$\therefore a=2R\sin A, b=2R\sin B, c=2R\sin C$.

(2)由(1)得

$a=2R\sin A, b=2R\sin B, c=2R\sin C$.

两边同除以 $2R$ 得

$\sin A=\frac{a}{2R}, \sin B=\frac{b}{2R}, \sin C=\frac{c}{2R}$.

(3)由(1)得 $a=2R\sin A, b=2R\sin B, c=2R\sin C$,

$\therefore a:b:c=2R\sin A:2R\sin B:2R\sin C=\sin A:\sin B:\sin C$.

(4)因为$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$,

故由分式的合比定理得:

$\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=\frac{a+b}{\sin A+\sin B}=\frac{a}{\sin A}=2R$.

【例1】 在$\triangle ABC$中,$A:B:C=4:1:1$,则$a:b:c=$ ( )

A. $4:1:1$ B. $2:1:1$ C. $\sqrt{2}:1:1$ D. $\sqrt{3}:1:1$

思路分析:根据三角形内角和定理求出角,然后利用定理求解.

规范解答:$\because A+B+C=180°, A:B:C=4:1:1, \therefore A=120°, B=30°, C=30°$.

由正弦定理的变形公式得 $\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=\sin 120°:\sin 30°:\sin 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}:\frac{1}{2}:\frac{1}{2}=\sqrt{3}:1:1$,选 D.

教师点评 三角形内角和定理 $A+B+C=180°$是隐藏的条件，我们在做题时要对隐藏条件敏感，要有一双“善于发现条件的眼睛”. 另外运用正弦定理得出 $\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$ 是一种常见做法，这也是一个我们今后比较常用的结论，这样可以达到边与对角正弦值的互相转换这一目的.

【变式1】 已知$\triangle ABC$中,$a:b:c=1:\sqrt{3}:2$,则$A:B:C$等于 ( )

A. $1:2:3$ B. $2:3:1$ C. $1:3:2$ D. $3:1:2$

思路分析:先根据三边比例借助正弦定理转化为三角的正弦比例,再由正弦值得出角的大小,进而求出角的比值.

规范解答:在$\triangle ABC$中,利用$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=1:\sqrt{3}:2$易知

$\sin A=\frac{1}{2},\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2},\sin C=1$,

$\therefore A=30^\circ,B=60^\circ,C=90^\circ$.

选A.

教师点评 本题是知道边之比求角之比,而【例1】是知道角之比求边之比,两个题都是借着正弦定理的变形,实现了"边角之间的互化",这是一种很重要的做题方法,此方法在后面好多题中还会涉及.

【变式2】 已知$\triangle ABC$中,若$a=3,\cos A=-\frac{1}{2}$,则$\triangle ABC$的外接圆的半径是________.

思路分析:直接利用正弦定理求解.

规范解答:$\because \cos A=-\frac{1}{2},A\in(0^\circ,180^\circ)$,

$\therefore A=120^\circ,\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

由$\sin A=\frac{a}{2R}$得,$R=\sqrt{3}$.

〈提醒〉 尤其是解答题的解答过程中,$A\in(0^\circ,180^\circ)$是不能省略的,这是体现知识严密性的地方,是知识的易漏点.

【例2】 设锐角$\triangle ABC$的内角A、B、C的对边分别为a、b、c,$a=2b\sin A$,求B的大小.

思路分析:条件中给出$a=2b\sin A$,是一种边与角的关系,根据要求的问题是角,所以我们考虑可以利用正弦定理将边转化为角来解决.

规范解答:根据正弦定理可得

$a=2R\sin A,b=2R\sin B$,

$\therefore 2R\sin A=4R\sin B\sin A$,

$\therefore \sin A=2\sin B\sin A$,

$\because \triangle ABC$为锐角三角形,

$\therefore A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\sin A\neq 0$,故上式两边同除以$\sin A$,得

$\sin B=\frac{1}{2}$,

又$\because \triangle ABC$为锐角三角形,

$\therefore B=\frac{\pi}{6}$.

教师点评 由$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$可以得到$\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}$,解本题也可将其直接代入.而利用$\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}$进行边角转换也是解决三角形问题常见的处理方法之一.

【变式 1】 在$\triangle ABC$中，求证：若$A>B$，则$\sin A>\sin B$.

思路分析：利用大边对大角，再借助于正弦定理转化为正弦的大小关系.

规范解答：在$\triangle ABC$中，$A>B\Leftrightarrow a>b\Leftrightarrow 2R\sin A>2R\sin B\Leftrightarrow \sin A>\sin B$.

所以，若$A>B$，则$\sin A>\sin B$.

教师点评 (1)“大边对大角，小边对小角”的理论看似不起眼，往往会有很重要的用途，在本题证明过程中就起着关键作用.

(2)本题中条件和结论的推导是可逆的，也就是由$\sin A>\sin B$可以证明出$A>B$也成立.当然对于$A>B$，我们也可以对角A为锐角、直角或钝角进行分类讨论，体现了数学中常用的分类讨论思想.

①若角A为锐角，根据正弦函数在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上为单调增函数，则可以得到$\sin A>\sin B$；

②若角A为直角，$\sin A=1>\sin B$成立；

③若角A为钝角，则其必大于$\frac{\pi}{2}$且小于角B的补角，所以有

$\frac{\pi}{2}>\pi-A>B>0$，

$\therefore \sin(\pi-A)>\sin B$，

即$\sin A>\sin B$.

【变式 2】 在$\triangle ABC$中，角A,B所对的边分别是a,b.

求证：$b^2\cos 2A-a^2\cos 2B=b^2-a^2$.

思路分析：根据升幂公式将二倍角化为一倍角，然后将正弦定理变形代入，整理结果即可.

规范解答：由于$\cos 2A=1-2\sin^2 A$，$\cos 2B=1-2\sin^2 B$，

故左边$=b^2\cos 2A-a^2\cos 2B$

$=b^2(1-2\sin^2 A)-a^2(1-2\sin^2 B)$

$=(b^2-a^2)-2(b^2\sin^2 A-a^2\sin^2 B)$，

根据正弦定理，有$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，

所以$b\sin A=a\sin B$，即$b^2\sin^2 A=a^2\sin^2 B$，

$\therefore$ 左边$=(b^2-a^2)-2\times 0=b^2-a^2=$右边，

命题得证.

教师点评 升幂公式有三个：$\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A=2\cos^2 A-1=1-2\sin^2 A$，选择哪一个呢？我们选择了$\cos 2A=1-2\sin^2 A$，毕竟我们只是学习了正弦定理，这既是明智之举又是无奈之举.另外此题还可以改编为：在$\triangle ABC$中，角A,B所对的边分别是a，b，求证：$\frac{\cos 2A}{a^2}-\frac{\cos 2B}{b^2}=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}$.这样显得形式更加美丽一些，无非是把原题两边同除以a^2b^2了.

★★★★★知识点 2 应用正弦定理去解三角形

[了解] 一般地，我们把三角形的三个角和它们的对边叫做三角形的元素. 已知三角形的几个元素求其他元素的过程叫做解三角形.

从方程的观点看，表达式中每一个等号所形成的等式中，含有四个量，显然可知三求一. 一般说来，正弦定理可以解决两类有关解三角形的问题：

(1)已知两角和任一边，求其他两边和一角.

(2)已知两边和其中一边的对角，求另一边的对角，进而可求其他的边和角.

〈提醒〉 已知三角形两边和一边的对角，在利用正弦定理求另一边的对角时，得到两个解，对于解的取与舍是这部分内容的一个易错点.

[掌握] 在△ABC中，已知a，b和A时，三角形的解的各种情况如下.

(1)A为锐角

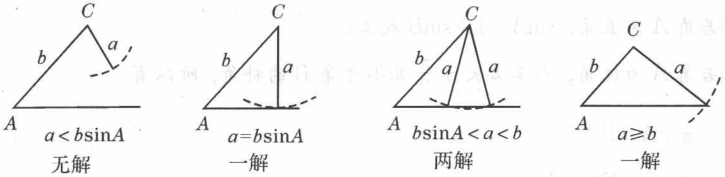

图 1-1-5

〈提醒〉 ①画图解题总是将角A画在左边解题，目的是便于应用以上阐述的结论.

②《芝麻开门》栏目中提到为什么边边角(SSA)不能判断两个三角形全等，根据图1-1-5中的第三个图，你明白了么?

(2)A为直角或钝角

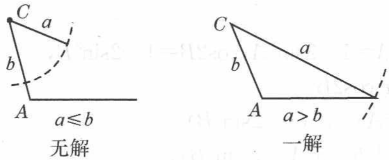

图 1-1-6

【例 3】 (2010 · 北京理 10)在△ABC中，若$b=1$，$c=\sqrt{3}$，$\angle C=\frac{2\pi}{3}$，则$a=$________.

思路分析：知道边$c=\sqrt{3}$和$\angle C=\frac{2\pi}{3}$，马上想到利用正弦定理先算出$\angle B$，结合三角形内角和定理$\angle A+\angle B+\angle C=\pi$得出$\angle A$，再利用正弦定理得出边长$a$.

规范解答：由正弦定理$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，得$\frac{1}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}}{\sin C}$.

又$\sin C=\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，∴ $\sin B=\frac{1}{2}$.

$\because \angle C=\frac{2\pi}{3}$，$\therefore \angle B$ 为锐角且 $\angle B=\frac{\pi}{6}$，$\therefore \angle A=\frac{\pi}{6}$.

从而 $a=b=1$.

教师点评 (1)出于巧合，由于最后求出 $\angle A=\angle B=\frac{\pi}{6}$，故得到 $\angle A$ 后就没有再利用正弦定理得出边长 a，而是直接利用"等角对等边"得出了边长 a.

(2)本题的做题思路应该是非常自然流畅的，此类题目可总结为：已知两边和其一边的对角解三角形，做题策略是：首先考虑用正弦定理算出另一边的对角，当然有时还要对角的范围进行判断.

【变式】 在 $\triangle ABC$ 中，$c=\sqrt{6}$，$A=45^\circ$，$a=2$，求 b 和 B，C.

思路分析：先由正弦定理求出 C，再求边 b 和 B.

规范解答：如图 1-1-7，$\because \frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，

$\therefore \sin C=\frac{c\sin A}{a}=\frac{\sqrt{6}\times\sin 45^\circ}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\because c\sin A<a<c$，

$\therefore C=60^\circ$ 或 $C=120^\circ$.

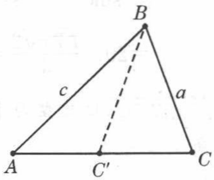

图 1-1-7

$\therefore$ 当 $C=60^\circ$ 时，$B=75^\circ$，$b=\frac{c\sin B}{\sin C}=\frac{\sqrt{6}\sin 75^\circ}{\sin 60^\circ}=\sqrt{3}+1$，

$\therefore$ 当 $C=120^\circ$ 时，$B=15^\circ$，$b=\frac{c\sin B}{\sin C}=\frac{\sqrt{6}\sin 15^\circ}{\sin 120^\circ}=\sqrt{3}-1$.

$\therefore b=\sqrt{3}+1$，$B=75^\circ$，$C=60^\circ$ 或 $b=\sqrt{3}-1$，$B=15^\circ$，$C=120^\circ$.

教师点评 (1)有时为了表达的简洁，$\angle A$ 可表示为大写字母 A，所对的边用小写字母 a 表示.

(2)得到 $\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 后，一定不要想当然地认为 $C=60^\circ$，因为钝角 $C=120^\circ$ 也有可能，本题是根据前面的理论判断出两解的. 另外，对角的讨论，体现了分类讨论的数学思想在解三角形中的应用.

(3)由于题目中告诉了 $A=45^\circ$，所以在表示 C 时，利用 60°，而不是 $\frac{\pi}{3}$，一个题目中，角度、弧度不混用，这是个好习惯.

(4) $\sin 75^\circ=\sin(30^\circ+45^\circ)=\sin 30^\circ\cos 45^\circ+\cos 30^\circ\sin 45^\circ$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

类似的，$\cos 75^\circ=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，其他的 $\sin 15^\circ$，$\sin 105^\circ$，$\cos 15^\circ$，$\cos 105^\circ$ 在解三角形中会用到，可以利用诱导公式求得.

【例 4】 已知在$\triangle ABC$中,$c=10$,$A=45°$,$C=30°$,求a,b和B.

思路分析:可以先根据三角形内角和定理$A+B+C=180°$直接求出角B,再用正弦定理求边a,b.

规范解答:$\because c=10,A=45°,C=30°$,

$\therefore B=180°-(A+C)=105°$,

由$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$得

$a=\dfrac{c\sin A}{\sin C}=\dfrac{10\times\sin45°}{\sin30°}=10\sqrt{2}$.

由$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$得

$b=\dfrac{c\sin B}{\sin C}=\dfrac{10\times\sin 105°}{\sin 30°}=20\sin 75°$

$=20\times\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=5\sqrt{6}+5\sqrt{2}$.

教师点评 此题型与【例 3】有类似之处又不尽相同,可总结为:已知三角形的任意两角及其一边解三角形.做题策略是:可以先根据三角形内角和定理求出第三角,然后根据正弦定理求其他边.

【变式】 在$\triangle ABC$中,已知$A=105°$,$c=10$,$C=30°$,求b.

思路分析:先利用三角形内角和定理$A+B+C=180°$算出B,再利用正弦定理计算得出结果.

规范解答:$\because B=180°-(A+C)=180°-(105°+30°)=45°$,

并且$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$,

$\therefore b=\dfrac{c\sin B}{\sin C}=\dfrac{10\sin45°}{\sin30°}=10\sqrt{2}$.

教师点评 此种类型题目是先算第三角,然后根据正弦定理求解,注意公式中边与对角的正弦的比值.

★★知识点 3 运用正弦定理判断三角形的形状

〈辨析〉 运用正弦定理判断三角形的形状,主要思路是利用正弦定理完成边角间的转换,将所给的式子全都化为关于角的或关于边的式子,然后再单独利用角或边的关系进行判断.

〈总结〉 今后判断三角形的形状时熟记下列结论:

①若$a=b$,则三角形为等腰三角形;若$a=b=c$,则三角形为等边三角形.

②若$\sin A=\sin B$,则三角形为等腰三角形;

若$\sin A=\sin B=\sin C$,则三角形为等边三角形.

③若$\sin A=\cos B$,则三角形为直角三角形.

④若$A=90°$或$a^2=b^2+c^2$,则三角形为直角三角形.