



“希望杯”数学竞赛系列丛书

周国镇 主编

希望杯

数学能力培训教程

(第2版)

张海英 骆 华 孙金兰 等 编

小学
六年级



YZLI0890146812



气象出版社

China Meteorological Press

“希望杯”数学竞赛系列丛书 主编 周国镇

“希望杯”数学能力培训教程

小学六年级

(第2版)

张海英 骆 华 孙金兰 等 编



YZLI0890146812



气象出版社

China Meteorological Press

图书在版编目(CIP)数据

“希望杯”数学能力培训教程. 小学六年级/张海英等编著.
—2版. —北京:气象出版社, 2011. 10(2012. 1 重印)

(“希望杯”数学竞赛系列丛书)

ISBN 978-7-5029-5325-6

I. ①希… II. ①张… III. ①小学数学课-教学参考资料
IV. ①G624. 503

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 219428 号

“Xiwangbei” Shuxue Nengli Peixun Jiaocheng. Xiaoxue Liu Nianji(Di-er Ban)

“希望杯”数学能力培训教程·小学六年级(第 2 版)

张海英, 骆华, 孙金兰 等 编

出版发行: 气象出版社

地 址: 北京市海淀区中关村南大街 46 号

总 编 室: 010-68407112

网 址: <http://www.cmp.cma.gov.cn>

责任编辑: 王元庆

封面设计: 燕 彤

责任校对: 赵 媛

印 刷: 北京京科印刷有限公司

开 本: 720 mm×960 mm 1/16

字 数: 323 千字

版 次: 2011 年 11 月第 2 版

印 数: 20001—40000

邮政编码: 100081

发 行 部: 010-68409198

E-mail: qxcbs@cma.gov.cn

终 审: 上官夫旺

责任技编: 吴庭芳

印 张: 16.5

印 次: 2012 年 1 月第 2 次印刷

定 价: 25.00 元

本书如存在文字不清、漏印以及缺页、倒页、脱页等, 请与本社发行部联系调换

“希望杯”全国数学邀请赛

组织委员会

顾问

- 龚昇** 著名数学家
华罗庚数学奖获得者
中国科学技术大学原副校长
- 梅向明** 著名数学家
原北京师范学院院长
- 徐利治** 著名数学家
大连理工大学数学研究所原所长

常务委员

- 陈德泉** 应用数学家
曾任中国优选法统筹法与经济数学研究会理事长、副理事长
华罗庚实验室主任
曾任第一、二届“希望杯”组委会主任,其他各届副主任
- 计雷** 应用数学家
曾任中国优选法统筹法与经济数学研究会理事长,现任副理事长
华罗庚实验室副主任
曾任三届“希望杯”组委会主任,其他各届副主任
- 徐伟宣** 应用数学家
中国科学院科技政策与管理科学研究所原所长
中国优选法统筹法与经济数学研究会理事长
华罗庚实验室副主任
曾任六届“希望杯”组委会主任,其他各届副主任
- 周国镇** 数学教育专家
《数理天地》杂志社社长、总编
“希望杯”组委会常任秘书长、命题委员会主任
世界数学团体锦标赛(WMTC)组委会主席

刘学红 《中国青年报》名记者、中青在线网总裁

周春荔 数学教育专家

首都师范大学数学系教授

吕伟泉 广东省教研室副主任

黄建弘 上海数学教育专家

龙开奋 数学教育专家

广西师范大学数学系教授

崔恒兵 数学教育专家

南京书人教育培训中心主任

汪甄南 数学教育专家

澳门数学教育研究学会会长

委 员

北 京 牛玉石

天 津 王成维 闫 毅

河 北 石瑞贞 刘建中 胡志奇 张丽晨 韦真波 孙永青 张 炎
孙丽静 耿昌敏

山 西 王 光 白 枫 刘秀荷

内 蒙 古 张海鹏 王 荣 包 虎 刘彦彰 莫日根 赛兴嘎 宝音达赖
特木尔 王维国 宝 音 宋锁良 高秀恩 王 智 步海英
杜玉新 张根宝 朱云满

辽 宁 岳慧思 孙家逊 魏丽敏 陈玉华 马云昌 刘 蓉

吉 林 张胜利 祝承亮 王铁红 刘 颖

黑 龙 江 李修福 于 辉 金贵泉 熊晓青 邹 辉 习全中 孙继霞

上 海 田培庆 王 镇 杨家政 吴 洪 周祖康 张 波 李国威
毛育才 王凤春 黎 东

江 苏 王旭春 戴风明 曹大方 陆 韧 张建良 陈荣华 戴圩章

浙 江 吴明华 李世杰 应建军 徐 莹 陈洪远

福 建 傅晋玖 苏德杰 温晓丹 苏杰民 陈少平 叶熟金 陈元本

何锦鸿 谢洁琼 蒋忠华 林亚额

江	西	熊以情	李锦成	杜小许	胡联芳	曾永洪	林健航	杨新民
山	东	董乐华	朱 菊	刘 倩	王彩华	孙根升	吴长生	魏虎甲
河	南	王静玲	赵 路	闫炳杰	刘会丰	高国强		
湖	北	马国军	陈宝亭					
湖	南	汪江松	刘统菊	杨德焱	刘 芸			
		谢细华	肖贞武	肖国瑞	张新春	康锡成	廖如光	曾晓牛
		肖乐农	曹志鹏					
广	东	卢建川	郑喜中	郑俊盛	陈文生	邓志云	殷切文	劳兆喜
		黄文毓	林国忠	徐山洪	周 曙	钟族威	张文俊	梁小贱
		傅冠流	王朝安	王 琪	赵 岚	陈和添	李 锡	陈玉叶
		赵士春	钟 明	王金玉				
广	西	邓印章	张享发	谭思培				
海	南	张光浓	王树国	廖再兴	黄 波	洗词学	施 颖	贺香云
重	庆	吴挽荣	彭安平	肖天祥	刘德珍	欧修祝		
四	川	赵颖钧	余加秋	刘海泉	晋赵勇	屈江川	周春茂	
贵	州	胡朝双	王荣方	张涤初	王兴华	黄 凡	颜家和	易艳萍
云	南	张文英	汪 锐	欧 群	段严发	何智仁	邹光兴	唐泽仪
陕	西	张 雄	闫存哲					
甘	肃	徐 琳						
宁	夏	杨 燕	孙 涛	李 红	何建中			
青	海	闫翊德						
新	疆	杨卫平	黄志清	摆生兰	王 霞	张 美	张连勇	阿不都热西提
		陈 春						
澳	门	伍助志	郑志民					

前 言

这套教程的再版(含小学四、五、六年级各一册)是为小学四、五、六年级师生开展数学科普活动或参加“希望杯”数学邀请赛而专门编写的培训教材。在编写过程中,作者充分注意了新的小学数学教学大纲,认真研究了欧美国家小学数学教育的先进经验,力求充分体现“希望杯”的特色,为广大的小学师生提供系统、全面、实用的数学内容、思想和方法,以“鼓励学好课本知识,适当拓宽知识面,激发学习数学的兴趣和热情,培养科学的思维能力、创新能力和实践能力”。

本教程中所有原始的素材都来源于历届小学“希望杯”全国数学邀请赛的试题和培训题,这些题目中的绝大多数是由“希望杯”全国数学邀请赛命题委员会的专家命题,其余则是由全国各地的数学命题研究人员编拟。这些题目,贴近现行的小学数学课本,很有启发性、思考性和趣味性,寓科学于趣味之中,寓知识、能力的考查于数学的美育之中。学习和研究这些题目不仅能使学习者加深对数学课本知识的理解、掌握和应用,并且能实实在在地提高科学思维素质,而这种素质对于有效地学习其他的功课都是必需的。正因为如此,历届小学“希望杯”全国数学邀请赛的试题和培训题被多方人士看好:小学数学各类考试命题人员经常从中汲取营养;有远见的数学教师大量地从中选取资料,以充实和丰富自己的教学内容;众多的数学教学和培训机构则将其作为主要教材。最有说服力的是千千万万的小学生,正是通过对“希望杯”试题的学习、研究,提高了水平,大大提升了学数学的兴趣和信心。

考虑到大部分小学生不只是希望掌握数学课本上的内容,他们对课本以外的数学也有强烈的求知欲,所以我们的教程既包含了能充分体现小学数学主要内容的部分,也包含了小学数学课本中没有而小学生也能理解和掌握的一些有价值的内容。前者占教程的大部分,后者只占小部分。

考虑到小学生年龄小,阅读和理解能力不是很强,本教程在行文上力求简明易懂。

教程的作者是“希望杯”全国数学邀请赛和世界数学团体锦标赛(WMTC)命题委员会的成员、著名的《数理天地》杂志的编辑,他们不仅有很好的数学功底,而且每个人都有丰富的教学经验。相信本教程新版的问世对于小学生数学学习水平的提高会有实际帮助。当然,书中难免会有不妥之处,真诚地欢迎读者批评指正。

周国镇

2011年11月20日

注:周国镇 《数理天地》杂志社社长兼总编;中国优选法统筹法与经济数学研究会常务理事,数学教育委员会主任;“希望杯”全国数学邀请赛组委会秘书长,命题委员会主任;世界数学团体锦标赛组委会主席。

目 录

“希望杯”全国数学邀请赛组织委员会

前 言

第 1 讲 四则运算	(1)
答案·提示	(11)
第 2 讲 找规律填数	(15)
答案·提示	(24)
第 3 讲 新定义问题	(27)
答案·提示	(36)
第 4 讲 倍数与约数	(40)
答案·提示	(48)
第 5 讲 自然数的性质	(51)
答案·提示	(58)
第 6 讲 数字谜语	(62)
答案·提示	(70)
第 7 讲 比和比例	(74)
答案·提示	(83)
第 8 讲 平均数问题	(86)
答案·提示	(91)
第 9 讲 统计图	(92)
答案·提示	(101)
第 10 讲 排列组合	(103)
答案·提示	(111)
第 11 讲 平面几何	(114)
答案·提示	(126)

第12讲 立体几何	(130)
答案·提示	(140)
第13讲 浓度问题	(144)
答案·提示	(148)
第14讲 年龄问题	(150)
答案·提示	(154)
第15讲 时钟问题	(155)
答案·提示	(161)
第16讲 牛吃草问题	(163)
答案·提示	(167)
第17讲 工程问题	(168)
答案·提示	(178)
第18讲 行程问题	(182)
答案·提示	(195)
第19讲 最值问题	(198)
答案·提示	(206)
第20讲 逻辑问题	(209)
答案·提示	(218)
第21讲 统筹问题	(221)
答案·提示	(230)
第22讲 列方程解应用题	(233)
答案·提示	(240)
第23讲 生活中的数学问题	(243)
答案·提示	(252)

第1讲 四则运算



一、知识提要

1. 运算律

加法交换律

$$a + b = b + a;$$

加法结合律

$$(a + b) + c = a + (b + c);$$

乘法交换律

$$a \times b = b \times a;$$

乘法结合律

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c);$$

乘法分配律

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c.$$

2. 运算顺序

先乘除后加减;有括号的,先算括号内的,后算括号外的.

3. 分数的大小比较

基本性质:

- (1) 若 $a > b$, 则 $b < a$;
- (2) 若 $a > b, b > c$, 则 $a > c$;
- (3) 若 $a > b, c > d$, 则 $a + c > b + d$;
- (4) 若 $a > b > 0$, 则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

基本方法:

- (1) 如果两个分数分母相同,分子大的分数较大;
- (2) 如果两个分数分子相同,分母小的分数较大;
- (3) 假分数大于真分数.

4. 速算与巧算

要使计算快速、准确,既要了解和掌握法则、定律、性质,更要灵活地运用定律、性质,合理地选择计算方法,使计算简便易行,常见的有:

(1)“凑整法”,即,使部分和、差、积、商成为整数,整十数,整百数,……,从而简化运算.

(2)对于同级运算,交换运算的顺序.

(3)把分数拆分成整数和分数两部分,然后分开进行计算.

(4)小数与分数的互化,字母代换等.

(5)活用公式
$$\frac{1}{n \times (n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$



二、例题

例1 计算:

$$2.5 \times \left[\frac{17}{28} \div 4 \frac{1}{4} \times (0.92 - 0.88) \right] \times 6.3 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

第2届(2004年)五年级培训题

分析·解 应当“先算括号内,后算括号外”.在括号内,对于分数的乘除运算,先变除法运算为乘法运算,以便及时进行约分化简;对于分数与小数的混合运算,一般可以将小数化为分数来计算,但是仍要根据具体情况来定,不能一概而论.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 2.5 \times \left(\frac{17}{28} \times \frac{4}{17} \times 0.04 \right) \times 6.3 \\ &= 2.5 \times \frac{0.04}{7} \times 6.3 \\ &= \frac{0.1}{7} \times 6.3 \\ &= 0.09. \end{aligned}$$

例2

$$\frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \cdots + \frac{1}{1+2+3+\cdots+2008} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

第6届(2008年)六年级培训题

分析·解 观察发现,分母是若干个连续自然数的和,首先根据公式 $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

$\cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ 计算出分母的值,然后再利用公式 $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ 进行拆分、合并,最后得出结果.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{1}{(1+2) \times 2 \div 2} + \frac{1}{(1+3) \times 3 \div 2} + \frac{1}{(1+4) \times 4 \div 2} + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{(1+2008) \times 2008 \div 2} \\ &= \left(\frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \cdots + \frac{1}{2008 \times 2009} \right) \times 2 \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2008} - \frac{1}{2009} \right) \times 2 \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2009} \right) \times 2 = \frac{2007}{2009}. \end{aligned}$$

例 3 $1 + 2\frac{1}{6} + 3\frac{1}{12} + 4\frac{1}{20} + 5\frac{1}{30} + 6\frac{1}{42} + 7\frac{1}{56} + 8\frac{1}{72} + 9\frac{1}{90} + 10\frac{1}{110}$
 $=$ _____.

第6届(2008年)六年级培训题

分析·解 题中是求若干个带分数的和,先将带分数拆成一个整数+一个真分数的形式,然后整数部分和分数部分分别求和.

$$\begin{aligned} &1 + 2\frac{1}{6} + 3\frac{1}{12} + 4\frac{1}{20} + 5\frac{1}{30} + 6\frac{1}{42} + 7\frac{1}{56} + 8\frac{1}{72} + 9\frac{1}{90} + 10\frac{1}{110} \\ &= (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) + \\ &\quad \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90} + \frac{1}{110} \right) \\ &= 55 + \left(\frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{10 \times 11} \right) \\ &= 55 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} \right) \\ &= 55 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{11} \right) = 55\frac{9}{22}. \end{aligned}$$

例 4 计算: $3.625 + 0.4\dot{5} - 1\frac{4}{11} =$ _____.

第9届(2011年)六年级第2试

分析·解 题目中既有小数又有分数,要求和,可考虑先将两者的形式统一.因条件中出现循环小数,所以可考虑将各数都化为分数.在运算时,将整数部分与分数部分分别计算,并注意合理的运算顺序.

$$\begin{aligned}
 3.625 + 0.\dot{4}\dot{5} - 1\frac{4}{11} &= 3 + 0.625 + 0.\dot{4}\dot{5} - 1 - \frac{4}{11} \\
 &= (3 - 1) + 0.625 + \frac{45}{99} - \frac{4}{11} \\
 &= 2 + 0.625 + \left(\frac{5}{11} - \frac{4}{11}\right) \\
 &= 2 + \left(\frac{5}{8} + \frac{1}{11}\right) \\
 &= 2\frac{63}{88}.
 \end{aligned}$$

例 5 $41\frac{1}{4} \times \frac{4}{5} + 37\frac{1}{5} \times \frac{5}{6} + 50\frac{1}{6} \times \frac{6}{7} = \underline{\hspace{2cm}}.$

第 6 届(2008 年)六年级培训题

分析·解 题目的形式是先求两个分数的乘积,再求这些乘积之和.由此容易想到乘法分配律,但是,并无公因数可提,那么,是否没有其他方法只能直接计算呢?进一步观察发现,第一个乘数的分母与第二个乘数的分子相等.若能凑成 $\frac{n}{m} \times$

$\frac{m}{n} = 1$ 的形式,则可简化运算.

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \left(40 + \frac{5}{4}\right) \times \frac{4}{5} + \left(36 + \frac{6}{5}\right) \times \frac{5}{6} + \left(49 + \frac{7}{6}\right) \times \frac{6}{7} \\
 &= 32 + 1 + 30 + 1 + 42 + 1 = 107.
 \end{aligned}$$

例 6 计算: $\frac{2008 + 2007 \times 2009}{2008 \times 2009 - 1} + \frac{2009 + 2008 \times 2010}{2009 \times 2010 - 1} + \frac{2010 + 2009 \times 2011}{2010 \times 2011 - 1} + \frac{2011 + 2010 \times 2012}{2011 \times 2012 - 1} = \underline{\hspace{2cm}}.$

第 9 届(2011 年)六年级培训题

分析·解 仔细观察,原式中四个分数式子的表达形式相同,由

$$\begin{aligned}
 \frac{2008 + 2007 \times 2009}{2008 \times 2009 - 1} &= \frac{2008 + 2007 \times 2009}{(2007 + 1) \times 2009 - 1} \\
 &= \frac{2008 + 2007 \times 2009}{2007 \times 2009 + 2009 - 1} = \frac{2008 + 2007 \times 2009}{2007 \times 2009 + 2008} = 1.
 \end{aligned}$$

可知:

$$\text{原式} = 1 + 1 + 1 + 1 = 4.$$

例 7 $\left(1 + \frac{1}{2002} + \frac{1}{2004} + \frac{1}{2006}\right) \times \left(\frac{1}{2002} + \frac{1}{2004} + \frac{1}{2006} + \frac{1}{2008}\right) -$
 $\left(1 + \frac{1}{2002} + \frac{1}{2004} + \frac{1}{2006} + \frac{1}{2008}\right) \times \left(\frac{1}{2002} + \frac{1}{2004} + \frac{1}{2006}\right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

第5届(2007年)六年级培训题

分析·解 如果运用乘法对于加法的分配律,将算式中的四个括号去掉,得到31项,再作加减运算……,实在是太繁,而且难以做正确,……这时若观察式子特点,发现各个括号中有公共部分,可用字母代换,化简后再代入值计算则大为简便.

$$\text{设} \quad \frac{1}{2002} + \frac{1}{2004} + \frac{1}{2006} = a,$$

$$\frac{1}{2002} + \frac{1}{2004} + \frac{1}{2006} + \frac{1}{2008} = b,$$

则

$$\text{原式} = (1+a) \times b - (1+b) \times a$$

$$= b + ab - a - ab = b - a = \frac{1}{2008}.$$

$$\text{例8} \quad 0.\dot{1} + 0.\dot{2} + 0.\dot{3} + 0.\dot{4} + 0.\dot{5} + 0.\dot{6} + 0.\dot{7} + 0.\dot{8} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

第8届(2010年)六年级培训题

分析·解 对于循环小数的四则运算,可化为分数进行.其中化循环小数为分数的方法为:

(1) 化纯循环小数成分数时,分母是由9组成的自然数,其中9的个数是循环节的位数.如 $0.\dot{1}2\dot{4} = \frac{124}{999}$, 本题中的循环小数都是纯循环小数.

(2) 化混循环小数成分数时,分母前若干位是9,位数是循环节的位数,其余为0,其位数是循环节前的小数位数.如 $0.13\dot{2}8\dot{7}$ 化成分数时,分母是99900,分子是 $13287 - 13 = 13274$, $0.13\dot{2}8\dot{7} = \frac{13274}{99900} = \frac{6637}{49950}$; 再如 $0.815\dot{2}\dot{7} = \frac{81527 - 815}{99000} =$

$$\frac{80712}{99000} = \frac{1121}{1375}.$$

因为

$$0.\dot{1} = \frac{1}{9}, 0.\dot{2} = \frac{2}{9}, 0.\dot{3} = \frac{3}{9}, 0.\dot{4} = \frac{4}{9},$$

$$0.\dot{5} = \frac{5}{9}, 0.\dot{6} = \frac{6}{9}, 0.\dot{7} = \frac{7}{9}, 0.\dot{8} = \frac{8}{9},$$

所以

$$\text{原式} = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{3}{9} + \frac{4}{9} + \frac{5}{9} + \frac{6}{9} + \frac{7}{9} + \frac{8}{9}$$

$$= \frac{1}{9} \times (1+2+3+4+5+6+7+8) = 4.$$

或

$$\text{原式} = \left(\frac{1}{9} + \frac{8}{9}\right) + \left(\frac{2}{9} + \frac{7}{9}\right) + \left(\frac{3}{9} + \frac{6}{9}\right) + \left(\frac{4}{9} + \frac{5}{9}\right) = 4.$$

例9 已知 $1 - \frac{1}{6 + \frac{1}{6 + \frac{1}{6}}} = \frac{1}{A + \frac{1}{B + \frac{1}{C + \frac{1}{C}}}}$, 其中 A, B, C 都是大于0且互

不相同的自然数, 则 $(A+B) \div C =$ _____.

第8届(2010年)六年级第2试

分析·解 观察等式两边, 左边是一个差的形式, 右边是某个数式的倒数, 所以要先计算出等式左边的值, 然后再写成倒数的形式. 再观察等式右边, 倒数的分母是一个自然数加一个倒数的形式, 显然分母是个假分数, 改写成带分数形式, 将分数部分再写成倒数形式, 如此继续下去, …… , 即可得解.

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{6 + \frac{1}{6 + \frac{1}{6}}} &= 1 - \frac{1}{6 + \frac{6}{37}} = 1 - \frac{37}{228} = \frac{191}{228} = \frac{1}{\frac{228}{191}} = \frac{1}{1 + \frac{37}{191}} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{6}{37}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{6 + \frac{1}{6}}}}, \end{aligned}$$

所以 $A=1, B=5, C=6$, 故 $(A+B) \div C = (1+5) \div 6 = 1$.

例10 如果 a, b, c 是3个整数, 则它们满足加法交换律和结合律, 即

(1) $a+b=b+a$

(2) $(a+b)+c=a+(b+c)$.

现在规定一种运算“ $*$ ”, 它对于整数 a, b, c, d 满足:

$$(a, b) * (c, d) = (a \times c + b \times d, a \times c - b \times d)$$

例: $(4, 3) * (7, 5) = (4 \times 7 + 3 \times 5, 4 \times 7 - 3 \times 5) = (43, 13)$.

请你举例说明, “ $*$ ”运算是否满足交换律, 结合律.

第1届(2003年)四年级第2试

分析·解 在这里给了两个新的记号. 一个是有序的数对, 如 $(4, 3)(7, 5)$, 注意 $(4, 3)$ 与 $(3, 4)$ 应看做两个不同的有序数对; 一个是运算“ $*$ ”, 运算“ $*$ ”是建立在加、减、乘三种运算的基础之上的一种新的运算符号. 两个有序数对 (a, b) 与 (c, d) 经过“ $*$ ”的运算后, 又得到了一个有序数对, 这个数对中的第一个数等于两个括号中的第一个数的乘积与第二个数的乘积的和; 第二个数等于两个括号中的第一个数的乘积与第二个数的乘积的差.

(1) 例如: $(7, 5) * (4, 3) = (7 \times 4 + 5 \times 3, 7 \times 4 - 5 \times 3)$

$$\begin{aligned} &= (4 \times 7 + 3 \times 5, 4 \times 7 - 3 \times 5) \\ &= (4, 3) * (7, 5). \end{aligned}$$

所以“ $*$ ”运算满足交换律.

$$\begin{aligned} (2) \text{ 例如: } (4, 3) * (7, 5) &= (4 \times 7 + 3 \times 5, 4 \times 7 - 3 \times 5) \\ &= (43, 13), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } [(4, 3) * (7, 5)] * (2, 1) &= (43, 13) * (2, 1) \\ &= (43 \times 2 + 13 \times 1, 43 \times 2 - 13 \times 1) \\ &= (99, 73), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{而 } (4, 3) * [(7, 5) * (2, 1)] &= (4, 3) * (7 \times 2 + 5 \times 1, 7 \times 2 - 5 \times 1) \\ &= (4, 3) * (19, 9) \\ &= (4 \times 19 + 3 \times 9, 4 \times 19 - 3 \times 9) \\ &= (103, 49) \neq (99, 73), \end{aligned}$$

所以“ $*$ ”运算不满足结合律.

反思 我们通过两个例子说明“ $*$ ”的运算满足交换律, 不满足结合律. 其中, 通过一个反面的例子就可以断言, “ $*$ ”运算不满足结合律. 但是第一个例子虽然正确, 我们还不能下断语: “对任何两个有序数对, ‘ $*$ ’运算都适用于交换律”. 正确的结论需要严格的证明. 事实上 $(a, b) * (c, d) = (a \times c + b \times d, a \times c - b \times d) = (c \times a + d \times b, c \times a - d \times b) = (c, d) * (a, b)$. 这里不管 a, b, c, d 取任何整数, 等式都是成立的, 这才是严格的证明.

例 11 真分数 $\frac{x}{7}$ 化成小数后, 如果从小数点后第一位数字开始, 连续若干个数字之和是 2008, 则 $x =$ _____.

第 7 届 (2009 年) 六年级培训题

分析·解 由于 $\frac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7}$, $\frac{2}{7} = 0.\dot{2}8571\dot{4}$, $\frac{3}{7} = 0.\dot{4}2857\dot{1}$,

$$\frac{4}{7} = 0.\dot{5}7142\dot{8}, \frac{5}{7} = 0.\dot{7}1428\dot{5}, \frac{6}{7} = 0.\dot{8}5714\dot{2},$$

因此, 真分数 $\frac{x}{7}$ 化成小数后, 都是由 1, 2, 4, 5, 7, 8 构成的 6 位循环小数, 即从小数点后第一位开始每连续六个数字之和都是

$$1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8 = 27.$$

又因为

$$2008 = 27 \times 74 + 10,$$

这说明 $\frac{x}{7}$ 化成六位循环小数后, 循环节的前两位数字的和是 10, 观察开始的数据,